Ис. Ньютонъ

Математическія Начала Натуральной Философіи

Переводъ съ латинскаго
съ примѣчаніями и поясненіями

А. Н. Крылова

Флота Генерала, Заслуженнаго Профессора Николаевской Морской Академіи,
Ординарнаго Академика Императорской Академіи Наукъ

Книги II и III

(Отдѣльный оттискъ изъ «Извѣстій» Николаевской Морской Академіи, вып. V)

ПЕТРОГРАДЪ
Типографія М. М. Стасюлевича. Вас. остр., 5 л., 28
1916

Ис. Ньютонъ

Математическія Начала Натуральной Философіи

переводъ съ латинскаго
съ примѣчаніями и поясненіями

А. Н. Крылова

Флота Генерала, Заслуженнаго Профессора Николаевской Морской Академіи,
Ординарнаго Академика Императорской Академіи Наукъ



Книги II и III
(Отдѣльный оттискъ изъ «Извѣстій» Николаевской Морской Академіи, вып. V)



ПЕТРОГРАДЪ
Типографія М. М. Стасюлевича. Вас. остр., 5 л., 28
1916



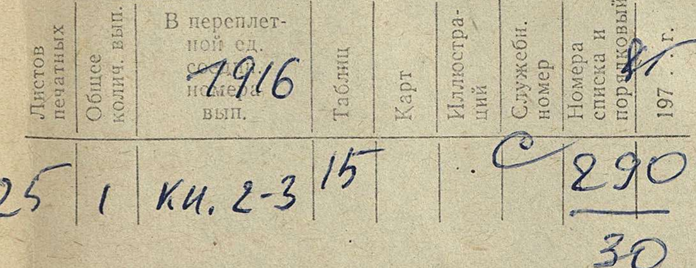
4748



Петроградъ. Дозволено военной цензурой 23 декабря 1916 г.

сбор все
К Ю

КНИГА ИМЕЕТ



Листов печатных	Общее колич. вып.	В переплетной ед. содерж. номера вып. 1916	Таблиц	Карт	Иллюстраций	Служебн. номер	Номера списка и порядковый	197 . г. 81
25	1	кн. 2-3	15			С	290 / 30	

Математическія Начала Натуральной Философіи.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Книга II.

О движеніи тѣлъ.

Книга III.

О системѣ міра.

Математическія Начала Натуральной Философіи

О движеніи тѣлъ

КНИГА ВТОРАЯ.

ОТДѢЛЪ I.

О движеніи тѣлъ при сопротивленіи пропорціональномъ скорости.

Предложеніе I. Теорема I.

Количество движенія, теряемое тѣломъ отъ сопротивленія пропорціональнаго скорости пропорціонально пройденному при движеніи пространству.

Ибо количество движенія, теряемое въ продолженіе каждаго отдѣльнаго весьма малаго промежутка времени пропорціонально скорости, т.-е. и пройденному въ этотъ промежутокъ весьма малому пути, слѣдовательно, сложивъ, получимъ, что и полное потерянное количество движенія пропорціонально полному пройденному пути.

Слѣдствіе. Поэтому если тѣло, никакому тяготѣнію не подверженное, будетъ двигаться въ свободномъ пространствѣ по инерціи и будетъ извѣстно какъ его начальное количество движенія, такъ и остающееся послѣ прохожденія какого-либо заданнаго пути, то найдется и полное пространство, которое тѣло можетъ описать въ безконечно большое время: именно это пространство такъ относится къ уже описанному какъ полное начальное количество движенія къ потерянному [128]).

---

[128]) Обозначивъ черезъ m, v, k массу, скорость, и коеффиціентъ сопротивленія, и полагая, что точка движется по оси x, выйдя изъ начала коор-

Лемма I.

Количества пропорцiональныя своимъ разностямъ образуютъ непрерывную пропорцiю.

Пусть будетъ:

$$A : A - B = B : B - C = C : C - D \text{ и т. д.}$$

тогда по обращенiи получится:

$$A : B = B : C = C : D \text{ и т. д.}$$ [129])

Предложенiе II. Теорема II.

Если тѣло испытываетъ сопротивленiе пропорцiональное скорости и по инерцiи движется въ однообразной средѣ, и если взять равные послѣдовательные промежутки времени, то скорости въ началѣ каждаго отдѣльнаго промежутка образуютъ геометрическую прогрессiю, простран-

---

динатъ со скоростью v_0, можемъ написать дифференцiальное уравненiе ея движенiя такъ

$$m\frac{dv}{dt} = -k\frac{dx}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

откуда при вышеуказанныхъ начальныхъ условiяхъ слѣдуетъ:

$$mv_0 - mv = kx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Это равенство и выражаетъ высказанную теорему.

Наибольшее пространство X проходимое тѣломъ получится, полагая въ формулѣ (2)

$$v = 0 \quad \text{и} \quad x = X$$

такъ что будетъ

$$mv_0 = kX \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Изъ равенствъ (2) и (3) слѣдуетъ:

$$X : x = v_0 : (v_0 - v) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

[129]) Вмѣсто непрерывныхъ пропорцiй теперь разсматриваются обыкновенно геометрическiя прогрессiи. Стоитъ только обозначить общую величину отношенiй черезъ q, будемъ имѣть:

$$B = Aq; \quad C = Bq^2; \quad D = Aq^3 \; . \; . \; . \; N = Aq^n.$$

Если затѣмъ принять, что n измѣняется не скачками а непрерывно, то N будетъ показательною функцiей отъ n. Эта функцiя будетъ по прежнему обладать тѣмъ же основнымъ свойствомъ какъ и члены прогрессiи т.-е., что ея «разность» или приращенiе пропорцiонально самой функцiи. Въ дальнѣйшемъ Ньютонъ представляетъ показательную функцiю въ видѣ абсциссы или ординаты точки гиперболы въ зависимости отъ площади ограниченной этой кривою и ея ассимптотою.

ства же пройденныя въ продолженіе каждаго промежутка будутъ пропорціональны скоростямъ.

Случай 1. Если время подраздѣлить на равные промежутки, и если бы въ началѣ каждаго промежутка сила сопротивленія дѣйствовала бы мгновеннымъ натискомъ пропорціональнымъ скорости, то уменьшеніе скорости для каждаго промежутка было бы пропорціонально самой скорости. Слѣдовательно такія скорости (по Л. I кн. 2-й) пропорціональныя своимъ разностямъ составляютъ геометрическую прогрессію. Поэтому если изъ одинаковаго числа этихъ равныхъ малыхъ промежутковъ составить новые равные промежутки времени, то скорости въ началѣ этихъ новыхъ промежутковъ будутъ относиться между собою какъ тѣ члены первоначальной геометрической прогрессіи, которые будутъ въ ней взяты скачками, пропуская соотвѣтственно по равному числу промежуточныхъ членовъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ эти члены образуютъ новую геометрическую прогрессію, знаменатель которой равенъ соотвѣтственной, сообразно числу пропущенныхъ членовъ, степени знаменателя первоначальной прогрессіи, слѣдовательно и скорости пропорціональныя этимъ взятымъ членамъ, находятся въ геометрической прогрессіи. Если вышеуказанные малые равные промежутки, на которое подраздѣлено время, уменьшить, число же ихъ увеличить до безконечности, такъ чтобы дѣйствіе сопротивленія сдѣлать непрерывнымъ, то скорости въ началѣ равныхъ конечныхъ промежутковъ времени находившіяся постоянно въ непрерывной пропорціи, останутся и въ этомъ случаѣ непрерывно пропорціональными.

Случай 2. Составивъ разностную пропорцію, т.-е. пропорцію послѣдовательныхъ утратъ скорости, получимъ что эти утраты пропорціональны полнымъ скоростямъ, но пройденныя въ отдѣльные промежутки пространства пропорціональны потерямъ скорости (пр. I кн. 2-й), а значитъ и самой скорости.

Слѣдствіе. Поэтому если описать равнобочную гиперболу BG имѣющую взаимно перпендикулярныя ассимптоты AC и CH и провести AB и DG перпендикулярно къ ассимптотѣ AC (фиг. 135) и если начальную скорость тѣла, а также и сопротивленіе при началѣ движенія, представить данною длиною AC, скорость же и сопротивленіе по прошествіи какого-либо времени перемѣнною длиною CD, то время представится площадью $ABGD$, пройденное же въ продолженіе этого времени пространство длиною AD. Ибо, если эта площадь при движеніи точки D будетъ возрастать равномѣрно, подобно времени, то длина DC будетъ убывать въ геометрической прогрессіи подобно скорости, въ томъ же отношеніи убываютъ и части прямой AC описываемыя въ равныя времена [130]).

---

[130]) Написавъ уравненіе (1) примѣчанія 128 въ видѣ

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

и положивъ

$$\frac{k}{m} = n$$

Предложеніе III. Задача I.

Опредѣлить движеніе тѣла движущагося подъ дѣйствіемъ постоянной силы тяжести прямолинейно вверхъ или внизъ, въ однообразной средѣ сопротивляющейся пропорціонально скорости.

Когда тѣло движется вверхъ, пусть сила тяжести представляется даннымъ прямоугольникомъ $BACH$, сопротивленіе среды при началѣ движенія вверхъ прямоугольникомъ $BADE$, взятымъ по другую сторону прямой AB (фиг. 136). Черезъ точку B проводится равнобочная гипербола, имѣющая своими ассимптотами взаимно перпендикулярныя прямыя AC и CH, пересѣкающая перпендикуляры DE и de въ G и g. Тѣло при восходящемъ движеніи въ теченіе времени $DGgd$ опишетъ пространство $EGge$, во время $DGBA$—полную высоту подъема EGB; во время $ABKI$ опишетъ внизъ пространство BFK, во время $KJki$—внизъ пространство $KFfk$. Пропорціо-

---

получаемъ по интегрированіи

$$v = v_0 e^{-nt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

и

$$x = \frac{v_0}{n}(1 - e^{-nt}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Взявъ на чертежѣ (135) точку A за начало координатъ, прямую AC за ось ξ и прямую AB за ось η и обозначая

$$AB = \lambda; \quad AC = a$$

получимъ уравненіе гиперболы BG

$$\eta = \frac{a\lambda}{a - \xi}.$$

Площадь $ABGD$ этой гиперболы будетъ

$$S = a\lambda \log \frac{a}{a - \xi}.$$

Откуда

$$\xi = a(1 - e^{-\frac{S}{a\lambda}}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Сличая формулу (4) съ формулою (3) видно, что стоитъ только брать

$$\frac{S}{a\lambda} = nt \quad \text{и} \quad a = \frac{v_0}{n}$$

то будетъ:

$$x = \xi = AD.$$

На основаніи же формулы (2) будетъ

$$\xi - a = -\frac{v}{n} = DC$$

т.-е. если брать площадь S пропорціонально времени то длина DC будетъ пропорціонально величинѣ скорости и длина AD пройденному пространству.

нальная сопротивленію среды скорость будетъ въ соотвѣтствующіе моменты. *ABED, ABed,* нуль, *ABFI, ABfi*; наконецъ наибольшая скорость, которую тѣло при своемъ паденіи можетъ достичь, будетъ *BACH*.

Если прямоугольникъ *BACH* подраздѣлить на безчисленное множество прямоугольниковъ *Ak, Kl, Lm, Mn* и т. д. (фиг. 137) которые были бы пропорціональны приращеніямъ скорости въ соотвѣтствующіе равные промежутки времени, то площади: 0, *Ak, Al, Am, An* и т. д. будутъ пропорціональны полнымъ скоростямъ, а значитъ по предположенію и сопротивленію среды въ началѣ сказанныхъ равныхъ промежутковъ времени, поэтому отношеніе *AC* къ *AK* или *ABHC* къ *ABkK* будетъ равно отношенію силы тяжести къ сопротивленію при началѣ второго промежутка времени; по отнятіи сопротивленія отъ силы тяжести будутъ оставаться площади *ABHC, KkHC, LlHC, MmHC* и т. д., пропорціональныя тѣмъ силамъ, которыя дѣйствуютъ на тѣло въ началѣ послѣдующихъ промежутковъ времени, слѣдовательно (по II закону) эти площади пропорціональны приращеніямъ скорости, т.-е. прямоугольникамъ *Ak, Kl, Lm, Mn* и т. д. поэтому (лем. I кн. II) онѣ образуютъ геометрическую прогрессію. Вслѣдствіе этого если прямыя *Kk, Ll, Mm, Nn* и т. д. по продолженіи пересѣкаютъ гиперболу въ *q, r, s, t*,... то площади *ABqK, KqrL, LrsM, MstN* и т. д. будутъ между собою равны и значитъ пропорціональны какъ равнымъ промежуткамъ времени, такъ и постоянной силѣ тяжести. Но площадь *ABqK* (сл. 3 лем. VII и лем. VIII, I кн.) относится къ площади *Bkq* какъ *Kq* къ $\frac{1}{2}$ *kq*, т.-е. какъ *AC* къ $\frac{1}{2}$ *AK*, т.-е. какъ сила тяжести къ сопротивленію по срединѣ перваго промежутка времени; на основаніи такого же разсужденія видно, что площади *qKLr, rLMs, sMNt* и т. д. относятся къ площадямъ *qklr, rlms, smnt* и т. д. какъ сила тяжести къ сопротивленію по срединѣ второго, третьяго, четвертаго и т. д. промежутка времени. А такъ какъ равныя площади *BAKq, qKLr, rLMs, SMNt* и т. д. пропорціональны силѣ тяжести, то площади *Bqk, qklr, rlms, smnt* и т. д. будутъ пропорціональны сопротивленіямъ въ моменты по срединѣ послѣдовательныхъ промежутковъ времени, т.-е. (по предположенію) пропорціональны скорости, а значитъ и пройденнымъ пространствамъ. Суммы этихъ пропорціональныхъ величинъ будутъ также между собою пропорціональны, т.-е. площади *Bkq, Blr, Bms, Bnt* и т. д.—полному пройденному пространству, площади же *ABqK, ABrL, ABsM, ABtN*—времени. Слѣдовательно, тѣло при паденіи въ продолженіе какого-либо времени *ABrL* пройдетъ пространство *Blr*, и въ продолженіе времени *LrtN* пространство *rlnt*. Подобнымъ же образомъ доказывается и восходящее движеніе.

Слѣдствіе 1. Слѣдовательно, наибольшая скорость, которую можетъ достигнуть тѣло при паденіи, такъ относится къ скорости достигнутой къ концу какого-либо заданнаго промежутка времени, какъ постоянная сила тяжести дѣйствующая на тѣло относится къ силѣ сопротивленія дѣйствующей въ концѣ этого промежутка времени.

Слѣдствіе 2. Когда время возрастаетъ въ ариѳметической прогрессіи, то сумма этой наибольшей скорости и скорости при движеніи вверхъ и разность ихъ при движеніи внизъ убываютъ въ прогрессіи геометрической.

Слѣдствіе 3. Пространства, описываемые въ равные промежутки времени убываютъ въ той же геометрической прогрессіи.

Слѣдствіе 4. Пространство описанное тѣломъ есть разность двухъ пространствъ, изъ коихъ одно пропорціонально времени протекшему отъ начала паденія, второе же пропорціонально скорости, такъ что при началѣ паденія они между собою равны [131]).

---

[131]) Принявъ точку D (фиг. 136) за начало координатъ прямую DC за ось ξ, прямую DE за ось η и полагая:

$$DA = b;\quad AC = a;\quad DC = a + b = c;\quad AB = \lambda$$

получимъ уравненіе гиперболы GgB:

$$\eta = \frac{a\lambda}{c - \xi}.$$

Площадь ея $DGgd$ будетъ:

$$S = a\lambda \log \frac{c}{c - \xi}$$

откуда

$$c - \xi = ce^{-\frac{s}{a\lambda}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Съ другой стороны, направляя ось z вертикально вверхъ и обозначая черезъ g ускореніе силы тяжести, для движенія тяжелаго тѣла вверхъ имѣемъ уравненіе:

$$m\frac{dv}{dt} = -(mg + kv) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

и начальное условіе: ири $t = 0$ должно быть $v = v_0$, $z = 0$; тогда полагая

$$\frac{k}{m} = n$$

имѣемъ:

$$mg + kv = (mg + kv_0)e^{-nt} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

и затѣмъ замѣнивъ v его величиной $\frac{dz}{dt}$ и интегрируя еще разъ, получимъ:

$$C_1 + mg\,.\,t + kz = -\frac{mg + kv_0}{n}e^{-nt}$$

или на основаніи уравненія (2):

$$C_1 + mg\,.\,t + kz = \frac{mg + kv}{n}.$$

Дѣлая въ этомъ уравненіи

$$t = 0,\ v = v_0 \ \text{и}\ z = 0$$

имѣемъ

$$C_1 = \frac{mg + kv_0}{n}$$

Предложеніе IV. Задача II.

Предполагая, что сила тяжести въ какой-либо средѣ постоянна и направлена перпендикулярно къ горизонтальной плоскости; опредѣлить движеніе брошеннаго въ этой средѣ тѣла, принимая сопротивленіе ея пропорціональнымъ скорости.

Пусть изъ мѣста D (фиг. 138) брошено тѣло по направленію прямой DP, причемъ длина DP представляетъ и начальную его скорость. Изъ точки P на горизонтальную прямую DC опускается перпендикуляръ PC, и DC разсѣкается точкою A такъ, чтобы DA относилось къ AC какъ сопротивленіе происходящее при началѣ отъ движенія по высотѣ къ силѣ тяжести, иначе, что то же самое, чтобы отношеніе $DA \,.\, DP$ къ $AC \,.\, CP$ было равно отношенію полнаго сопротивленія при началѣ движенія къ силѣ тяжести. На ассимптотахъ DC и CP описывается какая-либо гипербола $GTBS$, пересѣкающая перпендикуляры DG, AB въ G и B и дополняется параллелограммъ $DGKC$, коего сторона GK пересѣкаетъ AB въ Q. Длина N берется такъ чтобы было

$$N : QB = DC : CP.$$

По перпендикуляру RT возставленному изъ какой-либо точки R прямой DC и пересѣкающему гиперболу въ T и прямыя EH, GK, DP въ J, t и V берется длина $Vr = \frac{tGT}{N}$ или, что то же самое, длина $Rr = \frac{GTJE}{N}$, тогда брошенное тѣло въ концѣ времени $DRTG$ придетъ въ

и предыдущее уравненіе напишется такъ:

$$kz = m(v_0 - v) - mg \,.\, t$$

или

$$z = \frac{m}{k}(v_0 - v) - \frac{m}{k} g \,.\, t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Уравненіе же (3) можно написать такъ:

$$v_0 - v = \frac{mg + kv_0}{k}(1 - e^{-nt}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3')$$

Сопоставляя уравненіе (3′) съ уравненіемъ (1) написаннымъ такъ:

$$\xi = c\left(1 - e^{-\frac{S}{a\lambda}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1')$$

видимъ, что принявъ длину DA пропорціональной kv_0, AC пропорціональной mg или что тоже считая площадь $EDAB$ пропорціональной kv_0 и площадь $ABHC$ пропорціональной mg, видимъ, что $S = DGdg$ можно принять пропорціональной времени t, длина dA представитъ скорость v и площадь $EGeg$ на основаніи форм. (4) представитъ пройденное пространство. Изъ этихъ формулъ вытекаютъ и всѣ высказанныя слѣдствія.

точку r, описавъ кривую линію $DraF$, на которой эта точка постоянно лежитъ, причемъ наибольшей высоты оно достигаетъ въ a на перпендикулярѣ AB, послѣ чего оно ассимптотически приближается къ PC. Вмѣстѣ съ тѣмъ скорость его въ любой точкѣ r пропорціональна [132]) касательной rL.

Дѣйствительно:

$$N : QB = DC : CP = DR : RV$$

слѣдовательно

$$RV = \frac{DR \,.\, QB}{N}$$

и

$$Rr = RV - Vr = \frac{DR \,.\, QB - tGT}{N} = \frac{DR \,.\, AB - RDGT}{N}.$$

---

[132]) Рѣшеніе этой задачи основано на двухъ предыдущихъ, причемъ движеніе точки разлагается на движеніе по горизонтальной оси (по дальности) и по вертикальной (по высотѣ). На основаніи теоремы I, обозначая черезъ v_1 проекцію начальной скорости на ось x и черезъ v_x проекцію скорости въ какой-либо моментъ на ту же ось имѣемъ (пр. 128)

$$mv_x + kx = mv_1$$

или

$$x + \frac{m}{k} v_x = \frac{m}{k} v_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

и въ силу уравненія (3, прим. 128) для наибольшей дальности

$$X = \frac{m}{k} v_1$$

За величину X Ньютонъ беретъ на (черт. 138) длину DC, а такъ какъ эта же величина представляетъ и горизонтальную проекцію начальной скорости то значитъ длины:

$$DP = \frac{m}{k} v_0; \quad CP = \frac{m}{k} v_2$$

гдѣ черезъ v_0 обозначена начальная скорость и черезъ v_2 ея вертикальная проекція.

Уравненіе (1) показываетъ, что длина

$$RC = \frac{m}{k} v_x$$

т.-е. представляетъ v_x, значитъ отрѣзокъ касательной rL представляетъ скорость v, когда точка находится въ r.

Въ выраженія самихъ координатъ движущейся точки входятъ показательныя функціи времени, которыя Ньютонъ представляетъ, какъ уже указано, зависимостью между координатами точекъ гиперболы и площадью заключенной между гиперболою и ея ассимптотою.

За эту вспомогательную гиперболу Ньютонъ беретъ здѣсь такую, у которой одною ассимптотою служитъ ось x-овъ другою прямою PC т.-е. ассимптота траекторіи движущейся точки, и время представляетъ площадью $RDGT$ этой гиперболы, которая при разсмотрѣніи движенія по высотѣ и играетъ ту же роль какъ гипербола $GgBKk$ на черт. 136 при рѣшеніи задачи 1.

Пусть время представляется площадью $RDGT$, движенiе же тѣла разлагается (по сл. 2-му зак.) на два — вертикальное и горизонтальное; такъ какъ сопротивленiе пропорцiонально скорости, то и оно разлагается на двѣ составляющихъ соотвѣтственно пропорцiональныхъ, и противоположныхъ по направленiю скоростямъ этихъ двухъ составляющихъ движенiй, такимъ образомъ путь пройденный тѣломъ горизонтально (по пр. II кн. II) пропорцiоналенъ длинѣ DR, высота же (по III пред.) пропорцiональна площади $DR \,.\, AB - RDGT$, т.-е. длинѣ Rr.

При самомъ началѣ движенiя площадь $RDGT$ равна $DR \,.\, AQ$, поэтому длина

$$Rr = \frac{DR \,.\, AB - DR \,.\, AQ}{N} = \frac{DR}{N} \,.\, (AB - AQ) = \frac{DR}{N} \,.\, QB$$

т.-е.

$$Rr : DR = QB : N = CP : DC$$

т.-е. какъ вертикальная составляющая начальной скорости къ горизонтальной. Такъ какъ Rr постоянно пропорцiонально пройденному пути по высотѣ и DR—пройденному пути по дальности и при началѣ движенiя Rr относится къ DR какъ путь проходимый по высотѣ къ пути проходимому по дальности, то, чтобы и во все время движенiя Rr находилось къ DR въ этомъ отношенiи, т.-е. какъ высота къ дальности, необходимо, чтобы тѣло двигалось по кривой $DraF$, на которой постоянно лежитъ точка r.

Слѣдствiе 1. Такъ какъ

$$Rr = \frac{DR \,.\, AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$$

то если продолжить RT до X такъ, чтобы было

$$RX = \frac{DR \,.\, AB}{N}$$

т.-е. если дополнивъ параллелограммъ $ACPY$, соединить DY, которая пересѣкаетъ CP въ Z и продолжить RT до встрѣчи съ DY въ X, то будетъ

$$Xr = \frac{RDGT}{N}$$

т.-е. эта длина пропорцiональна времени.

Слѣдствiе 2. Поэтому если брать безчисленное множество абсциссъ CR, или что тоже ZX въ геометрической прогрессiи, то всѣ Xr будутъ въ прогрессiи ариѳметической и такимъ образомъ кривая $DraF$ легко строится при помощи таблицы логариѳмовъ [133]).

---

[133]) Координаты x и z точки r траекторiи при избранныхъ осяхъ (DC за ось x-овъ и DH за ось z-въ) выражается формулами:

Слѣдствіе 3. Если при вершинѣ D и діаметрѣ DG, продолженномъ внизъ построить такую параболу, коей параметръ такъ относился бы

$$DR = x = m\frac{v_1}{k}(1 - e^{-nt}) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$Rr = z = \frac{m}{k} \cdot \frac{mg + kv_2}{k}(1 - e^{-nt}) - \frac{m}{k}gt \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Уравненіе же вспомогательной гиперболы

$$\eta = \frac{b\lambda}{a - \xi}$$

гдѣ

$$a = DC; \quad b = AC; \quad \lambda = AB.$$

Площадь $S = RDGT$ этой гиперболы. будетъ

$$S = b\lambda \log\frac{a}{a - \xi}$$

отсюда

$$\xi = a(1 - e^{-\frac{S}{b\lambda}}) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Сопоставляя это уравненіе съ уравненіемъ (1) видимъ, что взявъ

$$a = \frac{m}{k}v_1 \quad \text{и} \quad nt = \frac{S}{b\lambda}$$

иначе

$$t = \frac{1}{n} \cdot \frac{S}{b\lambda} = \frac{m}{k} \cdot \frac{S}{b\lambda}$$

будетъ:

$$x = \xi.$$

По уравненію вспомогательной гиперболы

$$DG = \frac{b\lambda}{a}$$

значитъ

$$QB = \frac{a - b}{a} \cdot \lambda$$

и

$$N = \frac{QB \cdot DC}{CP} = \frac{a - b}{a} \cdot \lambda \cdot \frac{v_1}{v_2}.$$

Но по условію построенія чертежа:

$$(a - b) : b = kv_2 : mg$$

слѣдовательно,

$$(a - b) : a = kv_2 : (mg + kv_2)$$

и

$$N = \frac{kv_1}{mg + kv_2} \cdot \lambda$$

и формула

$$Rr = \frac{DR \cdot AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$$

къ $2DP$ какъ полное сопротивленіе при началѣ движенія относится къ силѣ тяжести, то скорость съ которою тѣло должно быть брошено по направленію DP, чтобы въ однородно сопротивляющейся средѣ описывать кривую $DraF$ есть та самая, съ которою оно должно бы быть брошено чтобы описывать сказанную параболу.

Ибо при самомъ началѣ движеніи параметръ этой параболы, соотвѣтствующій начальной точкѣ D, равенъ $\frac{DV^2}{Vr}$, при этомъ

$$Vr = \frac{tGT}{N} = \frac{DR\,.\,Tt}{2N}.$$

Но если провести къ гиперболѣ GTS касательную въ точкѣ G, то она будетъ параллельна прямой DK, слѣдовательно будетъ

$$tT = \frac{CK\,.\,DR}{DC}$$

но было

$$N = \frac{QB\,.\,DC}{CP}$$

на основаніи равенствъ

$$\frac{DR\,.\,AB}{N} = \frac{x}{v_1}\cdot\frac{kv_2 + mg}{k}$$

$$\frac{RDGT}{N} = \frac{S}{N} = \frac{kb\lambda}{m}\cdot\frac{a}{b-a}\cdot\frac{v_2}{\lambda v_1}\cdot t = \frac{a}{v_1}gt = \frac{mg}{k}\cdot t$$

принимаетъ видъ:

$$z = \frac{kv_2 + mg}{k}\cdot\frac{x}{v_1} - \frac{mg}{k}t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

что равносильно формулѣ (2).

Для вычисленія по форм. (1) и (2) и равносильнымъ имъ (4) и (5) необходимо знать величину

$$n = \frac{k}{m} = \frac{g}{v_0}\cdot\frac{kv_0}{mg},$$

но kv_0 есть сила сопротивленія при началѣ движенія, mg вѣсъ тѣла, отношеніе же $\frac{v_0}{g}$ Ньютонъ выражаетъ въ слѣд. 3 этого предложенія черезъ параметръ параболы описываемой тѣломъ при движеніи въ пустотѣ.

Представленіе показательной функціи въ видѣ координатъ точки гиперболы въ зависимости отъ площади заключенной между этою кривою, ея ассимптотою, постоянной ординатой и перемѣнной встрѣчается въ дальнѣйшемъ много разъ и на немъ мы болѣе останавливаться не будемъ, отсылая къ этому примѣчанію. Обративъ вниманіе на заключительныя слова слѣдствія 2: «такимъ образомъ кривая $DraF$ легко строится при помощи таблицы логариѳмовъ», нетрудно придти къ выводу, что геометрическое представленіе служило Ньютону лишь средствомъ разсужденія, для практическихъ же примѣненій полученный окончательный результатъ представлялся аналитически или же выражался числами.

поэтому

$$Vr = \frac{DR^2 . CK . CP}{2DC^2 . QB}$$

а такъ какъ

$$DR : DC = DV : DP$$

то будетъ

$$Vr = \frac{DV^2 . CK . CP}{2DP^2 . QB}$$

и, слѣдовательно, получится

$$\frac{DV^2}{Vr} = \frac{2DP^2 . QB}{CK . CP} = \frac{2DP^2 . DA}{AC . CP}$$

ибо

$$QB : CK = DA : AC.$$

Отсюда слѣдуетъ, что параметръ такъ относится къ $2DP$ какъ $DP . DA$ къ $CP . AC$, т.-е. какъ сопротивленіе къ силѣ тяжести [134]).

Слѣдствіе 4. Слѣдовательно, если тѣло брошено по направленію какой-либо данной по положенію прямой DP съ заданною скоростью и сопротивленіе среды при началѣ движенія извѣстно, то можетъ быть найдена и описываемая тѣломъ кривая $DraF$. Ибо, по заданной скорости находится, какъ извѣстно, параметръ параболы, если затѣмъ взять $2DP$ въ такомъ отношеніи къ этому параметру, какъ сила тяжести къ силѣ сопротивленія, то найдется DP; послѣ того если разсѣчь прямую DC въ точкѣ A такъ, чтобы отношеніе $CP . AC$ къ $DP . AD$ было равно тому же отношенію силы тяжести къ сопротивленію, то получится точка A и значитъ кривая $DraF$ опредѣлится.

---

[134]) Принимая на время касательную DP въ начальной точкѣ за ось x и проходящую черезъ точку D отвѣсную линію за ось y, и обозначая по прежнему начальную скорость черезъ v_0, получимъ уравненія движенія тяжелаго тѣла въ пустотѣ:

$$x = v_0 t; \quad y = \frac{1}{2} g t^2,$$

слѣдовательно, уравненіе описываемой имъ параболы есть

$$x^2 = \frac{2v_0^2}{g} . y$$

такъ, что параметръ q этой параболы, относящійся къ вершинѣ D есть:

$$q = \frac{2v_0^2}{g}.$$

Но на чертежѣ 138, какъ указано въ прим. 132,

$$DP = \frac{m}{k} . v_0 = \frac{mg}{kv_0} . \frac{v_0^2}{g}$$

значитъ

$$\frac{2DP}{q} = \frac{mg}{kv_0} = \frac{\text{вѣсъ тѣла}}{\text{сопротив. при началѣ}}.$$

Слѣдствіе 5. Наоборотъ, когда извѣстна кривая $DraF$, то можетъ быть опредѣлено и сопротивленіе среды и скорость тѣла въ отдѣльныхъ точкахъ r. Ибо, по извѣстному отношенію $\frac{CP.AC}{DP.AD}$ найдется какъ сопротивленіе среды при началѣ, такъ и параметръ параболы, а слѣдовательно и начальная скорость. Затѣмъ по извѣстной длинѣ касательной rL найдется и пропорціональная ей скорость въ точкѣ r и пропорціональное этой скорости сопротивленіе.

Слѣдствіе 6. Такъ какъ длина $2DP$ относится къ параметру параболы какъ сила тяжести къ сопротивленію въ точкѣ D и при увеличеніи скорости сопротивленіе возрастаетъ въ такомъ же отношеніи какъ и скорость, параметръ же какъ квадратъ скорости, то длина $2DP$ будетъ возрастать пропорціонально скорости и значитъ не зависитъ отъ угла CDP и не измѣняется при измѣненіяхъ его, а лишь при измѣненіи скорости.

Слѣдствіе 7. Отсюда вытекаетъ способъ приближеннаго опредѣленія кривой $DraF$ изъ опыта, а слѣдовательно, нахожденія сопротивленія и скорости, съ которою тѣло брошено. Слѣдуетъ бросить два равныхъ и подобныхъ тѣла изъ точки D (фиг. 139) подъ разными углами CDP и CDp и замѣтить мѣста F и f ихъ паденія на горизонтальную плоскость CD; взявъ затѣмъ какую-либо длину за DP или Dp, принимаютъ что сопротивленіе въ D находится въ какомъ-либо отношеніи къ силѣ тяжести, пусть длина SM представляетъ это отношеніе. Послѣ этого по принятой величинѣ DP вычисленіемъ находятся длины DF и Df и изъ найденнаго по вычисленію отношенія $\frac{Ff}{DF}$ вычитается тоже отношеніе найденное по опыту и разность ихъ представляется ординатою MN. То же самое дѣлается вторично и въ третій разъ принимая постоянно новыя значенія за величину отношенія тяжести къ сопротивленію и выводя новое значенія разности MN. Положительныя разности откладываются при этомъ по одну сторону прямой SM, отрицательныя по другую, черезъ точки N, N, N,.. проводится правильная кривая NNN, пересѣкающая прямую $SMMM$ въ X, тогда SX и представитъ величину отношенія сопротивленія къ тяжести, которое и требовалось опредѣлить. По этому отношенію выводится при помощи вычисленія длина DF. Длина такъ относящаяся къ принятой DP, какъ длина DF найденная изъ опыта къ длинѣ DF опредѣленной по разсчету и будетъ истинной величиною DP. Послѣ того, какъ эта величина найдена получится какъ кривая $DraF$ описываемая тѣломъ, такъ и его скорость и сопротивленіе въ отдѣльныхъ ея точкахъ [135]).

---

[135]) Въ этомъ слѣдствіи Ньютонъ описываетъ пріемъ графическаго рѣшенія сложнаго уравненія, которое онъ не находитъ нужнымъ даже и составлять; къ такому графическому пріему онъ прибѣгаетъ и въ другихъ мѣстахъ своихъ «Началъ». Сопоставляя сказанное здѣсь съ поученіемъ въ концѣ Отдѣла VI кн. 1-й а также съ предложеніемъ XLII книги 3-й, нетрудно видѣть, что полученіе корня съ любою степенью точности выпол-

Поученіе.

Впрочемъ предположеніе, что сопротивленіе пропорціонально скорости болѣе математическое, нежели соотвѣтствующее природѣ. Въ срединахъ совершенно лишенныхъ твердости сопротивленія тѣламъ пропорціональны квадратамъ скорости, ибо дѣйствіемъ болѣе быстро движущагося тѣла тому же количеству среды, во время во столько разъ меньшее во сколько скорость больше, сообщается во столько-же разъ бо̀льшее количество движенія, слѣдовательно въ равныя времена, вслѣдствіе большаго количества возмущаемой среды, сообщится количество движенія пропорціонельное квадрату скорости, сопротивленіе же (по II и III зак. движ.) пропорціонально сообщаемому количеству движенія. Поэтому разсмотримъ какія происходятъ движенія при такомъ законѣ сопротивленія.

ОТДѢЛЪ II.

О движеніи тѣлъ при сопротивленіи пропорціональномъ второй степени скорости.

Предложеніе V. Теорема III.

Если тѣло, испытывая сопротивленіе пропорціональное квадрату скорости, движется по инерціи въ однородной средѣ, и взяты возрастающіе въ геометрической прогрессіи промежутки времени, то скорости въ началѣ каждаго промежутка составятъ такую же, но убывающую прогрессію, пройденныя же въ продолженіе каждаго промежутка пространства будутъ между собою равны.

Такъ какъ сопротивленіе пропорціонально квадрату скорости, уменьшеніе же скорости пропорціонально сопротивленію, то при подраздѣленіи времени на безчисленное множество равныхъ промежутковъ, квадраты скорости въ началѣ каждаго изъ этихъ промежутковъ будутъ пропорціональны разностямъ самихъ скоростей. Пусть сказанные весьма малые промежутки времени представляются отрѣзками AK, KL, LM и т. д. (фиг. 140) откладываемыми на прямой CD и пусть проведены ординаты AB, Kk, Ll,

---

нялось Ньютономъ по тому способу, который и теперь носитъ его имя. Замѣтимъ также, что Ньютонъ считаетъ очевиднымъ, что если частныя значенія непрерывной функціи при двухъ частныхъ значеніяхъ перемѣнной независимой имѣютъ разные знаки, то эта функція при нѣкоторомъ промежуточномъ частномъ значеніи перемѣнной обращается въ ноль.

Mm... точекъ *B*, *k*, *l*, *m*.... гиперболы *BklmG*, имѣющей своими ассимптотами *CH* и *CD* и центромъ точку *C*, тогда будетъ:

$$AB : Kk = CK : CA$$

значитъ:

$$(AB - Kk) : Kk = AK : CA$$

слѣдовательно:

$$(AB - Kk) : AK = Kk : CA = AB \,.\, Kk : AB \,.\, CA$$

Но такъ какъ *AK* задано и произведеніе $AB \,.\, CA$ постоянное, то *AB—Kk* пропорціонально произведенію $AB \,.\, Kk$ т.-е. въ предѣлѣ, когда точки *B* и *K* совпадаютъ, пропорціонально AB^2.

На основаніи подобнаго же разсужденія $Kk - Ll$, $Ll - Mm$ и т. д. будутъ пропорціональны Kk^2, Ll^2 и т. д. Такимъ образомъ разности длинъ *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm* и т. д. пропорціональны квадратамъ этихъ длинъ, а такъ какъ и разности скоростей также пропорціональны квадратамъ самихъ скоростей, то для обѣихъ величинъ прогрессія [136]) одинакова изъ чего слѣдуетъ, что и площади описываемыя сказанными длинами находятся въ прогрессіи подобной съ пространствами проходимыми вслѣдствіе упомянутыхъ скоростей. Поэтому если скорость въ началѣ перваго промежутка времени *AK* представить длиною *AB*, скорость въ началѣ второго *KL* длиною *Kk*, и пространство, пройденное въ теченіе перваго промежутка площадью *AKkB*, то всѣ послѣдующія скорости представятся послѣдующими длинами *Ll*, *Mm*,... и пройденныя пространства площадями *Kl*, *Lm* и т. д. Сложивъ, получимъ, что если полное протекшее время представляется суммою *AM* частныхъ его промежутковъ, то полное пройденное пространство представится полною площадью *AMmB*, составляющею сумму частныхъ площадокъ. Вообрази теперь, что время *AM* подраздѣлено на промежутки *AK*, *KL*, *LM* и т. д. такъ, что *CA*, *CK*, *CL*, *CM* и т. д. образуютъ геометрическую прогрессію, то и эти промежутки составятъ такую же прогрессію, скорости *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm* и т. д. составятъ тогда такую же обратную прогрессію, пройденныя же пространства *Ak*, *Kl*, *Lm* будутъ между собою равны.

Слѣдствіе 1. Отсюда слѣдуетъ, что если время представить отрѣзкомъ *AD* ассимптоты и начальную скорость ординатою *AB*, то скорость въ концѣ этого времени представится ординатою *DG*, пройденное же пространство прилегающею къ нимъ гиперболическою площадью *ABGD*, вмѣстѣ съ тѣмъ пространство описываемое, тѣломъ въ тоже время при движеніи съ начальною скоростью *AB* въ средѣ не сопротивляющейся представляется прямоугольникомъ $AB \,.\, AD$.

---

[136]) Здѣсь подъ словомъ «прогрессія» Ньютонъ разумѣетъ «законъ измѣняемости» вообще.

Слѣдствіе 2. Поэтому пространство, проходимое въ сопротивляющейся средѣ, опредѣляется взявъ его къ пространству, которое тѣло прошло бы съ постоянною скоростью AB въ средѣ несопротивляющейся въ отношеніи [137]) гиперболической площади $ABGD$ къ прямоугольнику $AB \cdot AD$.

---

[137]) Предполагая, что движеніе происходитъ по оси x, и обозначая черезъ m массу движущагося тѣла, черезъ $v = \frac{dx}{dt}$ его скорость, черезъ k коеффиціентъ сопротивленія и черезъ v_0 начальную скорость, имѣемъ уравненіе движенія:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

откуда, полагая

$$\frac{k}{m} = n,$$

слѣдуетъ:

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = nt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Принимая на фиг. 140 точку A за начало координатъ, прямую AD за ось ξ и прямую AB за ось η и обозначая:

$$AC = a; \quad AB = \lambda = \eta_0; \quad AD = \xi; \quad DG = \eta$$

получимъ уравненіе гиперболы $BklmG$:

$$\eta = \frac{a\lambda}{a+\xi}$$

откуда:

$$\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta_0} = \frac{1}{a\lambda} \cdot \xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Уравненія (2) и (3) показываютъ, что если брать

$$\frac{1}{a\lambda}\xi = nt$$

и

$$\eta_0 = v_0 = \lambda$$

то будетъ:

$$\eta = v.$$

Изъ уравненія (2) слѣдуетъ:

$$\frac{v_0 dt}{nv_0 t + 1} = dx$$

откуда имѣемъ:

$$\log(nv_0 t + 1) = nx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Съ другой стороны площадь $S = ABGD$ выражается формулою:

$$\frac{S}{a\lambda} = \log\left(\frac{\xi}{a} + 1\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Сопоставляя эту формулу съ формулою (4) видимъ, что если брать

$$\xi = anv_0 t = an\lambda t$$

Слѣдствіе 3. Сопротивленіе среды опредѣляется, полагая, что при началѣ движенія оно равно такой постоянной центростремительной силѣ, которая могла бы сообщить падающему въ средѣ безъ сопротивленія тѣлу въ продолженіе времени AC скорость AB. Ибо, если провести касательную BT къ гиперболѣ въ точкѣ B, то отрѣзокъ AT ассимптоты будетъ равенъ AC и представитъ время, въ теченіе котораго постоянное сопротивленіе равное начальному можетъ уничтожить скорость AB.

Слѣдствіе 4. Такимъ образомъ можетъ быть опредѣлено отношеніе силы сопротивленія къ силѣ тяжести или къ какой-либо иной заданной центростремительной силѣ.

Слѣдствіе 5. Обратно если извѣстно отношеніе сопротивленія къ какой-либо заданной центростремительной силѣ, то опредѣляется время AC, въ продолженіе котораго эта центростремительная сила можетъ произвести заданную скорость AB; слѣдовательно будетъ извѣстна точка B, черезъ которую должна проходить гипербола, имѣющая ассимптоты CH и CD, значитъ найдется и пространство $ABCD$, проходимое въ средѣ съ такимъ сопротивленіемъ въ продолженіи времени AD тѣломъ начинающимъ свое движеніе со скоростью AB.

Предложеніе VI. Теорема IV.

Равные и однородные шары, встрѣчающіе сопротивленіе пропорціональное квадрату скорости и движущіеся лишь по инерціи, описываютъ въ продолженіе промежутковъ времени, обратно пропорціональныхъ ихъ

то будетъ:

$$x = \frac{S}{an\lambda}.$$

Обозначимъ черезъ A площадь прямоугольника $AB \cdot AD$; такъ какъ

$$AB = \lambda = v_0 \quad \text{и} \quad AD = \xi = an\lambda t$$

то

$$A = v_0 \cdot an\lambda t;$$

съ другой стороны пространство h проходимое въ продолженіе времени t при равномѣрномъ движеніи со скоростью v_0 равно $v_0 t$, значитъ

$$A = an\lambda h,$$

и слѣдовательно:

$$x : h = S : A$$

т.-е. когда пространство x проходимое въ сопротивляющейся средѣ изображается площадью S, то въ средѣ не сопротивляющейся при той же начальной скорости въ то же время было бы пройдено пространство, изображаемое площадью A.

начальнымъ скоростямъ, равныя пространства и теряютъ равныя доли отъ полныхъ своихъ скоростей.

Пусть начальныя скорости представляются ординатами AB, DE (фиг. 141), времена абсциссами Aa, Dd точекъ B, b, E, e какой-либо гиперболы [138]) $BbEe$ имѣющей взаимно перпендикулярныя ассимптоты CD, CH. Такъ какъ по предположенію

$$Aa : Dd = DE : AB,$$

по свойству же гиперболы

$$DE : AB = CA : CD,$$

то будетъ:

$$(CA + Aa) : (CD + Dd) = Ca : Cd = CA : CD = DE : AB$$

слѣдовательно площади $ABba$ и $DEed$ т.-е. пройденныя пространства равны

---

[138]) Такъ какъ по условію теоремы оба шара равны и одинаковой массы и движутся въ той же самой средѣ, то для нихъ величина n (см. пр. 136) одна и та же, слѣдовательно, для представленія ихъ движенія можетъ служить таже же самая гипербола.

Обозначимъ черезъ v_0 и V_0 начальныя скорости шаровъ и черезъ v и V ихъ скорости по прошествіи времени t. На основаніи урав. (2) прим. 137 будемъ имѣть

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = nt \quad \text{и} \quad \frac{1}{V} - \frac{1}{V_0} = nt. \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

причемъ, такъ какъ шары равны между собою по размѣрамъ и по массѣ и движутся въ той же самой средѣ, величина n для обоихъ одна и та же.

Уравненія (1) можно написать такъ

$$\frac{v_0 - v}{v} = nv_0t \quad \text{и} \quad \frac{V_0 - V}{V} = nV_0t \; \ldots \ldots \quad (2)$$

поэтому, если взять промежутки времени t_1 и t_2 такъ, чтобы было

$$v_0t_1 = V_0t_2 \; \ldots \ldots \quad (3)$$

т.-е. обратно пропорціональные начальнымъ скоростямъ, то будетъ:

$$\frac{v_0 - v}{v} = \frac{V_0 - V}{V} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

т.-е. утраты скорости въ продолженіе этихъ промежутковъ будутъ пропорціональны скоростямъ, остающимся къ концу ихъ.

Пройденныя пространства x и X по ур. 4 пр. 137 выражаются формулами

$$x = \log(nv_0t + 1) \quad \text{и} \quad X = \log(nV_0t + 1) \; \ldots \ldots \quad (5)$$

очевидно, что къ концу промежутковъ времени t_1 и t_2 обратно пропорціональныхъ v_0 и V_0, эти пространства между собою равны.

между собою, и начальныя скорости AB и DE пропорціональны окончательнымъ ab, de, а слѣдовательно и ихъ потеряннымъ частямъ $AB - ab$ и $DE - de$.

Предложеніе VII. Теорема V.

Шаровыя тѣла, испытывающія сопротивленіе пропорціональное квадрату скорости утрачиваютъ въ промежутки времени, прямо пропорціональные начальнымъ количествамъ движенія и обратно пропорціональные начальнымъ величинамъ сопротивленія, равныя доли своихъ начальныхъ количествъ движенія и описываютъ пространства, пропорціональныя этимъ промежуткамъ времени и начальнымъ скоростямъ.

Утрачиваемыя части количества движенія пропорціональны сопротивленію и времени; чтобы эти части были пропорціональны своимъ цѣлымъ, произведеніе сопротивленія на время должно быть пропорціонально количеству движенія, значитъ время прямо пропорціонально количеству движенія и обратно пропорціонально сопротивленію. Поэтому, если брать весьма малые послѣдовательные промежутки времени, находящіеся въ такомъ отношеніи, то тѣла будутъ утрачивать одинаковыя доли своихъ полныхъ количествъ движенія въ продолженіе каждаго такого промежутка, слѣдовательно, будутъ обладать остающимися скоростями, составляющими одинаковыя доли отъ начальныхъ ихъ скоростей; такъ какъ отношеніе скоростей послѣ этого будетъ оставаться постояннымъ, то описываемыя пространства будутъ пропорціональны начальнымъ скоростямъ и времени.

Слѣдствіе 1. Если сопротивленія, испытываемыя тѣлами при равныхъ скоростяхъ, пропорціональны квадратамъ діаметровъ, то шары одной и той-же плотности, двигаясь съ какими-угодно скоростями при прохожденіи пространствъ, пропорціональныхъ своимъ діаметрамъ, утрачиваютъ одинаковыя доли своего начальнаго количества движенія. Ибо количество движенія какого-либо шара пропорціонально его скорости и массѣ, т.-е. скорости и кубу діаметра, по предположенію же сопротивленіе пропорціонально квадрату діаметра и скорости, на основаніи доказанной теоремы время пропорціонально количеству движенія и обратно пропорціонально сопротивленію, т.-е. оно прямо пропорціонально діаметру и обратно пропорціонально скорости, поэтому пространство, которое пропорціонально скорости и времени, пропорціонально діаметру.

Слѣдствіе 2. Если тѣла при равныхъ скоростяхъ испытываютъ сопротивленія, находящіяся въ полукубическомъ отношеніи діаметровъ, то шары одной и той-же плотности при движеніи съ какими-угодно скоростями утрачиваютъ одинаковыя доли своего начальнаго количества движенія при прохожденіи пространствъ, находящихся въ полукубическомъ-же отношеніи діаметровъ.

Слѣдствіе 3. Вообще, если тѣла при равныхъ скоростяхъ испытываютъ сопротивленія, пропорціональныя какой-либо степени n діаметровъ, то пространства, при прохожденіи которыхъ шары одной и той-же плотности двигаясь съ любыми скоростями, утрачиваютъ одинаковыя доли своихъ полныхъ количествъ движенія, будутъ пропорціональны степени $3—n$ діаметровъ. Пусть діаметры суть D и E, и сопротивленія, когда скорости равны, пропорціональны D^n и E^n, — пространства, при прохожденіи коихъ шары, двигающіеся съ какими-угодно скоростями, утрачиваютъ одинаковыя доли своихъ полныхъ количествъ движенія, пропорціональны D^{3-n} и E^{3-n}; такимъ образомъ шары одной и той-же плотности, пройдя пространства, относящіяся какъ D^{3-n} къ E^{3-n} будутъ обладать скоростями, находящимися въ такомъ же отношеніи, какъ и при началѣ движенія.

Слѣдствіе 4. Если же шары не одной и той же плотности, то пространство, проходимое шаромъ болѣе плотнымъ, надо увеличить въ отношеніи плотностей, ибо количества движенія при одинаковыхъ скоростяхъ пропорціональны плотностямъ, поэтому время по доказанной теоремѣ возрастетъ пропорціонально количеству движенія, пройденное же пространство—пропорціонально времени.

Слѣдствіе 5. Когда шары движутся въ различныхъ средахъ, то пространство для среды болѣе сопротивляющейся должно быть уменьшено пропорціонально этому бо̀льшему сопротивленію; по доказанной теоремѣ время уменьшится въ этомъ же отношеніи, и пространство уменьшится пропорціонально времени.

Лемма II.

Моментъ произведенія равенъ суммѣ моментовъ отдѣльныхъ производителей умноженнымъ на показатели ихъ степеней и коэффиціенты.

Я называю «произведеніемъ» вообще всякое количество, которое въ ариѳметикѣ происходитъ отъ умноженія, дѣленія и извлеченія корней изъ отдѣльныхъ его сомножителей, въ геометріи-же оно образуется нахожденіемъ объемовъ, площадей, сторонъ, крайнихъ и среднихъ пропорціональныхъ, не дѣлая сложенія и вычитанія. Къ такого рода количествамъ относятся: произведенія, частныя, корни, прямоугольники, квадраты, кубы, стороны квадратовъ и кубовъ и тому подобныя.

Я разсматриваю здѣсь эти количества какъ неопредѣленныя и измѣняющіяся, и какъ бы возрастающія или убывающія отъ постояннаго движенія или теченія, и ихъ мгновенныя приращенія или уменьшенія разумѣю подъ словомъ *моменты,* такъ что приращенія почитаются за положительные или прибавляемые моменты, уменьшенія за вычитаемыя или за отрицательныя. Но озаботься, чтобы не принимать за таковые конечныхъ частицъ. Конечныя частицы не суть моменты, но сами суть количества изъ моментовъ происходящія. Надо подразумѣть, что это суть лишь едва-едва зарождающіяся начала конечныхъ величинъ. Поэтому въ этой

леммѣ никогда и не разсматриваются величины моментовъ, но лишь ихъ начальныя отношенія. То же самое получится, если вмѣсто моментовъ брать или скорости увеличеній или уменьшеній [которыя поэтому можно называть движеніями, измѣненіями или потоками (флюксіями) количествъ] или же какія-угодно конечныя количества этимъ скоростямъ пропорціональныя. Коэффиціентъ же при какой-либо перемѣнной есть количество, получаемое отъ раздѣленія произведенія на эту перемѣнную.

Такимъ образомъ смыслъ леммы тотъ, что если моменты какихъ-либо возрастающихъ или убывающихъ непрерывнымъ теченіемъ количествъ A, B, C и т. д. суть a, b, c и т. д., то моментъ произведеннаго прямоугольника AB есть $aB+bA$, моментъ же произведеннаго объема ABC есть $aBC+bAC+cAB$; моменты произведенныхъ степеней: A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2} и $A^{-\frac{1}{2}}$ соотвѣтственно будутъ: $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$.

Вообще моментъ какой-либо степени $A^{\frac{n}{m}}$ будетъ $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Точно также для произведенія A^2B моментъ будетъ $2aAB+bA^2$, для произведенія $A^3B^4C^2$ моментъ равенъ $3aA^2B^4C^2+4bA^3B^3C^2+2cA^3B^4C$ и для произведенія $\frac{A^3}{B^2}$ или A^3B^{-2} моментъ есть $3aA^2B^{-2}-2bA^3B^{-3}$ и т. д.

Доказывается эта лемма слѣдующимъ образомъ.

Случай 1. Пусть какой-либо возрастающій непрерывнымъ движеніемъ прямоугольникъ AB, когда до сторонъ A и B нехватало по половинѣ ихъ моментовъ $\frac{1}{2}a$ и $\frac{1}{2}b$, былъ

$$\left(A-\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(B-\frac{1}{2}b\right)$$

т.-е.

$$AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab,$$

послѣ же того, какъ стороны увеличились на вторую половину своихъ моментовъ, прямоугольникъ сталъ

$$\left(A+\frac{1}{2}a\right)\left(B+\frac{1}{2}b\right)$$

т.-е.

$$AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab;$$

по вычитаніи изъ этого прямоугольника предыдущаго получается избытокъ $aB+bA$. Слѣдовательно, отъ приращеній сторонъ a и b образуется приращеніе прямоугольника $aB+bA$.

Случай 2. Если положить $AB=G$, то по доказанному въ сл. 1 для объема ABC или GC моментъ будетъ равенъ $gC+Gc$, замѣнивъ G и g

ихъ величинами AB и $aB+bA$ получимъ $aBC+bAC+cAB$, что относится до объема съ какими-угодно сторонами.

Случай 3. Если предположить, что стороны A, B, C между собою равны, тогда моментъ A^2, т.-е. прямоугольника AB, будетъ $aB+bA= =2aA$ и моментъ A^3, т.-е. объема ABC, который былъ $aBC+bAC+cAB$ обратится въ $3aA^2$. На основаніи такого же разсужденія моментъ какой-угодно степени A^n будетъ naA^{n-1}.

Случай 4. Такъ какъ $\frac{1}{A} \cdot A=1$, то моментъ $\frac{1}{A}$ умноженный на A плюсъ $\frac{1}{A}$ умноженное на a будетъ равенъ моменту 1, т.-е. нулю, поэтому моментъ $\frac{1}{A}$ или что то же моментъ A^{-1} будетъ равенъ $-\frac{a}{A^2}$. Вообще, такъ какъ $\frac{1}{A^n} \cdot A^n=1$, то моментъ A^n умноженный на A^n плюсъ naA^{n-1} умноженное на $\frac{1}{A^n}$ равно нулю, поэтому моментъ $\frac{1}{A^n}$ или A^{-n} будетъ $-\frac{na}{A^{n+1}}$.

Случай 5. Такъ какъ $A^{\frac{1}{2}} \cdot A^{\frac{1}{2}}=A$, то моментъ $A^{\frac{1}{2}}$ умноженный на $2A^{\frac{1}{2}}$ будетъ равенъ a (по доказанному въ случаѣ 3), слѣдовательно моментъ самого $A^{\frac{1}{2}}$ будетъ $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$. Вообще, если положить $A^{\frac{m}{n}}= =B$, то будетъ $A^m=B^n$, слѣдовательно $maA^{m-1}=nbB^{n-1}$ или $maA^{-1}= =nbB^{-1}=nbA^{-\frac{m}{n}}$, значитъ $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}=b$, т.-е. равно моменту $A^{\frac{m}{n}}$.

Случай 6. Слѣдовательно, моментъ какого-угодно произведенія A^mB^n равенъ моменту A^m умноженному на B^n плюсъ моментъ B^n умноженный на A^m, т.-е. $maA^{m-1} \cdot B^n+nbB^{n-1} \cdot A^m$, причемъ показатели степени m и n могутъ быть числами цѣлыми или дробными, положительными или отрицательными.

Слѣдствіе 1. Такимъ образомъ для членовъ прогрессіи, въ которой заданъ какой-либо членъ, моменты прочихъ будутъ пропорціональны этимъ членамъ, умноженнымъ на число промежутковъ между этимъ членомъ и заданнымъ. Такъ, если A, B, C, D, E, F составляютъ прогрессію и задается членъ C, то моменты прочихъ пропорціональны $-2A$, $-B$, D, $2E$, $3F$.

Слѣдствіе 2. Если изъ четырехъ пропорціональныхъ два среднихъ даны, то моменты крайнихъ будутъ пропорціональны этимъ крайнимъ. Это относится также и до моментовъ сторонъ какого-угодно прямоугольника, коего площадь задана.

Слѣдствіе 3. Если же задана сумма или разность двухъ квадратовъ, то моменты сторонъ обратно пропорціональны сторонамъ.

Поученіе.

Въ письмѣ къ *Д. И. Коллинсу*, отъ 10 дек. 1672 года, въ которомъ я описывалъ методу (проведенія) касательныхъ, относительно которой я

подозрѣвалъ, что она та же самая, какъ и данная *Слузіемъ*, тогда еще не опубликованная, я добавилъ: *Это составляетъ лишь частный случай или слѣдствіе гораздо болѣе общаго метода, который распространяется безъ всякихъ трудныхъ выкладокъ, не только на проведеніе касательныхъ къ какимъ-угодно кривымъ какъ геометрическимъ, такъ и механическимъ или какъ бы то ни было связанныхъ съ другими прямыми или кривыми линіями, но и на рѣшеніе другихъ болѣе трудныхъ родовъ задачъ: о кривизнѣ, площадяхъ, длинахъ и центрахъ тяжести кривыхъ и т. д., причемъ не приходится ограничиваться (какъ въ методѣ Гуддена для наибольшихъ и наименьшихъ) случаемъ уравненій не содержащихъ ирраціональностей. Этотъ методъ я сочеталъ съ другимъ, относящимся къ рѣшенію уравненій при помощи безконечныхъ рядовъ.* Этой выдержки изъ письма достаточно. Послѣднія же слова относятся къ сочиненію, написанному объ этихъ предметахъ въ 1671 году. Основаніе же этого общаго способа содержится въ предыдущей леммѣ [139]).

Предложеніе VIII. Теорема V.

Если тѣло въ однородной сопротивляющейся средѣ, подъ дѣйствіемъ силы тяжести, движется прямо вверхъ или внизъ, полное-же пройденное пространство разбито на равныя части и требуется найти для начала каждой части (прилагая сопротивленіе къ силѣ тяжести, когда тѣло движется вверхъ и вычитая, когда оно движется внизъ) величину полной силы, то я утверждаю, что величины этой силы составляютъ геометрическую прогрессію.

Положимъ, что сила тяжести представляется заданною длиною AC (фиг. 142), сопротивленіе перемѣнною длиною AK, дѣйствующая на тѣло сила ихъ разностью KC, скорость тѣла длиною AP, среднею пропорціо-

[139]) Это есть то знаменитое мѣсто «Началъ», которое въ третьемъ изданіи замѣняетъ слѣдующее бывшее въ первыхъ двухъ: «Въ письмахъ, которыми около десяти лѣтъ тому назадъ я обмѣнивался съ весьма искуснымъ математикомъ Г. Г. Лейбницемъ, я ему сообщалъ, что я обладаю методою для опредѣленія максимумовъ и минимумовъ, проведенія касательныхъ и рѣшенія тому подобныхъ вопросовъ, одинаково приложимою какъ для членовъ раціональныхъ, такъ и для ирраціональныхъ, причемъ я ее скрылъ, переставивъ буквы слѣдующаго предложенія: «data equatione quotcumque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa» (когда задано уравненіе, содержащее любое число перемѣнныхъ количествъ, найти флюксіи и наоборотъ). Знаменитѣйшій мужъ отвѣчалъ мнѣ, что онъ также напалъ на такую методу и сообщилъ мнѣ свою методу, которая оказалась едва отличающейся отъ моей, и то только терминами и начертаніемъ формулъ».

Перестановка буквъ, упомянутая Ньютономъ, была слѣдующая:

$$6a,\ 2c,\ d,\ ae,\ 13e,\ 2f,\ 7i,\ 3l,\ 9n,\ 4o,\ 4q,\ 2r,\ 4s,\ 9t,\ 12v,\ x.$$

нальною между AK и AC и, слѣдовательно, пропорціональной корню квадратному изъ сопротивленія, приращеніе сопротивленія происходящее въ продолженіи весьма малаго заданнаго промежутка времени отрѣзочкомъ KL и одновременное съ нимъ приращеніе скорости отрѣзочкомъ PQ. Пусть какая-либо гипербола BNS, имѣющая своими взаимно перпендикулярными ассимптотами прямыя CA и CH и центромъ точку C, пересѣкаетъ перпендикуляры AB, KN, LO въ точкахъ B, N, O. Такъ какъ AK пропорціонально AP^2, то ея моментъ KL будетъ пропорціоналенъ моменту AP^2 равному $2AP \cdot PQ$, а слѣдовательно и $AP \cdot KC$, ибо приращеніе скорости PQ (по II закону) пропорціонально дѣйствующей силѣ KC. Умноживъ KL на KN, получимъ, что прямоугольникъ $KL \cdot KN$ пропорціоналенъ $AP \cdot KC \cdot KN$, а такъ какъ (по свойству гиперболы) произведеніе $KC \cdot KN$ постоянное, то $KL \cdot KN$ пропорціонально AP. Но предѣльное отношеніе гиперболической площади $KNOL$ къ прямоугольнику $KL \cdot KN$, когда точки K и L совпадаютъ, равно единицѣ, слѣдовательно эта гиперболическая площадь пропорціональна AP. Но такъ какъ полная гиперболическая площадь $ABOL$ слагается изъ такихъ частицъ какъ $KNOL$, постоянно пропорціональныхъ скорости AP, то эта площадь пропорціональна пройденному пространству. Если эту площадь раздѣлить на равныя части $ABMJ$, $JMNK$, $KNOL$ и т. д., то дѣйствующія силы AC, JC, KC, LC и т. д. будутъ составлять геометрическую прогрессію.

На основаніи подобнаго же разсужденія если взять въ противоположную сторону отъ точки A равныя площади $ABmi$, $imnk$, $knol$ и т. д., то окажется, что дѣйствующія силы AC, iC, kC, lC и т. д. образуютъ непрерывную пропорцію; слѣдовательно, если взять всѣ части пройденнаго пространства какъ при восходящемъ, такъ и при нисходящемъ движеніи между собою равными, то всѣ силы lC, kC, iC, AC, JC, KC, LC и т. д. составятъ геометрическую прогрессію [140]).

---

[140]) Уравненіе восходящаго движенія тѣла, взявъ ось z вертикально вверхъ, будетъ при очевидныхъ обозначеніяхъ:

$$\frac{mdv}{dt} = -(mg + kv^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Это уравненіе можно написать такъ:

$$\frac{mvdv}{mg + kv^2} = -vdt = -dz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

откуда слѣдуетъ:

$$\frac{1}{2}\,\frac{m}{k}\log(mg + kv^2) + C_1 = -z.$$

Обозначая начальную скорость черезъ v_0 и $\frac{k}{m}$ черезъ n получимъ:

$$mg + kv^2 = (mg + kv_0^2)e^{-2nz} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Но $mg + kv^2$ есть полная сила F, дѣйствующая на тѣло въ разсма-

Слѣдствіе 1. Поэтому, если пройденное пространство представляется гиперболическою площадью $ABNK$, то сила тяжести, скорость тѣла и сопротивленіе среды могутъ быть соотвѣтственно представлены отрѣзками AC, AP и AK и обратно.

Слѣдствіе 2. Наибольшая скорость, которую только можетъ достичь тѣло, падая безконечно долго, представляется длиною AC.

Слѣдствіе 3. Слѣдовательно, если извѣстна величина сопротивленія среды при какой-либо заданной скорости, то эта наибольшая скорость найдется, взявъ ее въ такомъ отношеніи къ вышеупомянутой заданной скорости, какъ корень квадратный изъ отношенія силы тяжести къ извѣстной силѣ сопротивленія.

Предложеніе IX. Теорема VII.

Принимая уже доказанное, я утверждаю, что если при радіусѣ надлежащей величины брать тангенсы секторовъ круговыхъ и секторовъ гиперболическихъ пропорціональными скоростямъ, то время подъема до наибольшей высоты будетъ пропорціонально сектору круговому, время-же паденія отъ наивысшей точки—гиперболическому.

Прямая AD (фиг. 143) проводится перпендикулярно къ AC, представляющей силу тяжести, и по ней откладывается длина $AD = AC$. Центромъ D и полудіаметромъ AD описывается какъ четверть круга AtE, такъ и равнобочная гипербола AVZ, имѣющая ось AX, главную вершину A и ассимптоту DC. Если провести Dp и DP, то всякій круговой секторъ AtD будетъ пропорціоналенъ времени подъема до наибольшей высоты, и гиперболическій секторъ ATD будетъ пропорціоналенъ времени паденія съ наивысшей точки, предполагая, что тангенсы Ap и AP пропорціональны скоростямъ.

Случай 1. Пусть прямая Dvq отсѣкаетъ отъ сектора ADt и треугольника ADp моменты или весьма малыя, совмѣстно описываемыя, площадки tDv и qDp.

Такъ какъ эти площадки, имѣя общій уголъ, относятся какъ квадраты сторонъ, то будетъ

$$tDv = qDp \cdot \frac{tD^2}{pD^2},$$

а такъ какъ tD задано, то tDv пропорціонально $\frac{qDp}{pD^2}$, но

$$pD^2 = AD^2 + Ap^2 = AD^2 + AD \cdot Ak = AD \cdot Ck$$

и

$$qDp = \frac{1}{2} AD \cdot pq.$$

триваемый моментъ, $mg + kv_0^2 = F_0$ та же сила при началѣ движенія, слѣдовательно

$$F = F_0 e^{-2nz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Изъ геометрическаго представленія этого уравненія уже не разъ объясненнаго и получается все высказанное въ теоремѣ и ея слѣдствіяхъ.

Слѣдовательно площадка tDv пропорціональна $\frac{pq}{Ck}$, т.-е. прямопропорціональна весьма малому уменьшенію скорости pq и обратно пропорціональна силѣ Ck, которая производитъ это уменьшеніе скорости, слѣдовательно пропорціональна соотвѣтствующему этому уменьшенію скорости весьма малому промежутку времени. При сложеніи окажется, что сумма всѣхъ площадокъ tDv образующихъ секторъ ADt пропорціональна суммѣ всѣхъ промежутковъ времени, соотвѣтствующихъ утрачиваемымъ частицамъ pq скорости, пока эта скорость не исчезнетъ, т.-е. весь секторъ ADt пропорціоналенъ полному времени движенія тѣла вверхъ до наивысшей точки [141]).

Случай 2. Если прямую DQV провести такъ, чтобы ею отсѣкались отъ сектора DAV и треугольника DAQ весьма малыя площадки TDV и PDQ, то отношеніе этихъ площадокъ будетъ равно $DT^2 : DP^2$ или, что то же, $DX^2 : DA^2$; проведя TX параллельно AP имѣемъ:

$$DX^2 : DA^2 = TX^2 : AP^2 = (DX^2 - TX^2) : (DA^2 - AP^2).$$

Но по свойству гиперболы:

$$DX^2 - TX^2 = AD^2,$$

по предположенію же

$$AP^2 = AD \,.\, AK.$$

---

[141]) Уравненіе (1) прим. 140 будучи написано въ видѣ

$$\frac{mdv}{mg + kv^2} = -dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

даетъ при теперешнихъ обозначеніяхъ:

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}\, v\right) + C_1 = -t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Обозначая черезъ T время въ моментъ достиженія тѣломъ наибольшей высоты, т.-е. когда $v = 0$, имѣемъ:

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}\, v\right) = T - t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Совершенно также при движеніи внизъ будетъ

$$\frac{mdv}{mg - kv^2} = -dt$$

откуда слѣдуетъ

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{ArgTghyp}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}\, v\right) = t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

если время t въ этомъ уравненіи считать съ того момента, когда $v = 0$.

Уравненіями (3) и (4) и выражается высказанное предложеніе.

слѣдовательно будетъ:

$$TDV : PDQ = AD^2 : (AD^2 - AD \cdot AK) = AD : (AD - AK) = AC : CK.$$

Итакъ

$$TDV = PDQ \cdot \frac{AC}{CK}.$$

Но такъ какъ AC и AD заданы, то TDV пропорціонально $\frac{PQ}{CK}$, т.-е. прямо пропорціонально приращенію скорости PQ и обратно пропорціонально дѣйствующей силѣ CK, т.-е. пропорціонально весьма малому промежутку времени, соотвѣтствующему измѣненію скорости. По сложеніи окажется, что сумма всѣхъ промежутковъ времени, въ продолженіе которыхъ скорость AP образуется изъ своихъ частицъ PQ, пропорціональна суммѣ всѣхъ площадокъ, составляющихъ секторъ ATD, т.-е. полное время пропорціонально площади всего сектора.

Слѣдствіе 1. Поэтому если взять $AB = \frac{1}{4} AC$, то пространство, описываемое тѣломъ при паденіи въ продолженіе какого-либо времени относится къ пространству, которое тѣло прошло бы въ то же время, двигаясь равномѣрно съ наибольшею скоростью AC, какъ площадь $ABNK$, представляющая путь пройденный при паденіи, къ площади ATD, представляющей время.

Дѣйствительно, такъ какъ

$$AC : AP = AP : AK,$$

то по слѣд. 1 леммы II этой книги будетъ:

$$LK : PQ = 2AK : AP = 2AP : AC$$

и значитъ

$$LK : \frac{1}{2} PQ = AP : \frac{1}{4} AC = AP : AB,$$

Но вмѣстѣ съ тѣмъ

$$KN : AD = AB : CK.$$

слѣдовательно будетъ

$$LKNO : DPQ = AP : CK.$$

Но какъ было показано

$$DPQ : DTV = CK : AC.$$

Значитъ будетъ

$$LKNO : DTV = AP : AC,$$

т.-е. это отношеніе равно отношенію скорости тѣла къ наибольшей скорости, которую оно можетъ пріобрѣсть при паденіи. А такъ какъ моменты

LKNO и *DTV* площадей *ABNK* и *ATD* пропорціональны скоростямъ, то образующіяся приращенія этихъ площадей пропорціональны проходимымъ одновременно частицамъ пути, слѣдовательно полныя площади *ABNK* и *ATD*, образовавшіяся отъ начала паденія, пропорціональны полнымъ пространствамъ, пройденнымъ за это время.

Слѣдствіе 2. На основаніи этого находится также пространство, пройденное при движеніи вверхъ, а именно оно такъ относится къ пространству, которое тѣло могло бы пройти при равномѣрномъ движеніи со скоростью *AC* въ теченіе того же времени, какъ площадь *ABnk* къ площади сектора *ADt*.

Слѣдствіе 3. Скорость тѣла въ концѣ промежутка времени, при паденіи въ сопротивляющейся средѣ *ATD*, относится къ скорости, которую тѣло пріобрѣло бы въ продолженіе того же времени при паденіи въ средѣ безъ сопротивленія, какъ площадь треугольника *APD* къ площади гиперболическаго сектора *ATD*, ибо въ средѣ не сопротивляющейся скорость возрастаетъ какъ время *ATD*, въ средѣ же сопротивляющейся какъ длина *AP*, т.-е. какъ площадь треугольника *APD*, при началѣ же движенія внизъ эти скорости были равны, такъ же какъ и сказанныя площади *ATD* и *APD*.

Слѣдствіе 4. На основаніи такого же разсужденія, скорость въ любой моментъ при движеніи вверхъ такъ относится къ скорости, которую тѣло утратило бы въ продолженіе того же времени въ средѣ не сопротивляющейся, какъ площадь треугольника *ApD* къ площади кругового сектора *AtD*, иначе какъ прямая *Ap* къ длинѣ дуги *At*.

Слѣдствіе 5. Время, въ продолженіе котораго тѣло падая въ сопротивляющейся средѣ пріобрѣтаетъ скорость *AP*, относится ко времени, въ продолженіе котораго тѣло, падая въ средѣ не сопротивляющейся, пріобрѣло бы скорость равную наибольшей *AC*, какъ площадь сектора *ADT* къ треугольнику *ADC*; время же, въ продолженіе котораго тѣло, двигаясь вверхъ, могло бы утратить скорость *Ap*, относится ко времени, въ теченіе котораго та же скорость утратилась бы при движеніи вверхъ въ средѣ не сопротивляющейся, какъ дуга *At* къ своему тангенсу *Ap*.

Слѣдствіе 6. По заданному времени движенія вверхъ или внизъ найдется и пройденное пространство, ибо для тѣла падающаго внизъ безконечно наибольшая скорость находится по сл. 2 и 3 теор. VI кн. II, слѣдовательно найдется и время, въ продолженіе котораго тѣло могло бы пріобрѣсти эту скорость, падая въ средѣ не сопротивляющейся. Тогда взявъ секторъ *ADT* или *ADt* въ томъ же отношеніи къ треугольнику *ADC* какъ заданный промежутокъ къ выше найденному, найдемъ скорости *AP* и *Ap*, а также и площади *ABNK* и *ABnk* относящіяся къ площадямъ секторовъ *ADT* или *ADt* какъ искомое пройденное пространство къ тому, которое тѣло могло бы описать въ теченіе заданнаго времени, двигаясь равномѣрно съ выше найденною наибольшею скоростью.

Слѣдствіе 7. Обратно по заданному пройденному при движеніи вверхъ или внизъ пространству *ABnk* или *ABNK* найдется время *ADt* или *ADT*.

Предложеніе X. Задача III.

Предполагая, что постоянная сила тяжести направлена перпендикулярно къ горизонтальной плоскости и что сопротивленіе пропорціонально плотности среды и квадрату скорости, требуется найти такую плотность среды въ любомъ мѣстѣ, при которой тѣло двигалось бы по заданной какъ бы то ни было кривой, а также скорость тѣла и сопротивленіе среды на него.

Пусть PQ (фиг. 144) есть сказанная плоскость, перпендикулярная плоскости чертежа, $PFHQ$ заданная кривая пересѣкающая въ точкахъ P и Q плоскость PQ; G, H, J, K четыре послѣдовательныхъ мѣста на этой кривой, считая по направленію отъ F къ Q; GB, HC, JD, KE четыре ординаты, проведенныя отъ этихъ точекъ до плоскости PQ, пересѣкающія ее въ точкахъ B, C, D, E, причемъ разстоянія BC, CD, DE между ординатами равны. Изъ точекъ G и H проводятся прямыя GL и HN, касающіяся къ кривой въ точкахъ G и H и пересѣкающія продолженныя вверхъ ординаты въ L и N, и дополняется паралеллограммъ $HCDM$. Промежутки времени, въ продолженіе которыхъ тѣло описываетъ дуги GH и HJ пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ высотъ LN и NJ, на которыя тѣло въ продолженіе этихъ промежутковъ опустилось бы падая отъ касательныхъ, скорости же пропорціональны GH и HJ и обратно пропорціональны этимъ промежуткамъ времени.

Обозначимъ эти промежутки черезъ T и t, и скорости черезъ

$$\frac{GH}{T} \text{ и } \frac{HJ}{t},$$

тогда уменьшеніе скорости въ продолженіе времени t будетъ

$$\frac{GH}{T} - \frac{HJ}{t}.$$

Это уменьшеніе происходитъ отъ сопротивленія, замедляющаго движеніе тѣла, и отъ силы тяжести его ускоряющей. Сила тяжести, когда тѣло при своемъ паденіи проходитъ пространство NJ, производитъ такую скорость, съ которою, двигаясь равномѣрно, тѣло прошло бы въ то же самое время удвоенный путь, какъ то доказалъ *Галилей*, т.-е. скорость, равную $\frac{2NJ}{t}$. Вслѣдствіе этой скорости, когда тѣло описываетъ дугу HJ, эта дуга увеличивается на величину разности $HJ - HN$ равной $NJ \cdot \frac{MJ}{HJ}$ и, слѣдовательно, сила тяжести производитъ увеличеніе скорости тѣла на $\frac{2MJ \cdot NJ}{t \cdot HJ}$. Придавая это увеличеніе скорости къ указанному выше уменьшенію ея, получимъ, что полное измѣненіе скорости, происходящее отъ сопротивленія среды, равно:

$$\frac{GH}{T} - \frac{HJ}{t} + \frac{2MJ \cdot NJ}{t \cdot HJ}.$$

Такъ какъ въ продолженіе того же времени сила тяжести производитъ при свободномъ паденіи тѣла скорость $\frac{2NJ}{t}$, то сопротивленіе относится къ тяжести какъ

$$\frac{GH}{T}-\frac{HJ}{t}+\frac{2MJ\,.\,NJ}{t\,.\,HJ} \text{ къ } \frac{2NJ}{t}$$

иначе какъ

$$\left(\frac{t\,.\,GH}{T}-HJ+\frac{2MJ\,.\,NJ}{HJ}\right):2NJ,$$

Примемъ теперь абсциссы CB, CD, CE соотвѣтственно равными: $-\alpha$, α, 2α. Ординату CH обозначимъ черезъ P и величину MJ положимъ равной суммѣ нѣкотораго ряда:

$$MJ = Q\alpha + R\alpha^2 + S\alpha^3 + \dots$$

Тогда всѣ члены этого ряда слѣдующіе за первымъ представятъ NJ, такъ что

$$NJ = R\alpha^2 + S\alpha^3 + \dots$$

и ординаты DJ, EK и BG будутъ:

$$DJ = P - Q\alpha - R\alpha^2 - S\alpha^3 - \dots$$
$$EK = P - 2Q\alpha - 4R\alpha^2 - 8S\alpha^3 - \dots$$
$$BG = P + Q\alpha - R\alpha^2 + S\alpha^3 - \dots$$

Возвысивъ въ квадратъ разности ординатъ $BG - CH$ и $CH - DJ$ и приложивъ къ нимъ BC^2 и CD^2, получимъ квадраты дугъ GH, HJ:

$$GH^2 = \alpha^2 + Q^2\alpha^2 - 2QR\alpha^3 + \dots$$
$$HJ^2 = \alpha^2 + Q^2\alpha^2 + 2QR\alpha^3 + \dots$$

коихъ корни квадратные и дадутъ самыя дуги:

$$GH = \alpha\sqrt{1+Q^2} - \frac{QR\,.\,\alpha^2}{\sqrt{1+Q^2}} + \dots$$
$$HJ = \alpha\sqrt{1+Q^2} + \frac{QR\,.\,\alpha^2}{\sqrt{1+Q^2}} + \dots$$

Затѣмъ, если изъ ординаты CH вычесть полусумму ординатъ BG и DJ и изъ ординаты DJ вычесть полусумму ординатъ CH и EK, то останутся стрѣлки дугъ GJ и HK равныя $R\alpha^2$ и $R\alpha^2 + 3S\alpha^3$, которыя пропорціональны отрѣзочкамъ LH и NJ, т.-е. относятся между собою какъ квадраты безконечно малыхъ промежутковъ T и t, поэтому будетъ:

$$\frac{t}{T} = \sqrt{\frac{R+3S\alpha}{R}} = \frac{R+\frac{3}{2}S\alpha}{R}.$$

Подставляя эту величину, а также и выше найденныя значенія GH, HJ, MJ и NJ, получимъ

$$\frac{t}{T}GH - HJ + \frac{2MJ \cdot NJ}{HJ} = \frac{3}{2}\,\frac{S}{R}\,\alpha^2\sqrt{1+Q^2},$$

а такъ какъ

$$2NJ = 2R\alpha^2,$$

то отношеніе силы сопротивленія къ силѣ тяжести будетъ [142]):

$$\frac{3}{2}\,\frac{S}{R}\cdot\alpha^2\sqrt{1+Q^2} : 2R\alpha^2 = \frac{3S}{4R^2}\cdot\sqrt{1+Q^2}.$$

Скорость же тѣла такова, что выходя съ этою скоростью изъ какой-либо точки H по направленію касательной HN оно могло бы, двигаясь

---

[142]) Лагранжъ удѣляетъ въ своей Théorie des Fonctions Analytiques всю IV главу третьей части аналитическому рѣшенію этой задачи, подробно разбирая ошибку, которая была сдѣлана Ньютономъ въ первомъ изданіи «Началъ».

Хотя рѣшеніе, даваемое Ньютономъ, въ сущности также аналитическое и изложено настолько подробно, что не представляетъ никакихъ трудностей, но мы приведемъ и Лагранжево рѣшеніе, замѣтивъ предварительно, что если уравненіе траекторіи задано въ видѣ $z = f(x)$, то величина

$$DJ = f(x+\alpha)$$

т.-е.

$$DJ = f(x) + \alpha \cdot f'(x) + \frac{\alpha^2}{1\,.\,2}\cdot f''(x) + \frac{\alpha^3}{1\,.\,2\,.\,3}f'''(x) + \ldots$$

слѣдовательно будетъ

$$P = f(x),\quad Q = -f'(x);\quad R = -\frac{1}{2}f''(x);\quad S = -\frac{1}{6}f'''(x)\ \ldots$$

Вмѣсто буквы α у Ньютона написана въ латинскомъ изданіи «Началъ» буква o, неудобство этой буквы въ формулахъ заставило замѣнить ее черезъ α.

Обозначимъ черезъ F силу сопротивленія, которое по предположенію пропорціонально квадрату скорости v такъ, что $F = kv^2$; пусть масса точки равна m, положивъ $\frac{F}{mv} = q$, будемъ имѣть уравненія движенія:

$$z'' = -g - qz';\quad x'' = -qx' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Уравненіе траекторіи:

$$z = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Дифференцируя по времени уравненія (1) одинъ разъ и уравненіе (2) три раза, получимъ

$$z''' = -qz'' - q'z';\quad x''' = -qx'' - x'q' \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} z' = x'f'(x);\quad z'' = x''f'(x) + x'^2 f''(x) \\ z''' = x'''f'(x) + 3x'x''f''(x) + f'''(x)\,.\,x'^3 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

или положивъ для краткости письма:

въ пустотѣ, описывать параболу, коей діаметръ HC и соотвѣтствующій параметръ

$$\frac{HN^2}{NJ} = \frac{1+Q^2}{R}.$$

Сопротивленіе же пропорціонально плотности среды и квадрату скорости, поэтому плотность среды прямо пропорціональна сопротивленію и обратно пропорціональна квадрату скорости, т.-е. пропорціональна отношенію

$$\frac{3S}{4R^2} \cdot \sqrt{1+Q^2} : \frac{1+Q^2}{R}$$

или что то же

$$\frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}}.$$

$$f'(x) = A; \quad f''(x) = B; \quad f'''(x) = C$$

будемъ имѣть:

$$\left. \begin{array}{c} z' = Ax'; \quad z'' = Ax'' + Bx'^2 \\ z'' = Ax''' + 3Bx'x'' + Cx'^3 \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Такимъ образомъ имѣемъ семь уравненій, а именно два уравненія (1), два уравненія (3) и три уравненія (5). Исключивъ изъ этихъ уравненій величины x', x'', x''', z', z'', z''' получимъ одно уравненіе, связывающее неизвѣстную q, а значитъ и F съ A, B и C.

Это исключеніе выполняется такъ: изъ уравн. (1) и (3) на основаніи первыхъ двухъ уравненій (5) находимъ

$$x'^2 = -\frac{g}{B} \quad \text{и} \quad x''' = x'(q^2 - q') \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Тогда послѣднее изъ уравненій (5) въ связи съ первымъ изъ уравненій (3) даетъ:

$$q(g + Aqx') - Ax'q' = Ax'(q^2 - q') + 3Bx'^2q + Cx'^3$$

т.-е.

$$-2gq = Cx'^3$$

но

$$q = \frac{F}{mv} = \frac{F}{mx'\sqrt{1+A^2}}$$

слѣдовательно

$$\frac{F}{mg} = -\frac{C\sqrt{1+A^2}}{2B^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

При Ньютоновомъ обозначеніи

$$A = -Q, \quad B = -2R \quad \text{и} \quad C = -6S,$$

такъ, что фор. (7) и есть та самая, которая дана въ текстѣ.

Слѣдствіе 1. Если касательную HN продолжить пока она пересѣчетъ какую-либо ординату AF въ точкѣ T, то будетъ:

$$\sqrt{1+Q^2}=\frac{HT}{AC}$$

что и можно подставить въ предыдущія формулы, послѣ чего окажется: что сопротивленіе относится къ силѣ тяжести какъ $3S\,.\,HT : 4R^2\,.\,AC$, что скорость пропорціональна $\frac{HT}{AC.\sqrt{R}}$ и что плотность среды пропорціональна $\frac{S.AC}{R.HT}$.

Слѣдствіе 2. Такимъ образомъ, если кривая $PFHQ$ будетъ задана какъ обыкновенно уравненіемъ, связывающимъ абсциссу AC и ординату CH, то по разложеніи выраженія ординаты въ сходящійся рядъ легко получить рѣшеніе задачи по первымъ членамъ этого ряда подобно тому, какъ въ слѣдующихъ примѣрахъ.

Примѣръ 1. Пусть кривая $PFHQ$ есть полукругъ, описанный на діаметрѣ PQ, требуется опредѣлить плотность среды такъ, чтобы она заставила бы брошенное тѣло двигаться по этой кривой.

Раздѣлимъ діаметръ PQ пополамъ въ точкѣ A и пусть будетъ:

$$AQ=n,\qquad AC=a,\qquad CH=e,\qquad CD=\alpha$$

тогда:

$$DJ^2=AQ^2-AD^2=n^2-a^2-2a\alpha-\alpha^2=e^2-2a\alpha-\alpha^2.$$

По извлеченіи по нашему способу корня, получимъ:

$$DJ=e-\frac{a}{e}\alpha-\frac{1}{2e}\alpha^2-\frac{a^2}{2e^3}\alpha^2-\frac{a}{2e^3}\alpha^3-\frac{a^3}{2e^5}\alpha^3-\text{и т. д.}$$

замѣнивъ n^2 черезъ e^2+a^2 имѣемъ:

$$DJ=e-\frac{a}{e}\alpha-\frac{n^2}{2e^3}\alpha^2-\frac{an^2}{2e^5}\alpha^3-\text{и т. д.}$$

Въ рядахъ такого рода я распредѣляю члены слѣдующимъ образомъ: первымъ членомъ я называю тотъ, который не содержитъ безконечно малой α, вторымъ тотъ, гдѣ эта величина входитъ въ первой степени, третьимъ тотъ, гдѣ она во второй степени, четвертымъ—гдѣ она въ третьей и т. д. до безконечности. Первый членъ, который въ этомъ примѣрѣ есть e, всегда представляетъ длину ординаты CH, проведенной черезъ начало неопредѣленнаго количества α. Второй членъ, который здѣсь равенъ $\frac{a\alpha}{e}$, представляетъ разность между CH и DN, т.-е. отрѣзочекъ MN, получаемый дополняя параллелограммъ $HCDM$, имъ опредѣляется положеніе касательной HN; такъ для этого примѣра взявъ отношеніе $\frac{MN}{HM}$ имѣемъ

$$\frac{MN}{HM}=\frac{a\alpha}{e}:\alpha=\frac{a}{e}.$$

Третій членъ, равный здѣсь $\frac{n^2\alpha^2}{2e^3}$, представляетъ отрѣзочекъ JN, лежащій между касательной и кривой, этотъ членъ опредѣляетъ уголъ касанія JHN, иначе кривизну кривой въ точкѣ H. Когда этотъ отрѣзочекъ JN конечной величины [143]), то онъ представляется третьимъ членомъ вмѣстѣ съ суммою всѣхъ прочихъ до безконечности, но когда этотъ отрѣзочекъ уменьшается до безконечности, то всѣ члены, слѣдующіе за третьимъ, становятся безконечно меньше третьяго и поэтому ими можно пренебречь. Четвертый членъ опредѣляетъ измѣняемость кривизны, пятый— измѣняемость этой измѣняемости и также продолжается далѣе.

Отсюда ясно немаловажное примѣненіе этихъ рядовъ при рѣшеніи задачъ, зависящихъ отъ касательныхъ и кривизны кривыхъ.

Сопоставляя рядъ

$$e - \frac{a}{e}\alpha - \frac{n^2}{2e^3}\alpha^2 - \frac{an^2}{2e^5}\alpha^3 \text{ и т. д.}$$

съ рядомъ

$$P - Q\alpha - R\alpha^2 - S\alpha^3 \text{ и т. д.}$$

получаемъ

$$P = e;\quad Q = \frac{a}{e};\quad R = \frac{n^2}{2e^3};\quad S = \frac{an^2}{2e^5}.$$

Слѣдовательно:

$$\sqrt{1+Q^2} = \sqrt{1+\frac{a^2}{e^2}} = \frac{n}{e}$$

и получится: что плотность среды должна быть пропорціональна $\frac{a}{ne}$, т.-е. $\frac{a}{e}$, ибо n есть величина постоянная, иначе $\frac{AC}{CH}$, т.-е. длинѣ HT того отрѣзка касательной въ точкѣ H, который заключенъ между этою точкою и діаметромъ AF перпендикулярнымъ къ PQ, что сопротивленіе относится къ силѣ тяжести какъ $3a : 2n$ или, что то же, какъ $3AC : PQ$, скорость же будетъ пропорціональна $\sqrt{CH}$.

Такимъ образомъ, если тѣло выходитъ съ надлежащею скоростью изъ мѣста F по направленію прямой параллельной PQ, если плотность среды во всякомъ мѣстѣ его пути пропорціональна длинѣ касательной HT и сопротивленіе относится къ силѣ тяжести какъ $3AC : PQ$, то это тѣло опишетъ четверть окружности FHQ.

Но если тоже тѣло выйдетъ изъ точки P по направленію прямой перпендикулярной PQ и начнетъ двигаться по дугѣ полукруга PFQ, то AC или a будетъ расположено по другую сторону отъ центра A, поэтому надо перемѣнить знакъ и писать $-a$ вмѣсто a. При такомъ условіи по-

---

[143]) Подъ словами «отрѣзочекъ JN конечной величины» (finitae est magnitudinis) надо разумѣть, что величина α въ разсматриваемомъ разложеніи конечная, кромѣ того что $f''(x)$ не равно нулю.

лучится, что плотность среды пропорціональна $-\frac{a}{e}$, т.-е. отрицательная, при которой движеніе тѣла должно бы ускоряться, чего природа не допускаетъ, поэтому естественно не можетъ быть такого движенія, при которомъ тѣло описывало бы четверть круга PF,—для этого необходимо чтобы среда, напирая, ускоряла бы движеніе тѣла, а не препятствовала бы ему своимъ сопротивленіемъ.

Примѣръ 2. Пусть кривая PFQ (фиг. 145) парабола, коей ось AF перпендикулярна къ горизонту PQ, требуется опредѣлить плотность среды, при которой брошенное тѣло могло бы двигаться по этой кривой.

По свойству параболы произведеніе $PD.DQ$ равно произведенію ординаты DJ на нѣкоторую постоянную длину, поэтому если обозначить эту длину черезъ b и положить:

$$PC = a,\quad PQ = c,\quad CH = e,\quad CD = \alpha$$

то будетъ

$$(a+\alpha)(c-a-\alpha) = ac - a^2 - 2a\alpha + c\alpha - \alpha^2 = b\,.\,DJ$$

и слѣдовательно

$$DJ = \frac{ac-a^2}{b} + \frac{c-2a}{b}\alpha - \frac{\alpha^2}{b}$$

и значитъ

$$\frac{c-2a}{b} = Q \quad \text{и} \quad \frac{1}{b} = R$$

и такъ какъ дальнѣйшихъ членовъ нѣтъ, то коэффиціентъ при четвертомъ членѣ $S = 0$ и поэтому количество $\frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}}$, которому пропорціональна плотность среды уничтожается; слѣдовательно брошенное тѣло движется по параболѣ въ средѣ нулевой плотности, какъ это и доказано *Галилеемъ*.

Примѣръ 3. Пусть кривая AGK (фиг. 146) есть гипербола, коей ассимптота NX перпендикулярна къ горизонтальной плоскости и требуется опредѣлить плотность среды, при которой брошенное тѣло будетъ двигаться по этой кривой.

Пусть MX есть вторая ассимптота, пересѣкающая продолженіе ординаты DG въ точкѣ V. По свойству гиперболы произведеніе $XV.VG$ есть постоянное, а такъ какъ отношеніе DN къ VX также постоянное, то постоянно и произведеніе $DN.VG$.

Пусть это произведеніе равно b^2; дополнимъ параллелограммъ $DNXZ$ и положимъ

$$BN = a;\quad BD = \alpha;\quad NX = c \quad \text{и} \quad \frac{VZ}{DN} = \frac{m}{n}.$$

Тогда будетъ:

$$DN = a - \alpha;\quad VG = \frac{b^2}{a-\alpha};\quad VZ = \frac{m}{n}(a-\alpha)$$

$$GD = NX - VZ - VG = c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}\alpha - \frac{b^2}{a-\alpha}.$$

По разложеніи члена $\frac{b^2}{a-\alpha}$ въ рядъ получится:

$$DG = c - \frac{m}{n}a - \frac{b^2}{a} + \frac{m}{n}\alpha - \frac{b^2}{a^2}\alpha - \frac{b^2}{a^3}\alpha^2 - \frac{b^2}{a^4}\alpha^3 - \ldots$$

Второй членъ этого ряда $\left(\frac{m}{n} - \frac{b^2}{a^2}\right)\alpha$ надо принять за $Q\alpha$, третій взятый съ обратнымъ знакомъ $\frac{b^2}{a^3}\alpha^2$ — за $R\alpha^2$, четвертый также съ обратнымъ знакомъ $\frac{b^2}{a^4}\alpha^3$ — за $S\alpha^3$, слѣдовательно, ихъ коэффиціенты $\left(\frac{m}{n} - \frac{b^2}{a^2}\right)$, $\frac{b^2}{a^3}$ и $\frac{b^2}{a^4}$ и надо подставить вмѣсто Q, R, S въ предыдущую формулу, тогда получится, что плотность среды пропорціональна

$$\frac{b^2}{a^4} : \frac{b^2}{a^3}\sqrt{1 + \frac{m^2}{n^2} - \frac{2mb^2}{na^2} + \frac{b^4}{a^4}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{m^2}{n^2}a^2 - \frac{2mb^2}{n} + \frac{b^4}{a^2}}}.$$

Отложивъ отъ точки V по прямой GV длину $VY = VG$, построимъ длину XY, которая и представляетъ знаменатель въ предыдущей формулѣ, ибо

$$a^2 = XZ^2 \quad \text{и} \quad \frac{m^2}{n^2}a^2 - \frac{2mb^2}{n} + \frac{b^4}{a^2} = ZY^2.$$

Значитъ, плотность обратно пропорціональна длинѣ XY. Сопротивленіе получится по отношенію его къ силѣ тяжести равному $3XY : 2GY$, скорость же такова, какую тѣло имѣло бы двигаясь по параболѣ, коей вершина G, діаметръ DG и параметръ $\frac{XY^2}{VG}$.

Такимъ образомъ если принять, что плотность среды въ каждомъ мѣстѣ G обратно пропорціональна разстоянію XY, и что сопротивленіе въ любомъ мѣстѣ G относится какъ $3XY : 2YG$, то тѣло, пущенное изъ точки A съ надлежащею скоростью и опишетъ заданную гиперболу AGK.

Примѣръ 4. Предполагается, что AGK есть вообще нѣкоторая гиперболическая кривая, коей центръ X и ассимптоты MX и NX, обладающая тѣмъ свойствомъ, что если построить прямоугольникъ $XZDN$, коего сторона ZD пересѣкаетъ кривую въ G и ея ассимптоту въ V, то VG обратно пропорціонально DN^n, причемъ показатель n задается; требуется опредѣлить плотность среды, брошенное въ которой тѣло будетъ двигаться по этой гиперболической кривой.

Положимъ:

$$BN = a; \quad BD = \alpha; \quad NX = c$$

и пусть

$$VZ : DN = d : e \quad \text{и} \quad VG = \frac{b^2}{DN^n}$$

тогда будетъ:

$$DN = a - \alpha; \quad VG = \frac{b^2}{(a-\alpha)^n}; \quad VZ = \frac{d}{e}(a-\alpha)$$

$$GD = NX - VZ - VG = c - \frac{d}{e}(a-\alpha) - \frac{b^2}{(a-\alpha)^n}.$$

По разложеніи члена $\frac{b^2}{(a-\alpha)^n}$ въ рядъ получится:

$$GD = c - \frac{d}{e}a - \frac{b^2}{a^n} + \frac{d}{e}\alpha - \frac{nb^2}{a^{n+1}}\alpha - \frac{n^2+n}{2a^{n+2}}b^2\alpha^2 - \frac{n^3+3n^2+2n}{6a^{n+3}}b^2\alpha^3$$

и т. д.

второй членъ этого ряда $\left(\frac{d}{e} - \frac{nb^2}{a^{n+1}}\right)\alpha$ надо принять за $Q\alpha$, третій $\frac{n^2+n}{2a^{n+2}}b^2\alpha^2$—за $R\alpha^2$, четвертый $\frac{n^3+3n^2+2n}{6a^{n+3}}b^2\alpha^3$—за $S\alpha^3$, тогда плотность среды $\frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}}$ въ какой-либо точкѣ G будетъ:

$$\frac{n+2}{3\sqrt{a^2 + \frac{d^2}{e^2}a^2 - \frac{2dnb^2a}{ea^n} + \frac{n^2b^4}{a^{2n}}}}$$

поэтому, если отложить по VZ длину $VY = nVG$, то плотность будетъ обратно пропорціональна XY, ибо

$$a^2 \quad \text{и} \quad \frac{d^2}{e^2}a^2 - \frac{2dnb^2}{ea^{n-1}} + \frac{nb^4}{a^{2n}}$$

суть квадраты длинъ XZ и ZY.

Сопротивленіе вмѣстѣ съ тѣмъ относится къ силѣ тяжести какъ

$$\frac{3S\,.\,XY}{a} : 4R^2$$

т.-е. какъ

$$XY : \frac{2n^2+2n}{n+2}VG;$$

скорость же повсюду такая, съ которою брошенное тѣло шло бы по параболѣ, имѣющей вершину G, діаметръ GD и параметръ

$$\frac{1+Q^2}{R} = \frac{2XY^2}{(n^2+n)VG}.$$

Поученіе.

Подобно тому какъ въ сл. 1 получено, что плотность среды пропорціональна $\frac{S\,.\,AC}{R\,.\,HT}$, получается, полагая сопротивленіе пропорціональнымъ

$n^{\text{ой}}$ степени скорости V, т.-е. V^n, что плотность пропорціональна [144]) $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \cdot \left(\frac{AC}{HT}\right)^{n-1}$; поэтому, если можетъ быть найдена такая кривая, для которой отношеніе $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \left(\frac{HT}{AC}\right)^{n-1}$ иначе $\frac{S^2}{R^{4-n}} : (1+Q^2)^{n-1}$ постоянное, то тѣло будетъ двигаться по этой кривой, въ однородной средѣ, коей сопротивленіе пропорціонально $n^{\text{ой}}$ степени скорости V. Однако обратимся къ болѣе простымъ кривымъ.

Такъ какъ движеніе по параболѣ происходитъ не иначе какъ въ средѣ не сопротивляющейся, по описаннымъ же выше гиперболамъ можетъ происходить и при непрестанномъ сопротивленіи, то очевидно, что кривая описываемая брошеннымъ тѣломъ въ однородно сопротивляющейся средѣ, ближе подходитъ къ этимъ гиперболамъ, нежели къ параболѣ. Во всякомъ случаѣ эта кривая гиперболическаго рода, но близь вершины она болѣе отходитъ отъ ассимптотъ, а въ своихъ отдаленныхъ частяхъ болѣе приближается къ ассимптотамъ, нежели вышеописанныя гиперболы; однако эта разница не настолько велика, чтобы въ практическихъ приложеніяхъ было неудобно пользоваться этими кривыми, и можетъ быть онѣ болѣе полезны, нежели эта болѣе точная, но и гораздо болѣе сложная гиперболическая кривая. Для приложеній онѣ выводятся слѣдующимъ образомъ.

Дополняютъ параллелограмъ $XYGT$, тогда прямая GT есть касатель-

---

[144]) Въ примѣчаніи 142 получены формулы

$$q = \frac{F}{mv} = -\frac{Cx'^3}{2g}$$

и

$$x'^2 = -\frac{g}{B}.$$

Если сопротивленіе F пропорціонально плотности среды δ и $n^{\text{ой}}$ степени скорости v, такъ что $F = k\delta \,.\, v^n$, причемъ k постоянное, то получимъ:

$$\delta = -\frac{m}{2kg} C \cdot \frac{x'^3}{v^{n-1}} = -\frac{m}{2kg} \cdot \frac{x'^3 \,.\, C}{x'^{n-1} \,.\, (1+A^2)^{\frac{n-1}{2}}}$$

подставляя вмѣсто x' его значеніе и вмѣсто A, B и C ихъ значенія: $-Q$, $-2R$, и $-6S$, получимъ

$$\delta = N_1 \frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}} \,.\, (1+Q^2)^{\frac{n-1}{2}}}$$

гдѣ черезъ N_1 обозначенъ постоянный множитель. Это и есть формула, приводимая въ текстѣ, ибо

$$\frac{HT}{AC} = \sqrt{1+Q^2}.$$

ная къ гиперболѣ въ точкѣ G, поэтому въ мѣстѣ G плотность обратно пропорціональна GT, а скорость пропорціональна $\frac{GT}{\sqrt{GV}}$ и отношеніе сопротивленія къ силѣ тяжести равно

$$GT : \frac{2n^2 + 2n}{n+2} . GV.$$

Поэтому, если брошенное изъ A по направленію прямой AH тѣло описываетъ гиперболу AGK, и AH по продолженіи пересѣкаетъ ассимптоту NX въ точкѣ H, прямая же AJ, проведенная параллельно NX, пересѣкаетъ другую ассимптоту MX въ J, то плотность среды въ точкѣ A будетъ обратно пропорціональна AH, скорость тѣла пропорціональна $\frac{AH}{\sqrt{AJ}}$ и отношеніе сопротивленія къ силѣ тяжести равно

$$AH : \frac{2n^2 + 2n}{n+2} . AJ.$$

Отсюда происходятъ слѣдующія правила.

Правило 1. Если плотность среды въ A и скорость, съ которою тѣло брошено, сохраняются, а измѣняется лишь уголъ NAH, то и длины AH, AJ, HX останутся неизмѣнными; поэтому если эти длины будутъ найдены для какого-либо случая, то затѣмъ гипербола для любого заданнаго угла NAH можетъ быть весьма быстро опредѣлена.

Правило 2. Если сохраняются уголъ NAH (фиг. 147) и плотность среды въ A, а измѣняется лишь скорость, съ которою бросается тѣло, то длина AH сохранится неизмѣнной, а измѣнится AJ обратно пропорціонально квадрату скорости.

Правило 3. Если сохраняются уголъ NAH, скорость тѣла въ точкѣ A и ускорительная сила тяжести, отношеніе же сопротивленія въ A къ движущей силѣ тяжести *) увеличивается въ какое-либо число разъ, то во столько же разъ увеличится и отношеніе AH къ AJ, при сохраненіи величины параметра вышеупомянутой параболы и пропорціональной ему величины $\frac{AH^2}{AJ}$, поэтому AH уменьшится въ указанное число разъ, а AJ въ это число возвышенное въ квадратъ. Отношеніе же сопротивленія къ вѣсу увеличится или когда удѣльный вѣсъ тѣла станетъ меньше, или же плотность среды станетъ больше, или же когда при уменьшеніи величины тѣла сопротивленіе уменьшится въ меньшемъ отношеніи, нежели вѣсъ.

Правило 4. Такъ какъ плотность среды близь вершины гиперболы больше, нежели въ A, то чтобы получить среднюю плотность, надо найти отношеніе наименьшей изъ касательныхъ GT къ AH и увеличить плотность въ A въ отношеніи немного большемъ, нежели отношеніе полусуммы этихъ касательныхъ къ наименьшей.

---

*) См. прим. 9.

Правило 5. Если длины AH, AJ заданы и требуется описать кривую AGK, то надо продолжить HN до X такъ, чтобы было:

$$HX : AJ = (n + 1) : 1$$

и принявъ точку X за центръ и прямыя MX и NX за ассимптоты, провести черезъ точку A такую гиперболическую кривую, для всякой точки G которой

$$AJ : VG = XV^n : XJ^n.$$

Правило 6. Чѣмъ число n больше, тѣмъ точнѣе представляется этою гиперболою выходящая отъ A вѣтвь траекторіи тѣла, и менѣе точно нисходящая къ K и наоборотъ. Обыкновенная гипербола занимаетъ среднее положеніе и проще, нежели прочія; если взята гипербола такого рода и требуется найти ту точку K, въ которой брошенное тѣло пересѣкаетъ какую-либо данную прямую AN, проведенную черезъ A, то надо отложить длину $NK = AM$, причемъ M и N суть точки пересѣченія ассимптотъ MX и NX съ данною прямою AN.

Правило 7. Отсюда слѣдуетъ простой способъ опредѣленія этой гиперболы по испытаніямъ. Пусть два равныхъ и подобныхъ тѣла брошены съ одинаковыми скоростями, но подъ разными углами HAK и hAk и точки ихъ паденія на горизонтальную плоскость суть K и k.

Опредѣляется отношеніе AK къ Ak, пусть будетъ:

$$AK : Ak = d : e.$$

Затѣмъ, возставивъ перпендикуляръ AJ и отложивъ по немъ какую-либо постоянную длину AJ, прими нѣкоторую произвольную длину за AH или Ah и построй чертежомъ по правилу 6 длины AK и Ak. Если отношеніе $AK : Ak$ окажется равнымъ $d : e$, то длина AH взята правильно. Если же нѣтъ, то отложи по неограниченной прямой SM длину SM, равную принятой AH и по возстановленному въ точкѣ M перпендикуляру отложи длину MN, равную произведенію разности $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ на нѣкоторую постоянную длину. Подобнымъ же образомъ, задаваясь различными значеніями длины AH, надо найти нѣсколько точекъ N и провести черезъ нихъ правильную кривую $NNXN$ пересѣкающую (фиг. 139) прямую $SMMM$ въ точкѣ X. Принявъ затѣмъ AH равной SX, надо найти соотвѣтствующее AK, тогда длины, которыя такъ относятся къ принятымъ AJ и AH, какъ опредѣленная по опыту длина AK къ опредѣленной указаннымъ построеніемъ, и будутъ истинными значеніями AJ и AH, которыя и требовалось найти. Послѣ того, какъ онѣ опредѣлены, найдется и сопротивленіе среды въ точкѣ A, ибо оно относится къ силѣ тяжести какъ AH къ $2AJ$. Затѣмъ плотность среды надо увеличивать по пр. 4, и если въ томъ же отношеніи увеличить и сопротивленіе, найденное какъ указано выше, то оно получится точнѣе.

Правило 8. Когда длины AH и HX найдены и желательно получить направленіе прямой AH, по которой надо бросить тѣло съ заданною скоростью, чтобы оно упало въ данную точку K, то слѣдуетъ: въ точкахъ A и K возставить къ горизонтальной плоскости перпендикуляры AC, KF, изъ коихъ AC направленъ внизъ и равенъ AJ или $\frac{1}{2}$ HX; на ассимптотахъ AK, KF построить такую гиперболу, сопряженная вѣтвь которой проходитъ черезъ точку C, точкою A какъ центромъ и радіусомъ AH описать кругъ, пересѣкающій эту гиперболу въ точкѣ H, — тѣло, брошенное по прямой AH, упадетъ въ точку K. Ибо длина AH задана, поэтому точка H лежитъ гдѣ-либо на кругѣ, описанномъ какъ сказано выше; если провести CH пересѣкающую соотвѣтственно AK и KF въ E и F, то по параллельности CH и MX и равенству $AC = AJ$ будетъ $AE = AM$ и, слѣдовательно, $AE = KN$. Но

$$CE : AE = FH : KN$$

слѣдовательно

$$CE = FH.$$

Значитъ точка H лежитъ на гиперболѣ, описанной на ассимптотахъ AK и KF, и такой, что сопряженная съ нею вѣтвь проходитъ черезъ точку C, т.-е. эта точка H находится въ пересѣченіи сказаннаго круга и этой гиперболы. Необходимо также замѣтить, что это построеніе выполняется одинаково горизонтальная ли прямая AK или наклонная, и что въ виду пересѣченія круга и гиперболы въ двухъ точкахъ H и h получаются два угла NAH и NAh; при самомъ исполненіи чертежа достаточно провести только кругъ, а затѣмъ приложить неопредѣленной длины линейку CH такъ, чтобы она проходила черезъ точку C и чтобы отрѣзокъ ея FH, заключенный между кругомъ и прямою FK, равнялся бы отрѣзку CE, заключенному между точкою C и прямою AK.

Что сказано о гиперболахъ, легко прилагается и къ параболамъ. Пусть $XAGK$ (фиг. 148) представляетъ такую параболу, имѣющую своею касательною въ точкѣ X прямую XV, что ея ординаты AJ и GV пропорціональны $n^{ой}$ степени абсциссъ XJ^n и XV^n. Если провести XT, GT, AH, причемъ XT параллельно VG, прямыя же GT и AH касаются параболы въ точкахъ G и A, то тѣло, брошенное съ надлежащею скоростью изъ точки A по направленію прямой AH, опишетъ эту параболу, когда плотность среды во всякомъ мѣстѣ G обратно пропорціональна касательной GT. Скорость въ точкѣ G такая же, съ которою тѣло шло бы въ средѣ не сопротивляющейся по обыкновенной параболѣ, имѣющей своею вершиною G, діаметромъ продолженную внизъ прямую VG и параметромъ $\frac{2GT^2}{(n^2-n)VG}$; сопротивленіе же въ точкѣ G будетъ относиться къ силѣ тяжести какъ

$$GT : \frac{2n^2-2n}{n-2} . VG.$$

Поэтому, если NAK представляетъ горизонтальную прямую и если, сохраняя плотность среды въ точкѣ A и скорость, съ которою тѣло бросается, какъ бы то ни было измѣнять уголъ NAH, то длины AH, AJ, HX останутся безъ измѣненія и, слѣдовательно, найдется точка касанія X и положеніе прямой XJ; принимая затѣмъ:

$$VG : AJ = XV^n : XJ^n$$

можно опредѣлить всѣ точки G параболической кривой, черезъ которыя проходитъ брошенное тѣло.

ОТДѢЛЪ III.

О движеніи тѣлъ при сопротивленіи частью пропорціональномъ первой степени скорости, частью—второй.

Предложеніе XI. Теорема VIII.

Если тѣло, испытывая сопротивленіе частію пропорціональное первой степени скорости частію второй, движется въ однородной средѣ по инерціи, и времена взяты въ прогрессіи ариѳметической, то количества обратно пропорціональныя скорости, сложенныя съ нѣкоторою постоянною величиною, составятъ прогрессію геометрическую.

При центрѣ C и взаимно перпендикулярныхъ ассимптотахъ $CADd$ и CH (фиг. 149) описывается гипербола BEe, и пусть AB, DE, de параллельны ассимптотѣ. На ассимптотѣ CD задаются точки G и A; если представить время равномѣрно возрастающей гиперболическою площадью $ABED$, то я утверждаю, что скорость можетъ быть представлена длиною DF, коей обратная DG сложенная съ заданною CG образуетъ длину CD, возрастающую въ геометрической прогрессіи.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть площадка $DEed$ представляетъ постоянное весьма малое приращеніе времени, то Dd будетъ обратно пропорціонально DE, т.-е. прямо пропорціонально CD. Уменьшеніе же $\frac{1}{GD}$ (по лем. II этой книги) равное $\frac{Dd}{GD^2}$ будетъ пропорціонально $\frac{CD}{GD^2}$, т.-е. $\frac{CG+GD}{GD^2}$ или $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GD^2}$. Слѣдовательно, когда время $ABED$ возрастаетъ равномѣрно отъ присоединенія постоянныхъ частицъ $EDde$, величина $\frac{1}{GD}$ убываетъ въ такомъ же отношеніи какъ и скорость, ибо уменьшеніе скорости пропорціонально сопротивленію, которое по предположенію состоитъ изъ суммы двухъ членовъ—одного пропорціональнаго скорости, другого квадрату ея; уменьшеніе же величины $\frac{1}{GD}$ пропорціонально суммѣ количествъ $\frac{1}{GD}$ и $\frac{CG}{GD^2}$, изъ

нихъ первое есть само $\frac{1}{GD}$, второе же $\frac{CG}{GD^2}$ пропорціонально $\frac{1}{GD^2}$; поэтому величина $\frac{1}{GD}$, по подобію ея убыванія, пропорціональна скорости. Если же количество GD, обратно пропорціональное $\frac{1}{GD}$, увеличить на постоянную величину CG, то сумма CD, при равномѣрномъ возрастаніи времени $ABDE$, будетъ возрастать въ геометрической прогрессіи [145]).

Слѣдствіе 1. Слѣдовательно, если при заданныхъ точкахъ A и G время представляется гиперболическою площадью $ABED$, то скорость представится черезъ $\frac{1}{GD}$ обратную съ GD.

Слѣдствіе 2. Беря отношеніе GD къ GA равнымъ отношенію начальной скорости къ скорости по прошествіи какого-либо времени $ABDE$ найдемъ точку G, когда же она найдена, то найдется и скорость въ концѣ любого заданнаго времени.

Предложеніе XII. Теорема XI.

При тѣхъ же предположеніяхъ утверждаю: что если брать пройденныя пространства въ ариѳметической прогрессіи, то скорости, увеличенныя на нѣкоторую постоянную величину, составятъ прогрессію геометрическую.

На ассимптотѣ CD берется точка (фиг. 150) R и возставляется перпендикуляръ RS пересѣкающій гиперболу въ точкѣ S; пусть пройденное

---

[145]) Уравненіе движенія въ этомъ случаѣ можетъ быть написано, при само собою понятныхъ обозначеніяхъ, такъ:

$$m\frac{dv}{dt} = -(k_1 v + k_2 v^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Полагая: $k_1 = mn_1$, $k_2 = mn_2$ будетъ имѣть:

$$-\frac{dv}{n_1 v + n_2 v^2} = dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

откуда слѣдуетъ:

$$\frac{d\left(\frac{n_1}{v} + n_3\right)}{\frac{n_1}{v} + n_2} = n_1 d\,t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

и по интегрированіи:

$$n_2 + \frac{n_1}{v} = \left(n_2 + \frac{n_1}{v_0}\right)e^{n_1 t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

гдѣ черезъ v_0 обозначена скорость въ моментъ $t = 0$.

Формула (4) и выражаетъ высказанную теорему.

пространство представляется гиперболическою площадью $RSED$, тогда скорость будетъ пропорціональна такой длинѣ GD, которая, будучи сложена съ постоянною длиною CG, образуетъ длину CD убывающую въ геометрической прогрессіи, когда пространство $RSED$ возрастаетъ въ ариѳметической. Ибо, при постоянномъ приращеніи $EDde$ пространства, отрѣзочекъ Dd, представляющій уменьшеніе длины GD, обратно пропорціоналенъ ED, слѣдовательно, прямо пропорціоналенъ CD, т.-е. суммѣ $GD+GC$.

Но уменьшеніе скорости въ продолженіе каждаго весьма малаго промежутка времени обратно ей пропорціональнаго, въ теченіе котораго проходится постоянная частица $DdeE$ пути, пропорціонально сопротивленію и этому времени, т.-е. это уменьшеніе прямо пропорціонально суммѣ двухъ величинъ, изъ коихъ одна пропорціональна скорости, другая квадрату ея и обратно пропорціонально скорости, слѣдовательно, это уменьшеніе прямо пропорціонально суммѣ двухъ количествъ, изъ коихъ одно постоянное, другое пропорціональное скорости [146]). Такимъ образомъ, уменьшеніе скорости и уменьшеніе длины GD слѣдуютъ одинаковому закону, при одинаковомъ же законѣ своихъ уменьшеній сами убывающія количества пропорціональны, т.-е. скорость и длина GD.

Слѣдствіе 1. Если скорость представлять длиною GD, то пройденное пространство будетъ пропорціонально гиперболической площади $DESR$.

Слѣдствіе 2. Если принять гдѣ бы то ни было точку R, то точка G получится, взявъ GR къ GD въ отношеніи начальной скорости къ скорости послѣ прохожденія какого-либо пространства $RSED$. Послѣ того какъ точка G найдена, найдется и пройденное пространство по заданной скорости и наоборотъ.

Слѣдствіе 3. Такъ какъ (пр. XI) при заданіи времени находится скорость, по этому же предложенію по заданной скорости находится пространство, то пространство найдется и по заданному времени и наоборотъ.

---

[146]) Это разсужденіе равносильно тому, когда мы, написавъ равенство: $dt=\frac{dx}{v}$, получаемъ изъ урав. (2) прим. (145) такое

$$-\frac{vdv}{n_1v+n_2v^2}=dx$$

или по сокращеніи:

$$\frac{dv}{n_1+n_2v}=-dx$$

изъ котораго слѣдуетъ

$$n_1+n_2v=(n_1+n_2v_0)e^{-n_2(x-x_0)}.$$

Предложеніе XIII. Теорема X.

Предполагая, что тѣло, находящееся подъ дѣйствіемъ силы тяжести направленной внизъ, движется прямо вверхъ или внизъ и что оно испытываетъ сопротивленіе частію пропорціональное первой степени скорости, частію второй, я утверждаю: что если для круга или гиперболы провести черезъ конецъ діаметра прямую параллельную діаметру съ первымъ сопряженному и перпендикулярному ему, и представлять скорость отрѣзками этой прямой отъ заданной на ней точки, то времена будутъ представляться площадями секторовъ, ограниченныхъ прямыми, проводимыми изъ центра къ концамъ сказанныхъ отрѣзковъ, и обратно.

Случай 1. Положимъ сперва, что тѣло движется вверхъ; при центрѣ D (фиг. 151), какимъ-либо радіусомъ DB описывается четверть круга $BETF$ и черезъ конецъ діаметра B проводится неограниченная прямая BAP параллельная полудіаметру DF. На ней задается точка A и берется отрѣзокъ AP пропорціональный скорости. Такъ какъ сопротивленіе частію пропорціонально скорости, частію квадрату ея, то пусть полное сопротивленіе пропорціонально

$$AP^2 + 2BA \cdot AP.$$

Проводятся прямыя DA и DP пересѣкающія кругъ въ точкахъ E и T; пусть сила тяжести представляется длиною DA^2, т.-е., что отношеніе силы тяжести къ сопротивленію равно

$$DA^2 : (AP^2 + 2BA \cdot AP),$$

тогда полное время движенія вверхъ будетъ пропорціонально площади кругового сектора EDT.

Пусть прямая DVQ отсѣкаетъ отъ скорости AP ея приращеніе PQ и отъ сектора DET приращеніе DTV, соотвѣтствующія заданному приращенію времени. Это измѣненіе скорости PQ будетъ пропорціонально суммѣ силъ тяжести DA^2 и сопротивленія $AP^2 + 2BA \cdot AP$, т.-е. пропорціонально DP^2 (эл. кн. 2 пр. 12). Поэтому площадь DPQ пропорціональная PQ пропорціональна и DP^2, площадь же DTV относящаяся къ площади DPQ какъ $DT^2 : DP^2$ будетъ пропорціональна постоянной DT^2. Слѣдовательно, площадь EDT, отъ отнятія частицъ DTV постоянной величины, будетъ убывать равномѣрно, подобно будущему времени, поэтому эта площадь пропорціональна полному времени движенія вверхъ [147]).

Случай 2. Если скорость при движеніи вверхъ представлять, какъ и раньше, длиною AP (фиг. 152), и принять сопротивленіе пропорціональ-

[147]) Направивъ ось z вертикально вверхъ, и полагая коэффиціентъ

нымъ $AP^2 + 2BA \,.\, AP$, и если сила тяжести окажется меньше такой, которую можно бы было представить длиною DP^2, то надо взять длину

сопротивленія $k_1 = 2mn_1$ и $k_2 = mn_2$, гдѣ m есть масса тѣла, будемъ имѣть при движеніи вверхъ уравненіе:

$$\frac{dv}{dt} = -(g + 2n_1v + n_2v^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Пусть будетъ

$$n_1 = a \,.\, n_2 \quad \text{и} \quad g = b^2 \,.\, n_2,$$

тогда предыдущее уравненіе напишемъ такъ:

$$\frac{dv}{(v+a)^2 + b^2 - a^2} = -\, n_2dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Величина a у Ньютона представлена длиною AB и въ дальнѣйшемъ онъ различаетъ два случая: 1) когда $b^2 - a^2 > 0$ и 2) когда $b^2 - a^2 < 0$.

Въ первомъ случаѣ онъ беретъ $b = DA$ (фиг. 151) и полагая

$$\overline{BD}^2 = c^2 = b^2 - a^2$$

строитъ кругъ $BETF$, площадь сектора коего и будетъ пропорціональна времени.

Дѣйствительно уравненіе (2) въ этомъ случаѣ будетъ:

$$\frac{dv}{c^2 + (v+a)^2} = = n_2dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

изъ него слѣдуетъ:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{v+a}{c}\right) - \operatorname{arctg}\frac{a}{c} = cn^2[T - t]. \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

гдѣ черезъ T обозначено время подъема до наивысшей точки, т.-е. той, гдѣ скорость $v = 0$. Это время опредѣляется изъ равенства

$$\operatorname{arctg}\frac{v_0 + a}{c} - \operatorname{arctg}\frac{a}{c} = cn^2T \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

слѣдующаго изъ (3), сдѣлавъ

$$t = 0 \quad \text{и} \quad v = v_0.$$

Равенства (3) и (4) и представлены Ньютономъ геометрически, причемъ вмѣсто угловъ онъ разсматриваетъ пропорціональныя имъ площади секторовъ.

Во второмъ случаѣ Ньютонъ беретъ (фиг. 152) длину $c = BD$ такъ, чтобы было:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

тогда уравненіе (2) будетъ:

$$\frac{dv}{(v+a)^2 - c^2} = -\, n_2dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2')$$

и вмѣсто форм. (3) будемъ имѣть:

$$\operatorname{sect.tghyp}\left(\frac{v+a}{c}\right) - \operatorname{sect.tghyp}\left(\frac{a}{c}\right) = cn_2[T - t]. \; . \; . \; . \quad (3')$$

т.-е. вмѣсто круговыхъ секторовъ — гиперболическія.

BD такъ, чтобы разность $AB^2 - BD^2$ была пропорціональна силѣ тяжести; пусть DF перпендикулярно и равно BD. На осяхъ BD и DF описывается гипербола, имѣющая своею вершиною точку F, и пересѣкающая DA въ E, DP въ T и DQ въ V,—полное время движенія вверхъ будетъ пропорціонально гиперболическому сектору TDE.

Ибо уменьшеніе скорости PQ, происходящее въ продолженіе заданнаго весьма малаго промежутка времени, пропорціонально суммѣ силъ—тяжести $AB^2 - BD^2$ и сопротивленія $AP^2 + 2BA \,.\, AP$, т.-е. пропорціонально $BP^2 - BD^2$. Но площадь DTV относится къ площади DPQ какъ $DT^2 : DP^2$, поэтому, если на DF опустить перпендикуляръ GT, то такъ какъ

$$GT^2 = GD^2 - DF^2$$

и

$$DT : DP = GT : BD = GD : BP$$

то

$$DT^2 : DP^2 = GT^2 : BD^2 = (GD^2 - DF^2) : BD^2 = GD^2 : BP^2 =$$
$$= [GD^2 - (GD^2 - DF^2)] : (BP^2 - BD^2) = DF^2 : (BP^2 - BD^2).$$

Такъ какъ площадь DPQ пропорціональна PQ, т.-е. $BP^2 - BD^2$, то площадь DTV будетъ пропорціональна постоянной DF^2. Слѣдовательно, площадь EDT убываетъ равномѣрно, уменьшаясь въ продолженіе каждаго изъ весьма малыхъ равныхъ промежутковъ времени на равныя же весьма малыя частицы DTV, поэтому эта площадь пропорціональна времени.

Случай 3. Пусть AP (фиг. 153), есть скорость тѣла при его движеніи внизъ, $AP^2 + 2BA \,.\, AP$ сопротивленіе, $BD^2 - AB^2$ сила тяжести, уголъ DBA предполагается прямымъ. Если описать равнобочную гиперболу $BETV$, коей центръ D, главная вершина B и которая пересѣкаетъ продолженія прямыхъ DA, DP и DQ въ E, T и V, то секторъ DET этой гиперболы будетъ пропорціоналенъ полному времени паденія.

Ибо, приращеніе скорости PQ и пропорціональная ему площадь DPQ пропорціональна избытку тяжести надъ сопротивленіемъ, т.-е.

$$BD^2 - AB^2 - 2BA \,.\, AP - AP^2 \quad \text{или} \quad BD^2 - BP^2.$$

Площадь же DTV относится къ площади DPQ какъ

$$DT^2 : DP^2 = GT^2 : BP^2 = (GD^2 - BD^2) : BP^2 = GD^2 : BD^2 =$$
$$= BD^2 : (BD^2 - BP^2).$$

А такъ какъ площадь DPQ пропорціональна $BD^2 - BP^2$, то площадь DTV будетъ пропорціональна постоянной BD^2. Слѣдовательно, площадь EDT возрастаетъ равномѣрно, увеличиваясь за каждый изъ весьма малыхъ равныхъ между собою промежутковъ времени на постоянную величину DTV, такимъ образомъ эта площадь пропорціональна времени паденія.

Слѣдствіе. Если изъ центра D радіусомъ DA описать дугу круга At проходящую черезъ точку A и подобную дугѣ ET, т.-е. стягивающую уголъ ADT, то скорость AP такъ относится къ скорости, которую въ средѣ не сопротивляющейся тѣло въ теченіе времени EDT утрачивало бы при движеніи вверхъ или пріобрѣтало при движеніи внизъ, какъ площадь треугольника DAP относится къ площади сектора DAt, и значитъ эта скорость находится по заданному времени. Ибо скорость въ средѣ не сопротивляющейся пропорціональна времени, а значитъ и сказанному сектору, въ средѣ же сопротивляющейся треугольнику, въ любой же средѣ, когда эти скорости весьма малы, ихъ отношеніе приближается къ равенству единицѣ подобно тому, какъ площадь сектора къ площади треугольника.

Поученіе.

Также можетъ быть доказанъ тотъ случай при движеніи тѣла вверхъ, когда тяжесть меньше такой силы, которая можетъ быть представлена черезъ DA^2 или AB^2+BD^2, и больше нежели такая, которую можно представить черезъ AB^2-BD^2, и когда ее надо представить черезъ AB^2. Но я перехожу къ другому.

Предложеніе XIV. Теорема XI.

При тѣхъ же предположеніяхъ я утверждаю, что пространство проходимое при движеніи вверхъ или внизъ пропорціонально разности двухъ площадей изъ коихъ первая есть та, которою представлялось время, вторая же возрастаетъ или убываетъ въ ариѳметической прогрессіи, причемъ силы составленныя изъ тяжести и сопротивленія берутся въ прогрессіи геометрической.

Длина AC (фиг. 154) берется пропорціональной силѣ тяжести, длина AK—сопротивленію, причемъ точки C и K берутся по одну сторону отъ точки A, когда тѣло движется внизъ и—по разныя, когда оно движется вверхъ; перпендикуляръ Ab возставляется такой длины, чтобы было:

$$Ab : DB = DB^2 : 4BA \,.\, AC.$$

Если, построивъ гиперболу bN имѣющую своими взаимно перпендикулярными ассимптотами CK и CH, проводить KN перпендикулярно къ CK, то площадь $AbNK$ будетъ возрастать или убывать въ ариѳметической прогрессіи, когда сила CK возрастаетъ въ прогрессіи геометрической [148]).

---

148) Уравненіе (1) прим. 147 на основаніи равенства $dz = vdt$ напишется:

$$\frac{vdv}{n_2v^2+2n_1v+g} = -dz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Этому уравненію можно придать видъ:

Я утверждаю, что разстоянiе тѣла до наивысшаго его положенiя будетъ пропорцiонально избытку площади $AbNK$ надъ площадью DET.

Такъ какъ AK пропорцiонально сопротивленiю, т.-е. $AP^2 + 2BA \cdot AP$, то возьмемъ какую-либо постоянную длину Z и положимъ

$$AK = \frac{AP^2 + 2BA \cdot AP}{Z},$$

тогда, (по леммѣ II этой книги) KL—приращенiе длины AK будетъ выражаться такъ:

$$KL = \frac{2AP \cdot PQ + 2BA \cdot PQ}{Z} = \frac{2BP \cdot PQ}{Z}$$

приращенiе же $KLON$ площади $AbNK$ будетъ:

$$KLON = \frac{2BP \cdot PQ}{Z} \cdot OL = \frac{BP \cdot PQ \cdot BD^3}{2Z \cdot CK \cdot AB}.$$

Случай 1. Когда тѣло движется вверхъ, и сила тяжести пропорцiональна $AB^2 + BD^2$, причемъ BET есть кругъ (фиг. 154 а), то длина пропорцiональная тяжести будетъ:

$$AC = \frac{AB^2 + BD^2}{Z}$$

и

$$DP^2 = AP^2 + 2BA \cdot AP + AB^2 + BD^2 = AK \cdot Z + AC \cdot Z = CK \cdot Z,$$

поэтому площадь DTV будетъ относиться къ площади DPQ какъ DT^2 или DB^2 къ $CK \cdot Z$.

Случай 2. Если тѣло движется вверхъ и тяжесть пропорцiональна $AB^2 - BD^2$, то линiя AC (фиг. 154б), будетъ

$$AC = \frac{AB^2 - BD^2}{Z}$$

и

$$DT^2 : DP^2 = DF^2 : (BP^2 - BD^2) = BD^2 : (BP^2 - BD^2) =$$
$$= BD^2 : (AP^2 + 2BA \cdot AP + AB^2 - BD^2) = DB^2 : (AK \cdot Z + AC \cdot Z) =$$
$$= BD^2 : CK \cdot Z,$$

слѣдовательно, площадь DTV будетъ относиться къ площади DPQ какъ

$$BD^2 : CK \cdot Z.$$

$$\frac{(2n_2 v + 2n_1)dv}{n_2 v^2 + 2n_1 v + g} - \frac{2n_1 dv}{n_2 v^2 + 2n_1 v + g} = -2n_2 dz.$$

Откуда слѣдуетъ

$$\operatorname{Log} \frac{n_2 v^2 + 2n_1 v + g}{g} - 2n_1 S = 2n_2 [H - z] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

гдѣ черезъ S обозначена та круговая или гиперболическая площадь, которою представляется время въ прим. (147), и черезъ H наибольшая высота подъема. Равенство (2) и выражаетъ высказанную теорему.

Случай 3. На основаніи такого же разсужденія, когда тѣло движется внизъ и поэтому тяжесть пропорціональна $BD^2 - AB^2$, и линія AC на (фиг. 156 в) будетъ

$$AC = \frac{BD^2 - AB^2}{Z},$$

то, какъ и выше, площадь

$$DTV : DPQ = BD^2 : CK \,.\, Z.$$

Итакъ, площади эти всегда находятся въ этомъ отношеніи.

Если вмѣсто площади DTV, которою представляется всегда самому себѣ равное весьма малое приращеніе времени, написать какой-либо опредѣленный прямоугольникъ положимъ $BD \,.\, m$, то площадь DPQ равная $\frac{1}{2} BD \,.\, PQ$ будетъ относиться къ $BD \,.\, m$ какъ $CK \,.\, Z : BD^2$.
Поэтому будетъ:

$$PQ \,.\, BD^3 = 2BD \,.\, m \,.\, CK \,.\, Z.$$

и вышенайденное приращеніе $KLON$ площади $AbNK$ будетъ

$$KLON = \frac{PB \,.\, BD \,.\, m}{AB}.$$

Отнимая приращеніе DVT площади DET

$$DVT = BD \,.\, m$$

останется:

$$KLON - DVT = \frac{AP \,.\, BD \,.\, m}{AB}.$$

Но разность приращеній равна приращенію разности самихъ площадей, которое такимъ образомъ есть $\frac{AP}{AB} \,.\, m \,.\, BD$; а такъ какъ $\frac{BD}{AB} \,.\, m$ есть величина постоянная, то это приращеніе пропорціонально AP, т.-е. скорости, а значитъ и весьма малому приращенію пространства описываемаго тѣломъ при движеніи вверхъ или внизъ. Слѣдовательно, упомянутая разность площадей и это пространство, коихъ приращенія пропорціональны и которыя совмѣстно начинаются или исчезаютъ, пропорціональны между собою.

Слѣдствіе. Если обозначить черезъ M длину получаемую отъ раздѣленія площади DET на длину BD, и длину V взять такъ, чтобы было:

$$V : M = DA : DE,$$

то пространство, проходимое тѣломъ при движеніи вверхъ или внизъ въ сопротивляющейся средѣ, будетъ такъ относиться къ пространству, которое тѣло прошло бы въ продолженіе того же времени въ средѣ несопротивляющейся, свободно падая изъ состоянія покоя, какъ упомянутая выше

разность площадей относится къ $\frac{BD \,.\, V^2}{AB}$ и значитъ, когда время задано, то пространство найдется. Ибо, въ средѣ не сопротивляющейся пройденное пространство пропорціонально квадрату времени, т.-е. V^2, а такъ какъ BD и AB постоянныя, то оно пропорціонально и $\frac{BD \,.\, V^2}{AB}$.

Но

$$\frac{BD^2\ V^2}{AB} = \frac{DA^2 \,.\, BD \,.\, M^2}{DE^2 \,.\, AB},$$

и такъ какъ приращеніе M есть m, то приращеніе предыдущей площади есть

$$2\frac{DA^2 \,.\, BD}{DE^2 \,.\, AB} \,.\, M \,.\, m.$$

Но это приращеніе относится къ приращенію разности площадей $AbNK - DET$, т.-е. къ $\frac{AP \,.\, BD \,.\, m}{AB}$ какъ:

$$\frac{DA^2 \,.\, BD \,.\, M}{DE^2} : \frac{1}{2} BD \,.\, AP = \frac{DA^2}{DE^2} \,.\, DET : DAP$$

это же отношеніе, когда площади DET и DAP весьма малы, имѣетъ своимъ предѣломъ единицу. Слѣдовательно, площадь $\frac{BD \,.\, V^2}{AB}$ и разность площадей $AbNK - DET$, когда всѣ эти площади весьма малы, имѣютъ равныя приращенія, и значитъ равны между собою. Такъ какъ скорости, а поэтому и одновременно описываемыя пространства, въ обѣихъ средахъ при началѣ движенія внизъ или при концѣ движенія вверхъ приближаются къ равенству, т.-е. находятся въ такомъ же другъ къ другу отношеніи какъ площадь $\frac{BD \,.\, V^2}{AB}$ къ разности площадей $AbNK - DET$, и такъ какъ пространство проходимое въ средѣ несопротивляющейся постоянно пропорціонально $\frac{BD \,.\, V^2}{AB}$, пространство же проходимое въ средѣ сопротивляющейся постоянно пропорціонально разности площадей $AbNK—DET$, то необходимо, чтобы пространства, проходимыя въ той и другой средѣ въ любые равные промежутки времени, относились бы другъ къ другу какъ площадь $\frac{BD \,.\, V^2}{AB}$ относится къ разности площадей $AbNK - DET$.

Поученіе.

Сопротивленіе испытываемое шарами при движеніи въ жидкости происходитъ частію отъ ея сцѣпленія, частію отъ тренія и частію отъ плотности. Та часть сопротивленія, которая происходитъ отъ плотности жидкости, какъ уже нами сказано, пропорціональна квадрату скорости, вторая часть, которая происходитъ отъ сцѣпленія жидкости постоянна, т.-е. ея

дѣйствіе пропорціонально приращенію времени, поэтому слѣдовало бы перейти къ разсмотрѣнію движенія тѣлъ, испытывающихъ сопротивленіе частію постоянное, частію пропорціональное квадрату скорости. Но достаточно приложить уже изложенное въ предложеніяхъ VIII и IX и ихъ слѣдствіяхъ къ этому изслѣдованію, такъ какъ въ нихъ можно замѣнить происходящее отъ силы тяжести постоянное сопротивленіе испытываемое тѣломъ при движеніи вверхъ, постоянною частію сопротивленія жидкости, происходящей отъ ея сцѣпленія, когда тѣло движется по инерціи. Если тѣло движется прямо вверхъ, то эту часть сопротивленія надо приложить къ силѣ тяжести, если-же тѣло падаетъ внизъ — то вычесть. Затѣмъ, слѣдовало бы перейти къ разсмотрѣнію движенія тѣлъ, испытывающихъ сопротивленіе частію постоянное, частію пропорціональное первой степени скорости, частію второй. Путь указанъ въ предложеніяхъ XIII и XIV, въ которыхъ стоитъ только или замѣнить силу тяжести постоянною частію силы сопротивленія, происходящей отъ сцѣпленія среды, или же приложить ее какъ и раньше къ силѣ тяжести. Но я перехожу къ другому.

ОТДѢЛЪ IV.

О круговомъ обращеніи тѣлъ въ сопротивляющейся средѣ.

Лемма III.

Пусть PQR есть спираль, пересѣкающая всѣ радіусы, такіе какъ SP, SQ, SR и т. д. подъ однимъ и тѣмъ же угломъ; проводится прямая PT касающаяся спирали въ какой-либо точкѣ P и пересѣкающая радіусъ SQ въ T, полюсъ S соединяется прямою SO съ точкою O пересѣченія нормалей PO и QO къ спирали. Я утверждаю, что когда точки P и Q, приближаясь другъ къ другу, совмѣстятся, то въ предѣлѣ уголъ PSO обратится въ прямой и предѣльное отношеніе прямоугольника $2PS \cdot TQ$ къ PQ^2 равно единицѣ.

Если изъ прямыхъ угловъ OPQ, OQR (фиг. 155) вычесть равные углы SPQ, SQR, то останутся равные углы OPS и OQS, поэтому кругъ, проходящій черезъ точки O, S, P, пройдетъ и черезъ точку Q. Когда точки P и Q совпадутъ, то этотъ кругъ будетъ касаться спирали въ мѣстѣ совпаденія и, значитъ, будетъ пересѣкать прямую OP перпендикулярно, слѣдовательно, эта прямая будетъ діаметромъ круга, а уголъ OSP вписанный въ полукружность — прямымъ.

На OP опускаются перпендикуляры QD и SE; предѣльныя отношенія линій будутъ таковы:

$$TQ : PD = TS : PE = PS : PE = 2PO : 2PS$$

точно также

$$PD : PQ = PQ : 2PO.$$

Отсюда слѣдуетъ: [149])

$$2PS \,.\, TQ = 2PO \,.\, PD = PQ^2.$$

Предложеніе XV. Теорема XII.

Если плотность среды въ отдѣльныхъ мѣстахъ обратно пропорціональна ихъ разстояніямъ до неподвижнаго центра, и если центростремительная сила пропорціональна квадрату плотности, то я утверждаю, что тѣло можетъ обращаться по спирали, пересѣкающей подъ постояннымъ угломъ всѣ радіусы, исходящіе изъ этого центра.

Полагая то же самое, какъ и въ предыдущей леммѣ продолжаемъ SQ до V такъ, чтобы SV было равно SP (фиг. 156). Пусть въ теченіе какого-либо промежутка времени тѣло, двигаясь въ сопротивляющейся средѣ, описываетъ весьма малую дугу PQ, въ продолженіе же двойного такого промежутка дугу PR. Утраты въ длинѣ этихъ дугъ, происходящія отъ сопротивленія, иначе утраты по сравненію съ дугами, которыя были бы описаны въ средѣ несопротивляющейся въ продолженіе тѣхъ же промежутковъ времени, относятся другъ къ другу какъ квадраты этихъ промежутковъ, такъ что утрата въ длинѣ дуги PQ составляетъ одну четверть отъ утраты въ длинѣ дуги PR; поэтому, если взять площадь QSr равную PSQ, то утрата въ длинѣ дуги PQ будетъ равна половинѣ длины отрѣзочка Rr, слѣдовательно, отношеніе силы сопротивленія къ центростремительной будетъ равно отношенію отрѣзочковъ $\frac{1}{2}Rr$ и TQ, образуемыхъ одновременно [150]).

---

[149]) Если принять точку S за полюсъ и какую-либо постоянную прямую за полярную ось, то уравненіе данной логариѳмической спирали будетъ $r = ae^{n\theta}$. Точка O есть центръ кривизны для точки P этой спирали. Обозначая черезъ α уголъ SPO между радіусомъ векторомъ и нормалью, будемъ имѣть:

$$\operatorname{tg}\alpha = n$$

и

$$\rho = PO = r \,.\, \sqrt{1 + n^2}$$

и приведенная въ текстѣ формула равносильна такой

$$2r \,.\, TQ = r^2(1 + n^2)\,d\theta^2.$$

[150]) Ньютонъ сравниваетъ здѣсь движеніе въ средѣ сопротивляющейся съ движеніемъ подъ дѣйствіемъ той же центростремительной силы при отсутствіи сопротивленія, причемъ онъ для нахожденія отношенія между

Такъ какъ центростремительная сила, дѣйствующая на тѣло въ P, обратно пропорціональна SP^2, и такъ какъ по леммѣ X 1-ой кн. отрѣзочекъ TQ пропорціоналенъ этой силѣ и квадрату времени, въ продолженіе коего описывается дуга PQ (ибо въ этомъ случаѣ сопротивленіемъ, какъ безконечно меньшимъ центростремительной силы, я пренебрегаю), то $TQ \,.\, SP^2$, т.-е. по предыдущей леммѣ $\frac{1}{2} PQ^2 \,.\, SP$, пропорціонально квадрату времени, слѣдовательно, время пропорціонально $PQ \,.\, \sqrt{SP}$, и скорость тѣла, съ которою въ это время описывается дуга PQ, будетъ пропорціональна

$$\frac{PQ}{PQ \,.\, \sqrt{SP}} = \frac{1}{\sqrt{SP}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

силами беретъ отношеніе отклоненій, производимыхъ этими силами въ продолженіе безконечно малаго промежутка времени. Обозначимъ этотъ промежутокъ черезъ τ, скорость тѣла въ точкѣ P черезъ v, и ускоренія отъ силы сопротивленія—черезъ w, проекцію ускоренія центростремительной силы на касательную—черезъ w_1, полную же величину этой силы—черезъ $\frac{\mu^2}{r^2}$, массу тѣла будемъ считать равной 1. Тогда имѣемъ:

$$PQ = v\tau - \frac{1}{2} w_1 \tau^2 - \frac{1}{2} w \tau^2$$

$$PR = v \,.\, 2\tau - \frac{1}{2} w_1 (2\tau)^2 - \frac{1}{2} w (2\tau)^2 = 2v\tau - 2w_1\tau^2 - 2w_2\tau^2.$$

Отклоненіе, производимое силою сопротивленія среды, Ньютонъ представляетъ длиною $\frac{1}{2} Rr$, такъ что

$$\frac{1}{2} Rr = \frac{1}{2} w\tau^2;$$

чтобы получить эту длину, надо вообразить, что изъ точки P выходитъ тѣло, находящееся подъ дѣйствіемъ той же центростремительной силы, но сопротивленія не испытывающее, съ такою скоростью, что въ продолженіе промежутка времени τ оно проходитъ тотъ же самый путь PQ. Очевидно, что эта скорость

$$v_1 = v - \frac{1}{2} w\tau$$

и тогда дѣйствительно:

$$PQ = v_1\tau - \frac{1}{2} w_1 \tau^2 = v\tau - \frac{1}{2} w\tau^2 - \frac{1}{2} w_1 \tau^2.$$

Въ продолженіе времени 2τ тѣло пройдетъ путь

$$Pr = v_1 \,.\, 2\tau - \frac{1}{2} w_1 (2\tau)^2 = 2v\tau - w\tau^2 - 2w_1\tau^2$$

и, слѣдовательно, будетъ:

$$Rr = Pr - PR = w\tau^2$$

вмѣстѣ съ тѣмъ площадь $PSQ = QSr$, ибо, по предположенію, на тѣло сопротивленіе не дѣйствуетъ.

Дальнѣйшія разсужденія поясненій не требуютъ. Чтобы вмѣсто

т.-е. обратно пропорціональна $\sqrt{SP}$. На основаніи подобнаго разсужденія, скорость, съ которою описывается дуга QR, обратно пропорціональна $\sqrt{SQ}$. Но эти дуги пропорціональны скоростямъ, съ которыми онѣ описываются, т.-е. относятся другъ къ другу какъ $\sqrt{SQ}$ къ $\sqrt{SP}$, иначе какъ SQ къ $\sqrt{SP.SQ}$, по равенству же угловъ $SPQ = SQr$ и равенству площадей $PSQ = QSr$ отношеніе дуги PQ къ Qr равно отношенію SQ къ SP.

Изъ этихъ пропорцій слѣдуетъ, что разность Rr равная $Qr - QR$, будетъ:

$$Rr = \frac{PQ}{SQ}\left[SP - \sqrt{SP.SQ}\right] = \frac{1}{2} VQ . \frac{PQ}{SQ}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

ибо въ предѣлѣ, когда точки P и Q совпадаютъ, отношеніе $SP - \sqrt{SP.SQ}$ къ $\frac{1}{2} VQ$ равно единицѣ. Но такъ какъ происходящая отъ сопротивленія

пропорціональностей получить равенства, стоитъ только замѣтить, что будетъ:

$$TQ = \frac{1}{2}\,\frac{\mu^2}{SP^2} \,.\, \tau^2; \qquad TQ \,.\, SP^2 = \frac{1}{2} PQ^2 \,.\, SP = \frac{1}{2}\mu^2\tau^2$$

отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{PQ^2}{\tau^2} = v^2 = \frac{\mu^2}{SP} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1')$$

На основаніи формулы (4) текста имѣемъ:

$$Rr = \frac{1}{2}\,\frac{OS}{OP} \,.\, \frac{PQ^2}{SP} = w \,.\, \tau^2.$$

Значитъ:

$$w = \frac{1}{2}\,\frac{OS}{OP} \,.\, \frac{PQ^2}{\tau^2} \,.\, \frac{1}{SP} = \frac{1}{2}\,\frac{OS}{OP} \,.\, \frac{v^2}{SP}.$$

Но по предположенію $w = N\Delta v^2$, гдѣ Δ есть плотность среды и N постоянный коэффиціентъ, и такъ какъ

$$\frac{1}{2} OS : OP = \frac{1}{2} n : \sqrt{1 + n^2},$$

то предыдущая формула даетъ:

$$N\Delta = \frac{1}{2}\,\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \,.\, \frac{1}{SP} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Затѣмъ на основаніи форм. (1')

$$w = N\Delta v^2 = \frac{1}{2}\,\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \,.\, \frac{\mu^2}{SP^2} = \frac{1}{2}\,\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \,.\, w_1 \,. \; . \; . \; . \quad (8)$$

Отношеніе же $w : w_1$ есть отношеніе силы сопротивленія къ центростремительной.

утрата длины дуги PQ, или величина Rr вдвое ея бо́льшая, пропорціональна сопротивленію и квадрату времени, то сопротивленіе пропорціонально

$$\frac{Rr}{PQ^2 \cdot SP} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

На основаніи же приведеннаго выше выраженія Rr будетъ:

$$\frac{Rr}{PQ^2 \cdot SP} = \frac{1}{2} \frac{VQ}{PQ \cdot SP \cdot SQ} = \frac{1}{2} \frac{OS}{OP \cdot SP^2}, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (4)$$

ибо въ предѣлѣ при совпаденіи точекъ P и Q, $SP = SQ$, уголъ PVQ прямой и по подобію треугольниковъ PVQ и PSO будетъ:

$$PQ : \frac{1}{2} VQ = OP : \frac{1}{2} OS. \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (5)$$

Такимъ образомъ $\frac{OS}{OP \cdot SP^2}$ пропорціонально сопротивленію, а слѣдовательно, плотности среды въ точкѣ P и квадрату скорости. Исключая пропорціональность квадрату скорости, т.-е. $\frac{1}{SP}$, останется, что плотность среды въ P пропорціональна $\frac{OS}{OP \cdot SP}$. Для заданной спирали отношеніе $\frac{OS}{OP}$ постоянное, значитъ, плотность въ точкѣ P пропорціональна $\frac{1}{SP}$. Слѣдовательно тѣло можетъ обращаться по сказанной спирали въ средѣ, коей плотность обратно пропорціональна разстоянію SP, до центра.

Слѣдствіе 1. Скорость въ любой точкѣ P такова, съ которою тѣло въ средѣ не сопротивляющейся могло бы обращаться подъ дѣйствіемъ такой же центростремительной силы по кругу въ разстояніи отъ центра равномъ SP.

Слѣдствіе 2. Плотность среды при постоянномъ разстояніи SP пропорціональна $\frac{OS}{OP}$, если же это разстояніе не постоянное, то плотность пропорціональна $\frac{OS}{OP \cdot SP}$, поэтому, можно приспособить спираль къ любой плотности среды.

Слѣдствіе 3. Сила сопротивленія въ любомъ мѣстѣ P относится къ центростремительной въ томъ же мѣстѣ какъ $\frac{1}{2} OS : OP$, ибо эти силы относятся какъ $\frac{1}{2} Rr : TQ$, иначе, какъ

$$\frac{1}{4} \frac{VQ \cdot PQ}{SQ} : \frac{1}{2} \frac{PQ^2}{SP},$$

т.-е. какъ $\frac{1}{2} VQ : PQ$, что равно $\frac{1}{2} OS : OP$. Слѣдовательно, когда спираль задана, то найдется отношеніе силы сопротивленія къ центростремительной, и наоборотъ, когда задано это отношеніе, то найдется спираль.

Слѣдствіе 4. Слѣдовательно, тѣло только тогда можетъ обращаться по такой спирали, когда сила сопротивленія меньше, нежели половина центростремительной. Если сопротивленіе будетъ равно половинѣ центро-

стремительной силы, то спираль обратится въ прямую линію PS, и по этой прямой тѣло будетъ падать къ центру со скоростью, которая будетъ относиться къ найденной выше (случай параболы, теор. X, кн. 1-й), скорости движенія въ средѣ не сопротивляющейся какъ $1 : \sqrt{2}$. Время паденія будетъ обратно пропорціонально скорости, и значитъ найдется.

Слѣдствіе 5. Такъ какъ при одинаковомъ разстояніи отъ центра скорость въ движеніи по спирали PQR и по прямой SP одна и та же, длина же спирали находится въ постоянномъ отношеніи къ длинѣ прямой PS, именно, какъ OP къ OS, то время опусканія по спирали и время опусканія по прямой SP находятся въ томъ же отношеніи OP къ OS, и значитъ первое найдется.

Слѣдствіе 6. Если центромъ S и двумя какими-либо заданной длины радіусами описать два круга и, сохраняя ихъ, измѣнять какъ угодно уголъ составляемый спиралью съ радіусомъ SP, то число оборотовъ совершаемыхъ тѣломъ при переходѣ его по спиралямъ отъ одной окружности къ другой, пропорціонально $\frac{PS}{OS}$, т.-е. тангенсу угла, составляемаго спиралью съ радіусомъ PS, время же этихъ оборотовъ пропорціонально $\frac{OP}{OS}$, т.-е. секансу того же угла, иначе, обратно пропорціонально плотности среды.

Слѣдствіе 7. Если тѣло, въ средѣ которой плотность обратно пропорціональна разстоянію мѣстъ до центра, будетъ совершать по нѣкоторой кривой AEB, оборотъ около этого центра, и пересѣчетъ первый радіусъ AS (фиг. 157), въ точкѣ B подъ такимъ же угломъ, какъ раньше въ A, и съ такою скоростью, которая относится къ его скорости въ точкѣ A какъ $\sqrt{BS} : \sqrt{AS}$, то это тѣло будетъ продолжать совершать безчисленное множество подобныхъ обращеній BFC, CGD и т. д., и пересѣкая радіусъ AS выдѣлитъ на немъ отрѣзки AS, BS, CS, DS и т. д., образующіе непрерывную пропорцію (геометрическую прогрессію). Времена оборотовъ будутъ прямо пропорціональны периметрамъ AEB, BFC, CGD орбитъ и обратно, пропорціональны скоростямъ въ ихъ началахъ A, B, C и т. д., т.-е. будутъ пропорціональны $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ и т. д. Наконецъ, полное время, въ продолженіе котораго тѣло достигнетъ до центра, будетъ относиться ко времени перваго оборота какъ сумма всѣхъ членовъ прогрессіи $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ и т. д., продолженной до безконечности къ первому ея члену $AS^{\frac{3}{2}}$, т.-е. пропорціонально частному отъ раздѣленія перваго члена $AS^{\frac{3}{2}}$ этой прогрессіи на разность $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$ или приблизительно пропорціонально $\frac{2}{3} \cdot \frac{AS}{AB}$, отсюда это время и находится весьма просто.

Слѣдствіе 8. Отсюда можно также съ достаточнымъ приближеніемъ вывести движеніе тѣлъ въ серединахъ, коихъ плотность или постоянная,

или же слѣдуетъ какому-либо иному заданному закону. Изъ центра S радіусами SA, SB, SC и т. д. въ геометрической прогрессіи, опиши нѣсколько круговъ и прими приближенно, что продолжительность оборота между периметрами двухъ изъ нихъ въ средѣ, о которой шло дѣло, такъ относится ко времени оборота въ предложенной средѣ какъ средняя между этими кругами плотность этой среды относится къ средней плотности, между тѣми же кругами среды, о которой шло дѣло.. Прими также, что секансъ угла подъ которымъ вышеопредѣленная спираль въ средѣ, о которой шло дѣло, пересѣкаетъ радіусъ AS, находится въ этомъ же отношеніи среднихъ плотностей къ секансу угла, подъ которымъ новая спираль въ предложенной средѣ пересѣкаетъ тотъ же радіусъ, и наконецъ, что полное число оборотовъ между тѣми же двумя кругами, приблизительно пропорціонально тангенсамъ сказанныхъ угловъ. Если это сдѣлать для любой пары круговъ, то движеніе можетъ быть продолжено черезъ всѣ круги. При такомъ предположеніи, можно безъ затрудненій опредѣлить, какимъ образомъ и въ какое время, должны обращаться тѣла въ любой средѣ правильнаго строенія.

Слѣдствіе 9. Хотя такое движеніе какъ эксцентричное, должно бы происходить по спиралямъ приближающимся къ овальной формѣ, но разсматривая, что отдѣльные обороты этихъ спиралей также отстоятъ другъ отъ друга и въ такой же степени приближаются къ центру какъ и для вышеописанной спирали, можемъ себѣ представить, какимъ образомъ происходятъ движенія тѣлъ и по того рода овальнымъ спиралямъ.

Предложеніе XVI. Теорема XIII.

Если плотность среды въ отдѣльныхъ мѣстахъ обратно пропорціональна разстояніямъ мѣстъ до неподвижнаго центра, центростремительная же сила пропорціональна какой-либо степени плотности, то я утверждаю, что тѣло можетъ двигаться по спирали, пересѣкающей всѣ радіусы, проведенные черезъ этотъ центръ подъ постояннымъ угломъ.

Это можетъ быть доказано такимъ же способомъ какъ и предыдущее предложеніе. Именно, если центростремительная сила (фиг. 156) въ P, будетъ обратно пропорціональна степени $(n+1)$ разстоянія SP, т.-е. SP^{n+1}, то какъ и выше получится, что время въ продолженіе коего тѣло описываетъ, какую-либо весьма малую дугу PQ пропорціонально $PQ \,.\, SP^{\frac{n}{2}}$, что сопротивленіе въ P пропорціонально

$$\frac{Rr}{PQ^2 \,.\, SP^n} \quad \text{или} \quad \frac{\left(1-\frac{n}{2}\right)VQ}{PQ \,.\, SP^n \,.\, SQ},$$

т.-е.

$$\frac{\left(1-\frac{n}{2}\right)OS}{OP \,.\, SP^{n+1}}$$

а такъ какъ $\left(1-\frac{n}{2}\right)\frac{OS}{OP}$ величина постоянная, то значитъ сопротивленіе обратно пропорціонально SP^{n+1}, а такъ какъ скорость обратно пропорціональна $SP^{\frac{n}{2}}$, то плотность въ P будетъ обратно пропорціональною SP.

Слѣдствіе 1. Сопротивленіе будетъ относиться къ центростремительной силѣ какъ

$$\left(1-\frac{1}{2}n\right)OS:OP.$$

Слѣдствіе 2. Если центростремительная сила обратно пропорціональна SP^3, то $1-\frac{n}{2}=0$, слѣдовательно, сопротивленіе и плотность среды уничтожаются, какъ это и принято въ предложеніи IX, книги 1-й.

Слѣдствіе 3. Если центростремительная сила будетъ обратно пропорціональна какой-либо степени разстоянія SP, показатель которой больше 3, то положительное сопротивленіе обращается въ отрицательное.

Поученіе.

Какъ въ этомъ предложеніи, такъ и въ предыдущихъ, относящихся до срединъ неодинаковой повсюду плотности, предполагается, что тѣла настолько малы, что нѣтъ надобности разсматривать, что плотность среды съ одной стороны тѣла больше нежели съ другой. Сопротивленіе при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ я предполагаю пропорціональнымъ плотности, поэтому, для срединъ, въ которыхъ сила сопротивленія не пропорціональна плотности, — надо настолько увеличить или уменьшить плотность, чтобы этимъ или поглощался избытокъ сопротивленія или пополнялся недостатокъ.

Предложеніе XVII. Задача IV.

Найти центростремительную силу и сопротивленіе среды, при которыхъ тѣло можетъ обращаться по заданной спирали со скоростью измѣняющеюся по данному закону.

Пусть (фиг. 158), эта спираль PQR. По скорости, съ которою тѣло описываетъ весьма малую дугу PQ, найдется время ея описанія, по отклоненію TQ пропорціональному центростремительной силѣ и квадрату времени найдется сила. Затѣмъ по разности RSr площадокъ PSQ и QSR, описываемыхъ въ равные промежутки времени, найдется замедленіе тѣла, по которому наконецъ и опредѣлится какъ сопротивленіе, такъ и плотность среды.

Предложеніе XVIII. Задача V.

При данномъ законѣ центростремительной силы опредѣлить плотность среды въ отдѣльныхъ мѣстахъ, при которой тѣло описываетъ заданную спираль.

По центростремительной силѣ надо найти скорость въ отдѣльныхъ точкахъ, затѣмъ, по уменьшенію скорости искать плотность среды, какъ въ предыдущемъ предложеніи.

Способъ рѣшенія этихъ вопросовъ объясненъ въ предложеніи X и леммѣ II этой книги, и я не буду задерживать читателя на этихъ сложныхъ изслѣдованіяхъ. Я добавлю лишь кое-что относительно силъ дѣйствующихъ на движущіяся тѣла и относительно плотности и сопротивленія срединъ, въ которыхъ совершаются движенія тѣлъ до сихъ поръ разсмотрѣнныя и подобныя имъ.

ОТДѢЛЪ V.

О плотности и сжатіи жидкостей и о гидростатикѣ.

Опредѣленіе жидкости.

Жидкость есть такое тѣло, коего части уступаютъ всякой какъ бы то ни было приложенной силѣ и, уступая, свободно движутся другъ относительно друга.

Предложеніе XIX. Теорема XIV.

Всѣ части однородной и неподвижной жидкости, заключенной въ какомъ-либо неподвижномъ сосудѣ и сжимаемой отовсюду (не принимая въ разсмотрѣніе уплотненія, тяжести и всякаго рода центростремительныхъ силъ) испытываютъ повсюду одинаковое давленіе и сохраняютъ свои мѣста безъ всякаго движенія, которое произошло бы отъ этого давленія.

Случай 1. Пусть жидкость, заключенная въ сферическомъ сосудѣ ABC (фиг. 159), подвергается повсюду равномѣрному давленію, я утверждаю, что ни одна часть этой жидкости вслѣдствіе такого давленія не станетъ двигаться. Ибо если какая-либо часть D стала бы двигаться, то необходимо чтобы и другія такого же рода части находящіяся всюду въ томъ же разстояніи отъ центра, двигались бы точно такъ же въ то же самое время, ибо всѣ онѣ подвержены равному и подобному давленію и предположено, что устранено всякое движеніе, кромѣ происходящаго отъ давленія. Не могутъ онѣ

и приближаться къ центру, если только жидкость къ центру не уплотняется, какъ это и предположено, не могутъ и удаляться отъ центра, если только жидкость не уплотняется къ окружности, что также противно предположенію. Не могутъ онѣ, сохраняя разстояніе до центра двигаться по какому-либо направленію, ибо по той же причинѣ онѣ должны бы двигаться и по противоположному направленію, двигаться же по противоположнымъ направленіямъ въ то же самое время та же самая часть не можетъ. Слѣдовательно, никакая часть жидкости не будетъ двигаться изъ занимаемаго ею мѣста.

Случай 2. Я утверждаю, что всѣ сферическія части этой жидкости испытываютъ повсюду равное давленіе. Пусть EF есть сферическая часть жидкости, если бы она не испытывала повсюду одинаковаго давленія, то увеличимъ меньшее давленіе, пока давленіе не станетъ повсюду одинаковымъ; по доказанному въ случаѣ первомъ эта часть жидкости будетъ оставаться въ покоѣ. Но ранѣе приложенія добавочнаго давленія эта часть жидкости сохраняла свое мѣсто, отъ приложенія же новаго давленія, по опредѣленію жидкости, она должна бы начать двигаться изъ занимаемаго ею мѣста. Одно другому противорѣчитъ, слѣдовательно, утвержденіе, что сфера не испытываетъ давленія повсюду одинаковаго, ложно.

Случай 3. Я утверждаю кромѣ того, что давленія испытываемыя различными сферическими частями жидкости равны между собою. Ибо, двѣ соприкасающіяся сферическія части по 3-му закону оказываютъ другъ на друга въ точкѣ касанія равныя давленія, по доказанному во 2-мъ случаѣ, давленія одинаковы и по всей ихъ поверхности. Двѣ же сферическія части не соприкасающіяся, такъ какъ ихъ обѣихъ можетъ касаться промежуточная сферическая часть, испытываютъ также равныя давленія.

Случай 4. Я утверждаю, что всѣ части жидкости испытываютъ вездѣ равное давленіе, ибо двухъ любыхъ частей въ любыхъ ихъ точкахъ можетъ касаться сферическая часть, а такъ какъ она повсюду испытываетъ одинаковое давленіе, то и взаимно, по 3-му закону, давленіе на сказанныя части жидкости такое же.

Случай 5. Такъ какъ любая часть жидкости GHJ заключается въ остальной жидкости какъ въ сосудѣ и повсюду испытываетъ одинаковое давленіе, то всѣ ея части вездѣ оказываютъ другъ на друга одно и то же давленіе и находятся въ покоѣ, отсюда очевидно, что для любой жидкости GHJ, которая находится повсюду подъ однимъ и тѣмъ же давленіемъ, давленіе всѣхъ частей другъ на друга вездѣ одно и то же, и онѣ находятся въ покоѣ.

Случай 6. Слѣдовательно, если эта жидкость заключена въ сосудъ не твердый и не вездѣ испытываетъ одно и то же давленіе, то она по опредѣленію текучести уступаетъ болѣе сильному давленію.

Случай 7. Поэтому, въ твердомъ сосудѣ жидкость не испытываетъ съ какой-либо стороны болѣе сильнаго давленія нежели съ другой, но уступаетъ ему и притомъ моментально, ибо стѣнка твердаго сосуда не слѣ-

дуетъ за отступающей жидкостью. Уступивъ же жидкость надавитъ на противоположную сторону и такимъ образомъ, давленіе повсюду выравнивается. Какъ только жидкость получитъ стремленіе отступить отъ стороны, гдѣ давленіе больше, такъ тотчасъ же она встрѣтитъ препятствіе отъ противоположной стороны сосуда, поэтому давленіе приводится къ равенству, моментально безъ всякаго движенія жидкости, и части жидкости, какъ сказано въ случаѣ 5-мъ, давятъ другъ на друга повсюду одинаково и находятся въ покоѣ другъ относительно друга.

Слѣдствіе. Такимъ образомъ движеніе частей жидкости другъ относительно друга не можетъ быть измѣнено приложеніемъ давленія къ внѣшней ея поверхности, если только сама эта поверхность гдѣ-либо не измѣняется, или если части жидкости при болѣе или менѣе сильномъ другъ на друга давленіи не скользятъ другъ по другу съ большею или меньшею трудностью.

Предложеніе XX. Теорема XV.

Если отдѣльныя части ограниченной сферической свободной поверхностью и одноцентреннымъ съ нею сферическимъ же дномъ жидкости, плотность которой въ одномъ и томъ же разстояніи отъ центра одна и та же, притягиваются къ этому центру, то дно поддерживаетъ вѣсъ цилиндра, коего основаніе равно поверхности дна высота же такая же, какъ и окружающей жидкости.

Пусть DHM (фиг. 160), есть поверхность дна, AEJ свободная поверхность жидкости. Подраздѣли жидкость безчисленнымъ множествомъ сферическихъ поверхностей BFK, CGL и т. д. на концентрическіе слои одинаковой толщины и вообрази, что сила тяжести дѣйствуетъ лишь на верхнюю поверхность каждаго слоя, и что на равныя части каждой поверхности дѣйствіе одинаково. Слѣдовательно, наружная поверхность AEJ испытываетъ давленіе лишь отъ своей собственной тяжести, каковое давленіе испытываютъ всѣ части верхняго слоя и вторая поверхность BFK (по предл. XIX), повсюду одинаково и сообразно своей величинѣ; но кромѣ этого, вторая поверхность испытываетъ еще давленіе отъ силы тяжести приложенной къ этой поверхности; это давленіе слагаясь съ предыдущимъ даетъ двойное давленіе. Такое давленіе испытываетъ сообразно своей величинѣ третья поверхность CGL и сверхъ того еще давленіе отъ силы тяжести къ ней приложенной, слѣдовательно, давленіе утроенное. Подобнымъ образомъ давленіе испытываемое четвертой поверхностью — четверное, пятой — пятерное и т. д. Такимъ образомъ, полное давленіе испытываемое какою-либо поверхностью пропорціонально не объему лежащей на ней жидкости, а числу слоевъ до свободной поверхности жидкости и равно вѣсу нижняго слоя умноженному на число слоевъ, т.-е. вѣсу тѣла, предѣльное отношеніе котораго къ вѣсу упомянутаго выше цилиндра (если

число слоевъ увеличивать и толщину ихъ уменьшать безконечно, такъ чтобы дѣйствіе силы тяжести отъ нижняго слоя до верхняго стало непрерывнымъ) равно единицѣ. Слѣдовательно, нижняя поверхность поддерживаетъ вѣсъ вышеупомянутаго цилиндра.

На основаніи такого же разсужденія устанавливается предложеніе и тогда, когда сила тяжести въ зависимости отъ разстоянія до центра убываетъ по какому-либо заданному закону и когда жидкость внизу болѣе плотная, а вверху разрѣженная.

Слѣдствіе 1. Слѣдовательно, на дно не дѣйствуетъ полный вѣсъ окружающей жидкости, а оно поддерживаетъ лишь ту часть вѣса, которая указана въ предложеніи, остающаяся часть вѣса жидкости удерживается ея сводчатой формою.

Слѣдствіе 2. Въ равныхъ разстояніяхъ отъ центра величина давленія одна и та же, горизонтальна ли поверхность, къ которой давленіе относится, вертикальна ли, или наклонна, поднимается ли жидкость отъ поверхности, испытывающей давленіе, прямо вверхъ или же извивается наклонно по кривымъ полостямъ и каналамъ правильнымъ или весьма неправильнымъ, широкимъ или самымъ узкимъ. Отъ этихъ обстоятельствъ давленіе не измѣняется, какъ то можно заключить, прилагая доказательство этой теоремы къ отдѣльнымъ случаямъ ограниченія жидкости.

Слѣдствіе 3. Изъ того же доказательства можно заключить (по предл. XIX), что вслѣдствіе происходящаго отъ вѣса давленія ни одна часть тяжелой жидкости не можетъ получить движенія относительно другой, исключая движенія происходящаго отъ уплотненія.

Слѣдствіе 4. Поэтому, что если какое-либо иное не сжимаемое тѣло того же удѣльнаго вѣса, какъ и жидкость, будетъ погружено въ эту жидкость, то оно не получитъ никакого движенія отъ давленія окружающей жидкости, оно не будетъ ни опускаться, ни подниматься, ни побуждаться измѣнить свой видъ. Если оно сферическое, то и останется сферическимъ, несмотря на давленіе; если квадратное, то останется квадратнымъ, и притомъ будь оно мягкимъ или самымъ текучимъ, плаваетъ ли оно свободно въ жидкости, или лежитъ на днѣ. Ибо всякая внутренняя часть жидкости находится въ условіяхъ погруженнаго тѣла; въ такихъ же условіяхъ, какъ эта часть жидкости, находится и всякое погруженное тѣло имѣющее ту же самую величину, форму и удѣльный вѣсъ. Если бы погруженное тѣло, сохраняя свой вѣсъ, расплавилось бы и приняло бы жидкій видъ, то если бы оно до того поднималось вверхъ, или опускалось или мѣняло отъ давленія свою форму, то оно и теперь или поднималось бы вверхъ, или опускалось бы, или побуждалось бы принимать новую форму, и это потому, что тяжесть и прочія причины его движеній сохранились. Но такъ какъ (случ. 5 предл. XIX) будучи теперь жидкимъ, оно должно находиться въ покоѣ и сохранять свою форму, то и ранѣе было то же самое.

Слѣдствіе 5. Поэтому тѣло по удѣльному вѣсу болѣе тяжелое, нежели жидкость его окружающая, будетъ тонуть, тѣло же котораго удѣльный вѣсъ

меньше будетъ всплывать, причемъ происходящія движенія и измѣненія формы будутъ соотвѣтствовать тому, что можетъ произвести избытокъ или недостатокъ вѣса, ибо лишь этотъ избытокъ или недостатокъ оказываетъ натискъ, побуждающій тѣло къ движенію, иначе это тѣло находилось бы въ равновѣсіи съ частями жидкости; упомянутый избытокъ или недостатокъ вѣса можетъ быть уподобляемъ избытку или недостатку нагрузки на одной изъ чашекъ вѣсовъ.

Слѣдствіе 6. Такимъ образомъ, тяжесть тѣла, находящагося внутри жидкости, двоякая: одна истинная и абсолютная, другая же кажущаяся, обыденная и относительная. Абсолютный вѣсъ есть полная сила, съ которою тѣло стремится внизъ; обыденный и относительный есть избытокъ вѣса, съ которымъ тѣло болѣе стремится внизъ, нежели жидкость его окружающая. Перваго рода тяжесть и есть та, которой подвержены части жидкостей и всякаго рода тѣлъ въ занимаемыхъ ими мѣстахъ, поэтому она при сложеніи и образуетъ полный вѣсъ тѣла. Ибо все взятое въ цѣломъ всегда имѣетъ вѣсъ, какъ то можно испытать въ сосудахъ, заполненныхъ жидкостью, причемъ вѣсъ цѣлаго равенъ суммѣ вѣсовъ всѣхъ частей его, и значитъ слагается изъ этихъ вѣсовъ. Вѣсъ второго рода не есть тотъ, которому тѣла подвержены въ своемъ мѣстѣ, т.-е. будучи сопоставлены они не становятся болѣе тяжелыми, а препятствуя взаимному стремленію къ опусканію, они сохраняютъ свои мѣста, какъ будто бы они были лишены тяжести. Такъ обыкновенно, когда что-либо находится въ воздухѣ и не превышаетъ его вѣса, то народомъ и почитается за неимѣющее вѣса. Что превышаетъ вѣсъ воздуха почитается народомъ за вѣсомое, поскольку его вѣсъ не поддерживается вѣсомъ воздуха. Обыденные вѣса тѣлъ не что иное, какъ избытки ихъ истиннаго вѣса надъ вѣсомъ воздуха. Поэтому, все, что обыкновенно называется обладающимъ легкостью, есть лишь то, что менѣе тяжело, нежели воздухъ, и что, уступая преобладающему вѣсу воздуха стремится вверхъ. Эти тѣла обладаютъ лишь относительною легкостью, а не истинною, ибо въ пустотѣ они опускаются. Такъ и въ водѣ тѣла, которыя отъ большей или меньшей тяжести или опускаются или поднимаются, лишь относительно и видимо тяжелы, или легки; ихъ относительная или видимая тяжесть или легкость есть лишь избытокъ или недостатокъ истиннаго ихъ вѣса надъ вѣсомъ воды. Тѣла же, которыя, не обладая преобладающимъ вѣсомъ, не тонутъ, и не уступая преобладающему вѣсу воды не всплываютъ хотя они истиннымъ своимъ вѣсомъ и увеличиваютъ полный вѣсъ цѣлаго, лишь относительно и по обыденному мнѣнію не имѣютъ вѣса въ водѣ. Доказательство во всѣхъ этихъ случаяхъ одинаково.

Слѣдствіе 7. Доказанное по отношенію силы тяжести имѣетъ мѣсто и по отношенію всякихъ другихъ центростремительныхъ силъ.

Слѣдствіе 8. Такъ, если среда, въ которой тѣло движется, подвержена или собственной силѣ тяжести или же иной какой-либо центростремительной силѣ, и тѣло подвержено такой же силѣ, но большей мѣры, то разность этихъ силъ составитъ ту движущую силу тѣла, которую въ предыдущихъ

предложеніяхъ мы принимали за центростремительную. Если же тѣло подвержено сказанной силѣ слабѣе, нежели жидкость, то разность силъ должна быть принимаема за силу центробѣжную (т.-е. отталкивающую отъ центра).

Слѣдствіе 9. Изъ того что жидкости, оказывая давленіе на заключающіяся въ нихъ тѣла, не измѣняютъ ихъ внѣшнихъ формъ, слѣдуетъ еще (по слѣд. пр. XIX), что онѣ не измѣняютъ и относительнаго расположенія внутреннихъ частей; поэтому, если ощущеніе происходитъ отъ смѣщенія частей, то при погруженіи животныхъ ихъ тѣла не страдаютъ и въ нихъ не возбуждается никакого ощущенія, если только эти тѣла при сдавливаніи не могутъ уплотняться. То же самое относится и до любой системы тѣлъ окруженной давящей на нихъ жидкостью. Всѣ части системы будутъ обладать тѣми же самыми движеніями, какъ находясь въ пустотѣ и подвергаясь лишь своей относительной тяжести, за исключеніемъ того по скольку жидкость оказываетъ сопротивленіе ихъ движенію или же сдавливая способствуетъ ихъ слипанію

Предложеніе XXI. Теорема XVI.

Если плотность жидкости пропорціональна давленію, и эта жидкость находится подъ дѣйствіемъ центростремительной силы, направленной внизъ и обратно пропорціональной разстояніямъ до центра, то я утверждаю, что если эти разстоянія брать въ геометрической прогрессіи, то и плотности жидкости въ этихъ разстояніяхъ составятъ также геометрическую прогрессію.

Пусть ATV есть сферическое дно (фиг. 161), надъ которымъ находится жидкость, S центръ, SA, SB, SC, SD, SE, SF и т. д. разстоянія въ геометрической прогрессіи. Длины AH, BJ, CK, DL, EM, FN и т. д. возставленныхъ въ точкахъ A, B, C, D, E, F и т. д. перпендикуляровъ берутся пропорціонально плотности въ этихъ мѣстахъ, тогда удѣльные вѣса жидкости въ этихъ мѣстахъ будутъ пропорціональны $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BJ}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$ и т. д. или же, что то же самое $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BJ}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$ и т. д. Вообрази сперва, что эти вѣса постоянны на протяженіи отъ A до B, отъ B до C, отъ C до D и т. д., убывая скачками въ точкахъ B, C, D... Эти удѣльные вѣса по умноженіи на высоты AB, BC, CD и т. д. даютъ давленія AH, BJ, CK и т. д., дѣйствующія (по теор. XV) на дно. Такимъ образомъ частица A подвержена всѣмъ давленіямъ AH, BJ, CK, DL . . . продолженнымъ до безконечности, частица B всѣмъ давленіямъ, за исключеніемъ AH, частица C всѣмъ, кромѣ первыхъ двухъ и т. д., слѣдовательно, плотность AH первой частицы A относится къ плотности BJ второй частицы B какъ безконечно продолженная сумма всѣхъ $AH + BJ + CK + DL + \ldots$ къ суммѣ $BJ + CK + DL + \ldots$ Плотность BJ второй частицы B отно-

сится къ плотности CK третьей C какъ сумма $BJ + CK + DL + \ldots$ къ суммѣ $CK + DL + \ldots$ Такимъ образомъ эти суммы пропорціональны своимъ разностямъ, слѣдовательно (лем. I, 2-ой книги), онѣ образуютъ геометрическую прогрессію, поэтому и разности AH, BJ, CK и т. д., пропорціональныя суммамъ, образуютъ такую же прогрессію. Такъ какъ плотности въ точкахъ A, B, C и т. д. пропорціональны AH, BJ, CK и т. д., то и онѣ составляютъ геометрическую прогрессію. Если идти съ пропусками, то по равенству отношеній будетъ, что въ разстояніяхъ SA, SC, SE и т. д., находящихся въ геометрической прогрессіи и плотности AH, CK, EM, составятъ геометрическую прогрессію. Если сближать точки A, B, C, D, E, ... такъ, чтобы удѣльный вѣсъ отъ дна до крайняго предѣла жидкости сталъ непрерывнымъ, то плотности AH, DL, GO въ разстояніяхъ SA, SD, SG, составляющихъ геометрическую прогрессію, находясь постоянно въ геометрической же прогрессіи, останутся таковыми и въ этомъ случаѣ.

Слѣдствіе. Поэтому, если извѣстна плотность жидкости въ двухъ какихъ-либо мѣстахъ, напр. въ A и E, то можно найти ея плотность въ любомъ мѣстѣ Q. Опиши гиперболу (фиг. 162), коей центръ S и взаимно перпендикулярныя ассимптоты SQ и SX, и которая пересѣкаетъ перпендикуляры AH, EM, QT въ a, e, q и перпендикуляры HX, MY, TZ, опущенные на ассимптоту SX въ h, m и t. Пусть площадь $YmtZ$ относится къ заданной площади $YmhX$ какъ заданная же площадь $EeqQ$ къ заданной $EeaA$, тогда продолженная линія Zt отсѣчетъ длину QT, пропорціональную плотности. Ибо, если длины SA, SE, SQ составляютъ непрерывную пропорцію (геометрическую прогрессію), то площади $EeqQ$, $EeaA$ равны, значитъ и пропорціональныя имъ площади $YmtZ$, $XhmY$ также равны и длины SX, SY, SZ, т.-е. AH, EM, QT составляютъ непрерывную пропорцію, какъ это и требуется. Если длины SA, SE, SQ будутъ занимать какой-либо иной порядокъ въ ряду непрерывно пропорціональныхъ, то и линіи AH, EM, QT по пропорціональности гиперболическихъ площадей займутъ соотвѣтствующій порядокъ въ другомъ ряду непрерывно пропорціональныхъ количествъ [151]).

---

[151]) Примемъ точку S за начало оси z, и обозначимъ черезъ q плотность въ разстояніи z отъ центра S и черезъ p давленіе. Примѣненный въ текстѣ пріемъ при принятыхъ теперь обозначеніяхъ можетъ быть изложенъ такъ: пусть будетъ

$$SA = z_0, \quad SB = z_1 \ldots SG = z_n;$$

по предположенію эти величины берутся въ геометрической прогрессіи, положимъ:

$$z_1 = \lambda z_0, \quad z_2 = \lambda^2 z_0; \ldots z_n = \lambda^n z_0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Если обозначить черезъ q_0, $q_1 \ldots q_n$ соотвѣтствующія плотности

Предложеніе XXII. Теорема XVII.

Если плотность какой-либо жидкости пропорціональна давленію и эта жидкость находится подъ дѣйствіемъ центростремительной силы направленной внизъ и обратно пропорціональной квадрату разстояній до центра, то я утверждаю, что когда разстоянія образуютъ гармоническую прогрессію, то плотности жидкости въ этихъ разстояніяхъ образуютъ геометрическую прогрессію.

Пусть S (фиг. 163) есть центръ, SA, SB, SC, SD, SE разстоянія въ геометрической прогрессіи. Длины перпендикуляровъ AH, BJ, CK и т. д. берутся пропорціональными плотностямъ жидкости въ мѣстахъ A, B, C, D, E ... удѣльные вѣса ея въ этихъ мѣстахъ будутъ тогда $\frac{AH}{SA^2}$, $\frac{BJ}{SB^2}$,

---

жидкости, представляемыя ординатами AH, BJ ... GO, то удѣльные вѣса послѣдовательныхъ слоевъ жидкости будутъ:

$$k\frac{q_0}{z_0},\quad k\frac{q_1}{z_1},\quad k\frac{q_2}{z_2}\ \dots\ k\frac{q_n}{z_n}$$

гдѣ k постоянная и значитъ давленіе въ разстояніяхъ z_0, z_1 ... z_n отъ центра будутъ:

$$(2)\qquad \begin{aligned} p_0 &= k\left[\frac{q_0}{z_0}(z_1-z_0)+\frac{q_1}{z_1}(z_2-z_1)+\dots+\frac{q_n}{z_n}(z_{n+1}-z_n)+\dots\right]\\ p_1 &= k\left[\frac{q_1}{z_1}(z_2-z_1)+\frac{q_2}{z_2}(z_3-z_2)+\dots+\frac{q_n}{z_n}(z_{n+1}-z_n)+\dots\right]\\ p_2 &= k\left[\frac{q_2}{z_2}(z_3-z_2)+\frac{q_3}{z_3}(z_4-z_3)+\dots+\frac{q_n}{z_n}(z_{n+1}-z_n)+\dots\right]\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

или подставляя вмѣсто z_1, z_2 ... z_n ихъ величины:

$$(3)\qquad \begin{aligned} p_0 &= k[q_0+q_1+q_2+\dots+q_n+\dots](\lambda-1)\\ p_1 &= k[q_1+q_2+q_3+\dots+q_n+\dots](\lambda-1)\\ p_2 &= k[q_2+q_3+q_4+\dots+q_n+\dots](\lambda-1)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Но по предположенію плотность пропорціональна давленію, такъ что положивъ $h=\frac{kq_0}{p_0}$ будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} q_0 &= h[q_0+q_1+q_2+\dots+q_n+\dots]\cdot(\lambda-1)\\ q_1 &= h[q_1+q_2+q_3+\dots+q_n+\dots]\cdot(\lambda-1)\\ q_2 &= h[q_2+q_3+q_4+\dots+q_n+\dots]\cdot(\lambda-1)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\qquad (4)$$

Откуда слѣдуетъ

$\frac{CK}{SC^2}$ и т. д. Вообрази, что эти вѣса постоянны—первый на протяженіи отъ A до B, второй отъ B до C, третій отъ C до D и т. д. По умноженіи

$$q_1 - q_0 = -h(\lambda - 1) \cdot q_0$$
$$q_2 - q_1 = -h(\lambda - 1) \cdot q_1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

и полагая

$$1 - h(\lambda - 1) = c \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

получимъ

$$q_1 = cq_0, \quad q_2 = cq_1, \quad q_3 = cq_2 \ldots$$

или

$$q_1 = cq_0, \quad q_2 = c^2 q_0; \quad q_3 = c^3 q_0 \ldots q_n = c^n q_0 \quad \ldots \quad (6)$$

т.-е. когда разстоянія z составляютъ геометрическую прогрессію

$$z_1 = \lambda z_0, \quad z_2 = \lambda^2 z_0; \quad z_3 = \lambda^3 z_0 \ldots z_n = \lambda^n z_0 \quad \ldots \quad (1)$$

то плотности q составляютъ геометрическую прогрессію (6).

Изъ формулъ (6) и (1) слѣдуетъ:

$$\log \frac{q_n}{q_0} = \frac{\log c}{\log \lambda} \cdot \log \frac{z_n}{z_0} = N \log \frac{z_n}{z_0} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Вмѣсто логариѳмовъ Ньютонъ беретъ гиперболическія площади, постоянныя же q_0, z_0 и N исключаетъ, предполагая, что извѣстна плотность въ двухъ различныхъ мѣстахъ, напр., z_i и z, тогда будетъ:

$$\log \frac{q_i}{q_0} = N \log \frac{z_i}{z_0}; \quad \log \frac{q_e}{q_0} = N \log \frac{z_e}{z_0} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

и по исключеніи изъ этихъ уравненій и уравненія (7) величинъ N, $\log q_0$, $\log z_0$ получится:

$$\log q_n - \log q_i = \frac{\log q_i - \log q_e}{\log z_i - \log z_e} \cdot (\log z_n - \log z_i) \quad \ldots \quad (9)$$

Это соотношеніе и замѣняется построеніемъ при помощи гиперболы.

По поводу форм. (2) можно замѣтить, что обозначая черезъ Z ординату верхней границы жидкости и предполагая, что число n безконечно большое, всѣ же разности $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1 \ldots$ безконечно малы, будемъ имѣть

$$p_0 = k \int_{z_0}^{Z} \frac{q dz}{z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

и, вообще:

$$p = k \int_{z}^{Z} \frac{q dz}{z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Откуда слѣдуетъ:

$$dp = -k \frac{q \cdot dz}{z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Присоединяя къ этому уравненію то, которымъ выражается зависи-

на AB, BC, CD, DE и т. д. или, что то же, на пропорціональныя имъ разстоянія SA, SB, SC ... получаются произведенія $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BJ}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$ и т. д. пропорціональныя давленіямъ. Такъ какъ плотности пропорціональны суммамъ этихъ давленій, то разности плотностей $AH - BJ$, $BJ - CK$ и т. д., будутъ пропорціональны разностямъ сказанныхъ суммъ, т.-е. величинамъ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BJ}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$ и т. д.

Опиши какую-либо равнобочную гиперболу, центръ которой S и ассимптоты SA и Sa, и которая пересѣкаетъ перпендикуляры AH, BJ, CK ... въ a, b, c и т. д., перпендикуляры же Ht, Ju, Kw, опущенные на ассимптоту Sx въ h, i, k; разности плотностей tu, uw и т. д. будутъ пропорціональны $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BJ}{SB}$ и т. д. Произведенія $tu \,.\, th$, $uw \,.\, ui$ и пр., т.-е. площади прямоугольниковъ tp, uq и пр. будутъ пропорціональны $\frac{AH \,.\, th}{SA}$, $\frac{BJ \,.\, ui}{SB}$ и т. д., т.-е. пропорціональны Aa, Bb и т. д., ибо по свойству гиперболы

$$SA : AH = SA : St = th : Aa$$

значитъ

$$\frac{AH \,.\, th}{SA} = Aa.$$

мость между плотностью и давленіемъ, въ разсматриваемомъ, напр., случаѣ $q = \frac{q_0}{p_0} p$, получаемъ дифференціальное уравненіе, изъ котораго находится зависимость между q и z.

Если притяженіе не обратно пропорціонально разстоянію z, а выражается иною зависимостью, напр., $\varphi(z)$, то вмѣсто уравненія (12) будетъ

$$dp = -kq \,.\, \varphi(z) \,.\, dz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Въ предложеніи XXII разсмотрѣнъ случай

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2} \quad \text{при} \quad q = \frac{q_0}{p_0} p,$$

Въ поученіи кромѣ того упомянуты случаи:

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^3}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{z^4} \quad \text{и вообще} \quad \varphi(z) = \frac{1}{z^n}$$

при той же зависимости между p и q, наконецъ случай $\varphi(z) = g$ — постоянной силы тяжести вблизи поверхности земли, разсмотрѣнный Галлеемъ, а затѣмъ упоминается и про болѣе общую зависимость между q и p, выражаемую формулою

$$\frac{q^m}{q_0{}^m} = \frac{p^k}{p_0{}^k},$$

Во всѣхъ этихъ случаяхъ нахожденіе квадратуръ не представляетъ затрудненій.

Точно также будетъ

$$\frac{BJ \cdot ui}{SB} = Bb.$$

и т. д. Но длины Aa, Bb, Cc ... составляютъ геометрическую прогрессію и поэтому пропорціональны своимъ разностямъ, слѣдовательно, этимъ же разностямъ пропорціональны и площади прямоугольниковъ tp, uq и т. д., суммамъ же этихъ разностей, такимъ какъ $Aa - Cc$ или $Aa - Dd$ пропорціональны суммы площадей $tp + uq$ или $tp + uq + wr$. Пусть число такого рода членовъ весьма велико, то сумма всѣхъ разностей, скажемъ, $Aa - Ff$ будетъ пропорціональна суммѣ площадей всѣхъ прямоугольниковъ, скажемъ, $zthn$. Будемъ увеличивать число членовъ и уменьшать разстоянія между точками A, B, C и т. д. до безконечности, тогда сумма площадей сказанныхъ прямоугольниковъ станетъ равною гиперболической площади $zthn$, поэтому и разность $Aa - Ff$ пропорціональна этой площади. Если теперь принять какія-либо разстоянія SA, SD, SF въ гармонической прогрессіи, то разности $Aa - Dd$, $Dd - Ff$ будутъ между собою равны, поэтому пропорціональныя этимъ разностямъ площади $thlx$, $xlnz$ будутъ также равны, и плотности St, Sx, Sz, т.-е. AH, DL, FN составятъ непрерывную пропорцію.

Слѣдствіе. Такимъ образомъ, если будутъ заданы плотности жидкости AH и BJ въ двухъ мѣстахъ, то будетъ извѣстна площадь $thiu$, соотвѣтствующая разности ихъ tu и, значитъ, найдется плотность FN въ разстояніи SF, взявъ площадь $thnz$ въ такомъ же отношеніи къ извѣстной площади $thiu$ какъ разность $Aa - Ff$ къ разности $Aa - Bb$.

Поученіе.

Подобнымъ же разсужденіемъ можетъ быть доказано, что если сила притяженія, дѣйствующая на частицы жидкости, обратно пропорціональна кубамъ разстояній до центра и если взять величины, обратныя квадратамъ разстояній $\left(\text{т.-е. } \frac{SA^3}{SA^2}, \frac{SA^3}{SB^2}, \frac{SA^3}{SC^2} \ldots\right)$ въ ариѳметической прогрессіи, то плотности AH, BJ, CK будутъ въ прогрессіи геометрической. Если сила притяженія убываетъ какъ четвертыя степени разстояній и взять величины, обратныя кубамъ разстояній, напр. $\frac{SA^4}{SA^3}$, $\frac{SA^4}{SB^3}$, $\frac{SA^4}{SC^3}$ и т. д. въ ариѳметической прогрессіи, то плотности AH, BJ, CK будутъ въ прогрессіи геометрической. Подобно этому до безконечности. Кромѣ того, если притяженіе частицъ жидкости при всякомъ разстояніи одно и то же, и разстоянія взять въ ариѳметической прогрессіи, то плотности будутъ въ геометрической прогрессіи, какъ это нашелъ знаменитѣйшій *Эдмундъ Галлей*. Если притяженіе пропорціонально разстоянію и квадраты разстояній взять въ ариѳметической прогрессіи, то плотности будутъ въ геометрической, и подобно этому до безконечности. Все это имѣетъ мѣсто,

когда плотность жидкости пропорціональна сжимающему ее давленію или же, что то же самое, объемъ, занимаемый жидкостью, обратно пропорціоналенъ этой силѣ. Но можно вообразить и другіе законы сжатія, напр., что кубъ сжимающей силы пропорціоналенъ четвертой степени плотности. Въ этомъ случаѣ, если притяженіе обратно пропорціонально квадрату разстоянія, то плотность будетъ обратно пропорціональна кубу разстоянія. Если вообразить, что кубъ сжимающей силы пропорціоналенъ пятой степени плотности и притяженіе обратно пропорціонально квадрату разстоянія, то плотность будетъ обратно пропорціональна полуторной степени разстоянія. Если вообразить, что сжимающая сила пропорціональна квадрату плотности, притяженіе же обратно пропорціонально квадрату разстоянія, то плотность будетъ обратно пропорціональна разстоянію. Перебирать всѣ случаи слишкомъ долго. Впрочемъ опытами установлено, что плотность воздуха или въ точности пропорціональна давленію или весьма къ тому близко, поэтому плотность воздуха въ земной атмосферѣ пропорціональна вѣсу всего накрывающаго воздуха, т.-е. высотѣ ртути въ барометрѣ.

Предложеніе XXIII. Теорема XVIII.

Если плотность жидкости, состоящей изъ взаимно отталкивающихся частицъ, пропорціональна сжимающему давленію, то отталкивательныя силы частицъ обратно пропорціональны разстояніямъ между ихъ центрами. Наоборотъ, частицы отталкивающіяся взаимно съ силами обратно пропорціональными разстояніямъ между своими центрами образуютъ упругую жидкость, плотность которой пропорціональна давленію.

Предполагается, что жидкость заключается въ кубическомъ пространствѣ ACE и затѣмъ сдавливаніемъ приводится въ меньшее кубическое же пространство ace (фиг. 164). Разстоянія частицъ, занимающихъ сходственныя положенія въ обоихъ пространствахъ, будутъ пропорціональны сторонамъ AB и ab кубовъ, плотности же жидкости обратно пропорціональны объемамъ AB^3 и ab^3. На гранѣ $ABCD$ бо́льшаго куба берется квадратъ DP равный грани db меньшаго куба; по предположенію давленіе, съ которымъ квадратъ DP дѣйствуетъ на жидкость въ большомъ кубѣ, относится къ давленію, съ которымъ квадратъ db дѣйствуетъ на жидкость, заключенную въ маломъ кубѣ, какъ плотности жидкости, т.-е. какъ $ab^3 : AB^3$. Но полное давленіе, съ которымъ квадратъ DB дѣйствуетъ на заключенную въ большомъ кубѣ жидкость, относится къ полному давленію на нее квадрата DP какъ $DB^2 : DP^2$, т.-е. какъ $AB^2 : ab^2$. Слѣдовательно, полное давленіе, съ которымъ квадратъ DB дѣйствуетъ на жидкость, относится къ давленію на нея квадрата db какъ $ab : AB$. Пусть жидкость раздѣляется плоскостями FGH и fgh, проведенными черезъ кубы на двѣ части; эти части оказываютъ другъ на друга такія же полныя давленія какъ и на грани

AC и ac, т.-е. относящіеся другъ къ другу какъ $ab:AB$,—поэтому и отталкивательныя силы, которыми эти давленія поддерживаются, находятся въ томъ же отношеніи. Ибо вслѣдствіе одинаковости какъ числа частицъ такъ и ихъ положенія въ каждомъ изъ кубовъ силы, съ которыми всѣ частицы дѣйствуютъ друга на друга черезъ плоскости FGH и fgh пропорціональны силѣ, съ которою каждая отдѣльная частица дѣйствуетъ на отдѣльную же. Слѣдовательно силы, съ которыми отдѣльная частица дѣйствуетъ на отдѣльную черезъ плоскость FGH бо́льшаго куба относится къ силѣ дѣйствія отдѣльной частицы на отдѣльную черезъ плоскость fgh меньшаго куба какъ $ab:AB$, т.-е. обратно пропорціонально разстоянію между частицами.

Наоборотъ, если силы взаимодѣйствія двухъ отдѣльныхъ частицъ обратно пропорціональны разстоянію, т.-е. обратно пропорціональны сторонамъ кубовъ AB и ab, то и суммы силъ будутъ находиться въ томъ же отношеніи и давленія граней DB и db будутъ въ отношеніи суммъ силъ, т.-е. давленіе квадрата DP къ давленію грани DB какъ $ab^2:AB^2$, слѣдовательно, давленіе квадрата DP къ давленію грани db какъ $ab^3:AB^3$, т.-е., что сжимающія давленія пропорціональны плотностямъ.

Поученіе.

На основаніи такого же разсужденія, если отталкивательныя силы частицъ обратно пропорціональны квадрату разстояній между ихъ центрами, то кубы сжимающихъ силъ будутъ пропорціональны четвертымъ степенямъ плотностей. Если отталкивательныя силы будутъ обратно пропорціональны кубамъ или четвертымъ степенямъ разстояній, то кубы давленій будутъ пропорціональны или пятымъ или шестымъ степенямъ плотностей. Вообще, если обозначить черезъ D разстояніе и черезъ E плотность сжимаемой жидкости и принять, что отталкивательныя силы частицъ обратно пропорціональны n-ой степени разстояній, т.-е. D^n, то давленія будутъ пропорціональны степени $\frac{n+2}{3}$ т.-е. $E^{\frac{n+2}{3}}$ и наоборотъ. Все это относится до дѣйствія между частицами такихъ отталкивательныхъ силъ, которыя ограничиваются лишь ближайшими частицами и не распространяются далеко за нихъ. Примѣръ имѣемъ въ тѣлахъ магнитныхъ. Ихъ притягательная сила почти ограничивается тѣлами такого же рода съ ними смежными. Дѣйствіе магнита съуживается, если проложить желѣзную пластинку и почти ограничивается этой пластинкою, ибо расположенныя за нею тѣла не столько притягиваются самимъ магнитомъ, сколь этою пластинкою. Подобно этому, если частицы отталкиваютъ другія близкія къ нимъ, на болѣе же отдаленныя не оказываютъ никакого дѣйствія, то жидкость, составленная изъ такихъ частицъ и разсматривалась въ этомъ предложеніи. Если же дѣйствіе частицъ распространяется до безконечности, то потребуется бо́льшая сила для одинаковаго уплотненія бо́льшаго количества жидкости. Состоятъ ли

жидкости на самомъ дѣлѣ изъ взаимно отталкивающихся частицъ есть вопросъ физическій. Мы доказали математически свойства жидкостей, состоящихъ изъ такихъ частицъ и предоставляемъ физикамъ поводъ изслѣдовать этотъ вопросъ.

ОТДѢЛЪ VI.

О движеніи маятниковъ при сопротивленіи.

Предложеніе XXIV. Теорема XIX.

Массы маятниковъ, у которыхъ разстоянія центра качанія до центра подвѣса одинаковы, относятся между собою какъ произведенія вѣсовъ маятниковъ на квадраты временъ ихъ размаховъ въ пустотѣ.

Скорость, которую данная сила можетъ сообщить данной массѣ въ заданное время, пропорціональна силѣ и обратно пропорціональна массѣ. Чѣмъ больше сила, чѣмъ больше время и чѣмъ меньше масса, тѣмъ бо́льшая будетъ сообщена скорость. Это слѣдуетъ изъ второго закона движенія. Если маятники одинаковой длины, то движущія силы при одинаковомъ отклоненіи отъ вертикали пропорціональны вѣсу; пусть два тѣла при качаніи описываютъ равныя дуги, и эти дуги подраздѣлены на равныя части, такъ какъ времена описанія каждой изъ сходственныхъ частей этихъ дугъ пропорціональны полнымъ временамъ размаховъ, скорости же при прохожденіи черезъ сходственныя части дугъ прямо пропорціональны движущимъ силамъ и полнымъ временамъ качаній и обратно пропорціональны массамъ, то массы прямо пропорціональны силамъ и временамъ качаній и обратно пропорціональны скоростямъ. Но скорости обратно пропорціональны временамъ, слѣдовательно величины, которыя прямо пропорціональны времени и обратно пропорціональны скорости, пропорціональны квадрату времени; поэтому массы пропорціональны движущимъ силамъ и квадратамъ времени, т.-е. вѣсамъ маятниковъ и квадратамъ времени размаховъ.

Слѣдствіе 1. Поэтому, когда времена качаній одинаковы, то массы тѣлъ относятся какъ вѣса.

Слѣдствіе 2. Если вѣса равны, то массы относятся какъ квадраты времени.

Слѣдствіе 3. Если массы равны, то вѣса обратно пропорціональны квадратамъ временъ.

Слѣдствіе 4. Такъ какъ квадраты временъ при прочихъ равныхъ условіяхъ пропорціональны длинамъ маятниковъ, то если времена и массы равны, то вѣса пропорціональны длинамъ маятниковъ.

Слѣдствіе 5. Вообще, масса маятника прямо пропорціональна его вѣсу и квадрату времени качанія и обратно пропорціональна длинѣ.

Слѣдствіе 6. Въ средѣ сопротивленія неоказывающей масса маятника прямо пропорціональна кажущемуся вѣсу и квадрату времени и обратно

пропорціональна длинѣ маятника. Ибо, какъ объяснено выше, кажущійся вѣсъ есть движущая сила во всякой тяжелой средѣ, поэтому, когда эта среда сопротивленія неоказываетъ, онъ представляетъ то же самое какъ абсолютный вѣсъ въ пустотѣ.

Слѣдствіе 7. Отсюда слѣдуетъ способъ, какъ для сравненія между собою тѣлъ по отношенію къ ихъ массамъ, такъ и для сравненія вѣса того же тѣла въ разныхъ мѣстахъ, чтобы изслѣдовать измѣненія силы тяжести. По нѣкоторымъ, произведеннымъ точнѣйшимъ образомъ, опытамъ я нашелъ, что масса всякаго тѣла всегда пропорціональна его вѣсу [152]).

Предложеніе XXV. Теорема XX.

Маятники, испытывающіе въ какой-либо средѣ постоянное сопротивленіе и маятники, которые качаются въ средѣ того же удѣльнаго вѣса, но сопротивленія не оказывающей, совершаютъ свои размахи по циклоидѣ въ одинаковое время и одновременно описываютъ пропорціональныя части дугъ своихъ качаній.

Пусть AB (фиг. 165) есть дуга циклоиды, описываемой тѣломъ D въ продолженіе нѣкотораго времени при качаніи въ средѣ несопротивляющейся.

Раздѣлимъ эту дугу точкою C пополамъ, такъ что эта точка будетъ самая низшая точка дуги, тогда ускорительная сила, дѣйствующая на тѣло въ точкахъ D, d или E, пропорціональна длинѣ дугъ CD, Cd или CE. Представимъ эту силу этою длиною дуги; такъ какъ сопротивленіе постоянное, то пусть оно представляется постоянною дугою CO; возьмемъ дугу Od такъ, чтобы было

$$Od : CD = OB : CB.$$

Такъ какъ въ средѣ сопротивляющейся, сила ускоряющая тѣло въ точкѣ d есть избытокъ силы Cd надъ сопротивленіемъ CO, то она будетъ представляться дугою Od и, значитъ, относится къ силѣ, дѣйствующей на тѣло въ точкѣ D въ средѣ не сопротивляющейся, какъ дуга Od къ дугѣ CD; поэтому же самому въ точкѣ B будетъ—какъ дуга OB къ дугѣ CD. Такимъ образомъ, если два тѣла D и d выйдутъ изъ точки B и будутъ подвергаться дѣйствію этихъ силъ, то, такъ какъ эти силы при началѣ движенія относятся между собою какъ дуга CB къ дугѣ OB, скорости при самомъ началѣ движенія и пройденные въ немъ пути будутъ находиться въ этомъ же отношеніи. Пусть эти дуги суть BD и Bd, тогда и остающіяся дуги CD и Od будутъ находиться въ томъ же отношеніи, значитъ и силы, этимъ дугамъ CD и Od пропорціональныя, останутся въ

---

[153]) Краткое описаніе этихъ опытовъ см. ниже Книга III, предложеніе VI.

этомъ же отношеніи, какъ и при самомъ началѣ движенія, и тѣла будутъ продолжать описывать совмѣстно дуги находящіяся въ этомъ отношеніи.

Итакъ, силы, скорости и остающіяся дуги CD и Od будутъ постоянно пропорціональны полнымъ дугамъ CB и OB, поэтому эти остающіяся дуги описываются одновременно. Слѣдовательно оба тѣла D и d одновременно придутъ въ точки C и O,—одно при движеніи въ средѣ не сопротивляющейся въ точку C, другое въ средѣ сопротивляющейся въ точку O. Такъ какъ кромѣ того скорости въ точкахъ C и O пропорціональны дугамъ CB и OB, то дуги, которыя тѣла будутъ одновременно описывать продолжая свое движеніе, будутъ находиться въ этомъ же отношеніи; пусть онѣ суть CE и Oe. Сила, которою тѣло D замедляется въ точкѣ E, пропорціональна CE, сила же, которою замедляется тѣло d въ средѣ сопротивляющейся, въ точкѣ e равна суммѣ силы Ce и сопротивленія CO, т.-е. Oe; слѣдовательно силы замедляющія тѣла относятся какъ дуги CE и Oe пропорціональныя дугамъ CB и OB, поэтому и скорости, убывающія въ этомъ отношеніи, остаются все время въ этомъ постоянномъ отношеніи другъ къ другу. Слѣдовательно, скорости и дуги съ этими скоростями описываемыя все время находятся въ этомъ постоянномъ отношеніи длинъ дугъ CB и OB, поэтому если взять полныя дуги AB и aB въ этомъ же отношеніи, то тѣла D и d будутъ ихъ описывать совмѣстно и одновременно утратятъ свое движеніе въ точкахъ A и a. Слѣдовательно, полные размахи изохронны, и совмѣстно описываемыя дуги BD, Bd или BE, Be пропорціональны полнымъ размахамъ BA, Ba.

Слѣдствіе. Въ сопротивляющейся средѣ наибольшая скорость движенія имѣетъ мѣсто не въ низшей точкѣ C, а въ указанной выше точкѣ O, раздѣляющей дугу aB пополамъ, и когда тѣло послѣ того продолжаетъ свое движеніе къ a, то оно замедляется совершенно такъ же, какъ оно ускорялось при своемъ движеніи отъ B до O.

Предложеніе XXVI. Теорема XXI.

Качанія маятниковъ по циклоидѣ въ средѣ, оказывающей сопротивленіе пропорціональное скорости изохронны.

Ибо если два тѣла равноудаленныя отъ центровъ подвѣса описываютъ при качаніи не равныя дуги, то скорости въ соотвѣтствующихъ частяхъ этихъ дугъ относятся между собою какъ эти полныя дуги размаховъ; сопротивленія пропорціональныя скорости будутъ также въ этомъ отношеніи другъ къ другу. Слѣдовательно, если къ движущимъ силамъ, происходящимъ отъ тяжести, которыя пропорціональны этимъ же дугамъ, приложить или отъ нихъ отнять это сопротивленіе, то разности или суммы будутъ находиться въ томъ же отношеніи, а такъ какъ приращенія или уменьшенія скорости пропорціональны этимъ суммамъ или разностямъ, то скорости все время будутъ пропорціональны полнымъ дугамъ размаховъ. Слѣдовательно, если скорости въ какомъ-либо случаѣ были пропорціональны

полнымъ дугамъ, то онѣ и останутся постоянно въ этомъ же отношеніи другъ къ другу. Но въ началѣ движенія, когда тѣла только-что начинаютъ опускаться и описывать эти дуги, силы, такъ какъ онѣ этимъ дугамъ пропорціональны, произведутъ скорости имъ пропорціональныя, слѣдовательно, скорости постоянно будутъ пропорціональны полнымъ дугамъ размаховъ, поэтому эти размахи будутъ описываться одновременно.

Предложеніе XXVII. Теорема XXII.

Если маятники испытываютъ сопротивленіе пропорціональное квадрату скорости, то разности временъ ихъ размаховъ въ средѣ сопротивляющейся и въ средѣ того же удѣльнаго вѣса, но не сопротивляющейся будутъ приблизительно пропорціональны величинѣ размаховъ.

Когда два одинаковыхъ маятника совершаютъ въ сопротивляющейся средѣ размахи неравной величины A и B, то сопротивленіе тѣла описывающаго дугу A относится къ сопротивленію въ соотвѣтствующей части дуги B какъ квадраты скоростей, т.-е. приблизительно какъ $A^2 : B^2$. Если бы сопротивленіе на дугѣ B относилось бы къ сопротивленію на дугѣ A какъ $AB : A^2$, то по предыдущему предложенію времена размаховъ по дугѣ B и по дугѣ A были бы между собою равны. Поэтому сопротивленіе A^2 на дугѣ A, соотвѣтствующее сопротивленію AB на дугѣ B, производитъ увеличеніе времени размаха по дугѣ A по сравненію съ таковымъ же въ средѣ несопротивляющейся; точно также сопротивленіе B^2 производитъ увеличеніе времени размаха по дугѣ B по сравненію съ таковымъ въ средѣ не оказывающей сопротивленія. Но эти увеличенія приблизительно пропорціональны производящимъ ихъ силамъ, т.-е. AB и B^2 или, что то же, дугамъ A и B.

Слѣдствіе 1. Такимъ образомъ, по временамъ размаховъ различной величины совершаемыхъ въ сопротивляющейся средѣ можно узнать время размаха въ средѣ того же удѣльнаго вѣса не оказывающей сопротивленія. Ибо разность временъ будетъ такъ относиться къ избытку времени качанія по меньшей дугѣ по сравненію съ таковымъ же въ средѣ не сопротивляющейся какъ разность величины размаховъ къ меньшему изъ нихъ.

Слѣдствіе 2. Малые размахи болѣе близки къ изохронности нежели большіе, самые же малые совершаются въ сопротивляющейся средѣ во время весьма близкое къ тому, какъ и въ средѣ сопротивленія не оказывающей. Времена размаховъ совершающихся по бо́льшаго протяженія дугѣ немного продолжительнѣе, отъ того что сопротивленіе при движеніи тѣла внизъ, увеличивающее продолжительность размаха, вслѣдствіе бо́льшей длины описанной дуги, больше сопротивленія при послѣдующемъ движеніи вверхъ, которымъ эта продолжительность сокращается. Кромѣ того какъ время малыхъ размаховъ, такъ и большихъ, нѣсколько удлиняется вслѣдствіе движенія самой среды. Ибо тѣла при замедляющемся движеніи, испытываютъ немного меньшее сопротивленіе, движущіяся же, ускоряясь, немного бо́льшее того, которое соотвѣтствовало бы ихъ скорости при равномѣрномъ дви-

женіи; это происходитъ потому, что въ первомъ случаѣ среда вслѣдствіе воспринятаго ею отъ тѣла движенія направленнаго въ одну сторону съ движеніемъ тѣла болѣе тѣсно за тѣломъ слѣдуетъ, во второмъ случаѣ менѣе и поэтому болѣе или менѣе согласуется съ движеніемъ тѣла. Вслѣдствіе этого маятники при движеніи внизъ испытываютъ бо́льшее сопротивленіе, при движеніи вверхъ меньшее, нежели соотвѣтствующее скорости, и отъ обѣихъ причинъ время размаха удлиняется.

Предложеніе XXVIII. Теорема XXIII.

Если колеблющійся по циклоидѣ маятникъ испытываетъ постоянное сопротивленіе, то оно такъ относится къ силѣ тяжести, какъ разность между полною длиною дуги нисходящей части размаха и слѣдующей за нею восходящей относится къ удвоенной длинѣ маятника.

Пусть BC представляетъ (фиг. 165) дугу нисходящей части размаха, Ca — восходящей, Aa ихъ разность; на основаніи установленнаго и доказаннаго въ предложеніи XXV отношеніе силы, ускоряющей колеблющееся тѣло въ какомъ-либо его положеніи D, къ силѣ сопротивленія равно отношенію длины дуги CD къ длинѣ дуги CO, равной половинѣ сказанной разности. Поэтому сила ускоряющая тѣло въ началѣ циклоиды, т.-е. въ высшей ея точкѣ Z, гдѣ эта сила равна полной силѣ тяжести, относится къ сопротивленію какъ длина дуги ZC циклоиды между этою высшею и самою низшею ея точками относится къ дугѣ CO, или, удваивая оба члена послѣдняго отношенія, какъ полная длина циклоиды, т.-е. удвоенная длина маятника—къ дугѣ Aa.

Предложеніе XXIX. Задача VI.

Предполагая, что колеблющееся по циклоидѣ тѣло испытываетъ сопротивленіе пропорціональное квадрату скорости, найти величину сопротивленія въ каждомъ отдѣльномъ мѣстѣ.

Пусть Ba полная величина размаха (фиг. 166), C нижняя точка циклоиды, CZ половина полной ея дуги, равная длинѣ маятника, требуется опредѣлить сопротивленіе, испытываемое тѣломъ въ какомъ-либо мѣстѣ D. На неограниченной прямой OQ берутся точки O, S, P, Q такъ, какъ будетъ указано ниже, и возставляются перпендикуляры OK, ST, PJ, QE; на ассимптотахъ OQ и OK строится гипербола $TJGE$, пересѣкающая перпендикуляры ST, PJ, QE въ точкахъ T, J, E; черезъ точку J проводится прямая KF параллельная ассимптотѣ Q, пересѣкающая ассимптоту OK въ K, перпендикуляры же ST и QE въ L и F. Точки O, S, P и Q надо взять такъ, что отношеніе гиперболической площади $PJEQ$ къ гиперболической площади $PJTS$ равнялось бы отношенію длины дуги нисходящей части

размаха BC къ длинѣ дуги восходящей части Ca, и чтобы площадь JEF относилась къ площади JLT какъ OQ къ OS. Затѣмъ перпендикуляромъ MN отсѣкается гиперболическая площадь $PJNM$, такъ относящаяся къ гиперболической площади $PJEQ$ какъ дуга CZ къ дугѣ BC. Если затѣмъ перпендикуляромъ RG отсѣчь гиперболическую площадь $PJGR$, которая относится къ площади $PJEQ$ какъ произвольно взятая дуга CD относится къ дугѣ BC, то сопротивленіе въ точкѣ D будетъ относиться къ силѣ тяжести какъ площадь [153]).

$$\left(\frac{OR}{OQ}\cdot JEF - JGH\right) : PJNM.$$

Происходящія отъ силы тяжести силы, которыми тѣло ускоряется въ точкахъ Z, B, D и a пропорціональны длинамъ дугъ CZ, CB, CD, Ca, эти же длины пропорціональны площадямъ $PJNM$, $PJEQ$, $PJGR$, $PJTS$, поэтому

---

[153]) Чтобы пояснить приведенное въ текстѣ рѣшеніе сопоставимъ его съ слѣдующимъ, въ которомъ выкладки расположены такъ, чтобы онѣ соотвѣтствовали даваемымъ въ текстѣ геометрическимъ представленіямъ.

Пусть будетъ: m масса маятника, l длина его равная длинѣ CZ одной полувѣтви циклоиды, g ускореніе силы тяжести, $b = CB$ начальное отклоненіе маятника, $a = Ca$ его отклоненіе въ концѣ перваго размаха, $s = CD$ отклоненіе въ какой-либо моментъ t, v скорость въ этотъ моментъ и $R = \frac{1}{2} kmv^2$ сопротивленіе.

Уравненіе движенія маятника будетъ

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{l}s = \pm\frac{1}{2}k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

причемъ знакъ $+$ надо брать когда $\frac{ds}{dt} < 0$ и знакъ $-$ когда $\frac{ds}{dt} > 0$.

Дуги считаются положительными отъ C къ B, тогда полагая $\frac{g}{l} = n$, получимъ для перваго полуразмаха уравненіе:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + ns = \frac{1}{2}k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Но $\frac{ds}{dt} = v$, такъ что $dt = \frac{1}{v}ds$, слѣдовательно $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{vdv}{ds}$ и уравненіе (2) напишется

$$\frac{vdv}{ds} + ns = \frac{1}{2}kv^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Полагая $\frac{1}{2}v^2 = u$, принимая s за перемѣнную независимую и обозначая $\frac{du}{ds}$ черезъ u', имѣемъ

$$u' - ku = -ns \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Откуда слѣдуетъ

можно представить и силы и дуги этими площадями. Пусть кромѣ того Dd есть весьма малое пространство, пройденное тѣломъ при нисходящемъ

$$u = Ce^{ks} + As + B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

причемъ

$$A = \frac{n}{k}, \qquad B = \frac{n}{k^2}.$$

Для опредѣленія постоянной произвольной C имѣемъ условіе, что при $s = b$ величина $u = 0$, т.-е.

$$0 = Ce^{kb} + Ab + B.$$

Такимъ образомъ будетъ

$$u = As + B - (Ab + B)e^{k(s-b)} \ldots$$

Но сила сопротивленія $R = \frac{1}{2} kmv^2 = kmu$, вѣсъ же тѣла $mg = mnl$, замѣнивъ A и B ихъ значеніями получимъ:

$$\frac{R}{mg} = \frac{ku}{nl} = \frac{s + \frac{1}{k} - \left(b + \frac{1}{k}\right) . e^{k(s-b)}}{l} = \frac{sk + 1 - (bk+1)e^{k(s-b)}}{kl}.$$

Обратимся теперь къ рѣшенію Ньютона. Примемъ точку O за начало координатъ, прямую OM за ось ξ и прямую OK за ось η и положимъ

$$OS = c, \quad OP = p, \quad OQ = q, \quad OM = h, \quad PJ = \lambda, \quad OR = \xi, \quad RG = \eta$$

тогда уравненіе гиперболы $TJGEN$ будетъ

$$\eta = \frac{p\lambda}{\xi}$$

и упоминаемыя въ доказательствѣ площади будутъ:

$$PJEQ = p\lambda \log\frac{q}{p}; \quad PJTS = p\lambda \log\frac{p}{c}; \quad PJGR = p\lambda\log\frac{\xi}{p}; \quad PJMN = p\lambda\log\frac{h}{p}$$

$$JEF = \lambda(q-p) - p\lambda\log\frac{q}{p}; \quad JLT = p\lambda\log\frac{p}{c} - \lambda(p-c);$$

$$JGH = \lambda(\xi - p) - p\lambda\log\frac{\xi}{p}.$$

Между этими площадями устанавливаются соотношенія, которыя выражаются слѣдующими уравненіями:

$$\left.\begin{aligned} \log\frac{q}{p} : \log\frac{p}{c} &= b : a \\ \left[(q-p) - p\log\frac{q}{p}\right] : \left[p\log\frac{p}{c} - (p-c)\right] &= q : c \\ \log\frac{h}{p} : \log\frac{q}{p} &= l : b \\ \log\frac{\xi}{p} : \log\frac{q}{p} &= s : b \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Пусть будетъ $\log\frac{q}{p} = \mu$, тогда изъ послѣдней пропорціи имѣемъ

движеніи, представимъ его весьма малою площадкою $RGgr$, заключенной между параллельными RG и rg, продолжимъ rg до h, тогда $GHhg$ и $RGgr$ будутъ одновременными уменьшеніями площадей JGH и $PJGR$.

Приращеніе площади $\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH$ равно $GHhg - \frac{Rr}{OQ} . JEF$ т.-е. $Rr . HG - \frac{Rr}{OQ} . JEF$, отношеніе его къ уменьшенію $RGgr$ площади $PJGR$, т.-е. къ $Rr . RG$ равно

$$\left(HG - \frac{JEF}{OQ}\right) : RG$$

что можно написать такъ:

$$\left(OR . HG - \frac{OR}{OQ} \cdot JEF\right) : OR . GR$$

но

$$OR . GR = OP . PJ$$

$$\xi = p . e^{\frac{\mu s}{b}} \quad \dots\dots\dots \quad (10)$$

и уравненія (9) примутъ слѣдующій видъ:

$$q = p . e^{\mu}; \quad c = p . e^{-\frac{\mu a}{b}}; \quad h = p . e^{\frac{\mu l}{b}} \quad \dots\dots \quad (11)$$

$$e^{\mu} - 1 - \mu = \left(\frac{\mu a}{b} - 1 + e^{-\frac{\mu a}{b}}\right) . e^{\mu + \frac{\mu a}{b}} \quad \dots\dots \quad (12)$$

и отношеніе силы сопротивленія къ силѣ тяжести равное:

$$\left(\frac{OR}{OQ} . JEF - JGH\right) : PJNM$$

будетъ:

$$\left[e^{\frac{\mu s}{b} - \mu} . (e^{\mu} - 1 - \mu) - \left(e^{\frac{\mu s}{b}} - 1 - \frac{\mu s}{b}\right)\right] : \frac{\mu l}{b} =$$

$$= \left(1 + \frac{\mu s}{b} - (1 + \mu) e^{\frac{\mu s}{b} - \mu}\right) : \frac{\mu l}{b}$$

величина μ пока произвольная; стоитъ только взять

$$\frac{\mu}{b} = k \quad \dots\dots\dots \quad (13)$$

и мы получимъ, что предыдущее отношеніе равно

$$[1 + ks - (1 + bk) e^{k(s-b)}] : kl.$$

Соотношенія (13) Ньютонъ не пишетъ, а замѣняетъ его уравненіемъ (12), опредѣляющимъ величину μ по отношенію $\frac{a}{b}$ отклоненій маятника отъ нижней точки C циклоиды.

на основаніи равенствъ:

$$OR \,.\, HG = OR \,.\, HR - OR \,.\, GR = ORHK - OPJK = PJHR =$$
$$= PJGR + JGH$$

предыдущее отношеніе равно:

$$\left(PJGR + JGH - \frac{OR}{OQ} \cdot JEF\right) : OPJK$$

поэтому если площадь $\frac{OR}{OQ} \,.\, JEF - JGH$ обозначить черезъ Y, уменьшеніе же $RGgr$ площади $PJGR$ положить постояннымъ [154]), то приращеніе Y будетъ пропорціонально $PJGR - Y$.

Если обозначить черезъ V дѣйствующую на тѣло въ точкѣ D по касательной, пропорціональную дугѣ CD слагающую силы тяжести и черезъ R сопротивленіе, то разность $V - R$ представитъ силу ускоряющую тѣло въ точкѣ D; слѣдовательно, приращеніе скорости пропорціонально этой силѣ $V - R$, и тому промежуточку времени, въ продолженіе коего оно происходитъ, самая же скорость прямо пропорціональна одновременно съ тѣмъ происходящему приращенію пройденнаго пространства и обратно пропорціональна сказанному промежуточку времени. Такъ какъ, по предположенію, сопротивленіе пропорціонально квадрату скорости, то приращеніе сопротивленія (по л. II) пропорціонально произведенію скорости на приращеніе ея, т.-е. пропорціонально произведенію приращеній пройденнаго пространства на $V - R$, принимая же приращеніе пройденнаго пространства постояннымъ—величинѣ $V - R$. Если написать вмѣсто V площадь $PJGR$, которой она представляется, и представить сопротивленіе R какою-либо другою площадью Z, то приращеніе сопротивленія будетъ пропорціонально $PJGR - Z$.

Слѣдовательно, когда площадь $PJGR$ будетъ равномѣрно убывать отъ отнятія постоянныхъ безконечно малыхъ ея уменьшеній, площадь Y будетъ возрастать пропорціонально $PJGR - Y$, и площадь Z пропорціонально $PJGR - Z$, поэтому если площади Y и Z въ началѣ равны и начинаются совмѣстно, то отъ приложенія равныхъ безконечно малыхъ приращеній онѣ будутъ продолжать быть равными, а также при убываніи отъ отнятія равныхъ безконечно малыхъ уменьшеній онѣ совмѣстно уничтожаются. И обратно, если онѣ одновременно начинаются и одновременно

---

[154]) Этимъ условіемъ постоянства безконечно малаго приращенія (или какъ его Ньютонъ называетъ уменьшенія, ибо оно отрицательное) площади $PJGR$, эта площадь принимается въ дифференціальномъ уравненіи за перемѣнную независимую; по предположенію же эта площадь пропорціональна дугѣ s, значитъ это условіе равносильно тому, что въ преобразованномъ къ виду (3) уравненіи (2) дуга s принимается за перемѣнную независимую.

Это уравненіе не пишется въ видѣ формулы, а излагается далѣе словами.

уничтожаются, то онѣ будутъ имѣть постоянно равныя безконечно малыя приращенія, и будутъ все время между собою равны. Это происходитъ потому, что при увеличеніи сопротивленія Z какъ скорость, такъ и дуга Ca, на которую тѣло поднимается, уменьшаются, точка a, въ которой движеніе прекращается, приближается къ точкѣ C, и сопротивленіе уничтожается ранѣе нежели площадь Y. Обратное имѣетъ мѣсто, если сопротивленіе Z уменьшить.

Но площадь Z начинается и исчезаетъ тамъ, гдѣ сопротивленіе равно нулю, т.-е. при началѣ движенія, когда дуга CD равна дугѣ CB и прямая RG совпадаетъ съ прямою QE, и въ концѣ движенія, когда дуга CD равна дугѣ Ca и RG совпадаетъ съ ST. Площадь Y или $\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH$ начинается и исчезаетъ тамъ, гдѣ она равна нулю, т.-е. тамъ, гдѣ

$$\frac{OR}{OQ} \cdot JEF = JGH$$

т.-е. (по построенію) когда прямая RG поочередно совпадаетъ съ прямыми QE и ST, поэтому сказанныя площади начинаются и уничтожаются совмѣстно, и, слѣдовательно, между собою постоянно равны. Значитъ площадь

$$\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH = Z$$

и такъ какъ величина Z представляетъ сопротивленіе, то отношеніе предыдущей площади къ площади $PJNM$, представляющей силу тяжести, равно отношенію сопротивленія къ силѣ тяжести.

Слѣдствіе 1. Отношеніе сопротивленія въ низшей точкѣ C къ силѣ тяжести равно отношенію $\frac{OP}{OQ} \cdot JEF$ къ площади $PJNM$.

Слѣдствіе 2. Сопротивленіе наибо́льшее тамъ, гдѣ площадь $PJHR$ относится къ площади JEF, какъ OR къ OQ, ибо въ этомъ случаѣ его безконечно малое приращеніе $PJGR - Y$ обращается въ нуль.

Слѣдствіе 3. Такимъ образомъ можетъ быть опредѣляема скорость въ отдѣльныхъ мѣстахъ, ибо она пропорціональна корню квадратному изъ сопротивленія и въ самомъ началѣ движенія, равна скорости тѣла, колеблющагося по той же циклоидѣ безъ сопротивленія.

Впрочемъ, въ виду того, что вычисленіе для нахожденія по этому предложенію сопротивленія и скорости трудно, добавляется слѣдующее предложеніе.

Предложеніе XXX. Теорема XXIV.

Если прямая aB равна длинѣ дуги циклоиды, описываемой тѣломъ при его качаніяхъ и по перпендикулярамъ DK, возставленнымъ въ каждой отдѣльной точкѣ D этой прямой, откладывать длины, коихъ отношеніе къ длинѣ маятника равно отношенію сопротивленія испытываемаго

тѣломъ въ моментъ прохожденія черезъ соотвѣтствующую точку дуги къ силѣ тяжести, то я утверждаю, что разность между длиною дуги описываемой тѣломъ на нисходящей части размаха и длиною дуги описываемой на слѣдующей затѣмъ восходящей, будучи умножена на полусумму этихъ дугъ, равна площади BKa образуемой перпендикулярами DK.

Пусть длина дуги циклоиды, описываемая при полномъ размахѣ, представляется (фиг. 167) равною ей длиною aB, длина же дуги, которая была бы описана въ пустотѣ, длиною AB. Точка C середина дуги AB представитъ низшую точку циклоиды, и длина CD будетъ пропорціональна составляющей силы тяжести, дѣйствующей на тѣло въ точкѣ D по направленію касательной къ циклоидѣ, отношеніе этой длины къ длинѣ маятника равно отношенію этой силы къ силѣ тяжести. Поэтому, эту силу будемъ представлять длиною CD, силу же тяжести длиною маятника; если же откладывать по DE длину DK, которая относится къ длинѣ маятника какъ сопротивленіе къ тяжести, то DK будетъ представлять сопротивленіе. Центромъ C и радіусомъ CA или CB описывается полукругъ $BEeA$. Когда тѣло, двигаясь въ пустотѣ, описываетъ въ весьма малый промежутокъ времени весьма малое пространство Dd, то перпендикуляры DE и de, возставленные въ точкахъ D и d и пересѣкающіе полуокружность въ E и e, пропорціональны скорости, которою обладаетъ при прохожденіи черезъ точки D и d, опускающееся изъ B тѣло, качаясь въ пустотѣ (предл. LII кн. I).

Пусть эти перпендикуляры DE и de и представляютъ сказанныя скорости, и пусть DF представляетъ скорость, которою обладаетъ въ точкѣ D тѣло, опускающееся изъ B въ сопротивляющейся средѣ. Если точкою C какъ центромъ и радіусомъ CF описать кругъ FfM, пересѣкающій прямыя de и AB въ f и M, то M будетъ тѣмъ крайнимъ положеніемъ, до котораго тѣло достигло бы затѣмъ безъ сопротивленія, и df была его скорость въ точкѣ d. Поэтому, если Fg представляетъ безконечно малое приращеніе скорости, утрачиваемое тѣломъ вслѣдствіе сопротивленія среды, при описаніи весьма малаго пути Dd, то взявъ $CN = Cg$, получимъ въ N мѣсто тѣла, до котораго оно затѣмъ достигло бы безъ сопротивленія, и MN представляетъ утрату въ дугѣ восхожденія, происходящую вслѣдствіе сказанной утраты скорости.

На Df опускается перпендикуляръ Fm; отношеніе уменьшенія Fg скорости DF, производимаго сопротивленіемъ DK, къ приращенію fm скорости, производимому силою CD, равно отношенію самихъ силъ DK къ CD. Изъ подобія же треугольниковъ Fmf, Fhg, FDC слѣдуетъ:

$$fm : Fm = fm : Dd = CD : DF.$$

Но какъ сказано

$$Fg : Fm = DK : CD$$

а такъ какъ $Fm = Dd$, то изъ этихъ пропорцій имѣемъ:

$$Fg : Dd = DK : DF$$

Точно также

$$Fh : Fg = DF : CF,$$

а такъ какъ

$$Fh = MN \quad \text{и} \quad CF = CM$$

то будетъ

$$MN . CM = Dd . DK.$$

Слѣдовательно сумма всѣхъ $MN . CM$ равна суммѣ всѣхъ $DK . Dd$.

Вообрази, что черезъ подвижную точку M постоянно проводится ордината, по которой откладывается длина равная CM, и которая непрерывнымъ движеніемъ переходитъ отъ A до a, площадь трапеціи описываемая этою ординатою, равная площади прямоугольника $\frac{1}{2}\, aB \,.\, Aa$ будетъ равна суммѣ всѣхъ произведеній $CM . MN$, т.-е. и суммѣ всѣхъ произведеній $DK . Dd$, а значитъ и площади [155]) кривой $BKVTa$.

Слѣдствіе. Такимъ образомъ, по закону сопротивленія и разности Aa дугъ $CB - Ca$ можно вывести приближенную величину отношенія силы сопротивленія къ силѣ тяжести.

Такъ, если сопротивленіе DK постоянное, то фигура $BKTa$ будетъ прямоугольникомъ, коего основаніе Ba и высота DK и такъ какъ произве-

---

[155]) Изложенное въ этомъ предложеніи разсужденіе равносильно слѣдующему: обозначимъ черезъ m массу маятника, R сопротивленіе на него дѣйствующее, черезъ b его начальное отклоненіе CB и черезъ a его отклоненіе Ca при концѣ перваго размаха.

Уравненіе движенія маятника будетъ:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{mg}{l} . s = R \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

которое можно написать въ такомъ видѣ

$$\frac{l}{g}\frac{d^2s}{dt^2} + s = \frac{R}{mg} . l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Умножая первый членъ этого уравненія на $-\frac{ds}{dt} . dt$, второй и третій на $-ds$ и интегрируя въ предѣлахъ отъ $s = b$ до $s = -a$, получимъ замѣтивъ, что $\frac{ds}{dt} = 0$, какъ при $s = b$, такъ и при $s = -a$

$$\frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \int_{-a}^{b} l . \frac{R}{mg} . ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Ньютонъ полагаетъ $DK : l = R : mg$, предыдущая формула и выражаетъ высказанную теорему.

деніе $\frac{1}{2}$ $Ba \,.\, Aa$ равно площади этого прямоугольника, т.-е. $Ba \,.\, DK$, то DK равно $\frac{1}{2}$ Aa. Такъ какъ DK представляетъ сопротивленіе, когда сила тяжести представляется длиною маятника, то отношеніе сопротивленія къ тяжести равно отношенію $\frac{1}{2}$ Aa къ длинѣ маятника, согласно съ доказаннымъ въ предложеніи XXVIII.

Если сопротивленіе пропорціонально скорости, то фигура $BKTa$ весьма близка къ эллипсу. Ибо, когда тѣло въ средѣ безъ сопротивленія описываетъ при полномъ размахѣ дугу AB, то его скорость въ любомъ мѣстѣ D пропорціональна ординатѣ DE круга описаннаго на діаметрѣ AB.

Такъ какъ длины, Ba въ средѣ сопротивляющейся и BA въ средѣ безъ сопротивленія, описываются приблизительно въ одинаковое время, то скорость въ каждой отдѣльной точкѣ Ba относится къ скорости въ соотвѣтствующей точкѣ BA какъ Ba къ BA, значитъ скорость въ точкѣ D при движеніи въ сопротивляющейся средѣ будетъ пропорціональна ординатѣ круга или эллипса, описаннаго на діаметрѣ Ba, слѣдовательно фигура $BKVTa$ будетъ близка къ эллипсу. Итакъ предполагая, что сопротивленіе пропорціонально скорости, представимъ длиною OV сопротивленіе въ средней точкѣ O. Площадь эллипса $BRVSa$, описаннаго на полуосяхъ OB и OV и центръ коего O, будетъ приблизительно равна площади $BKVTa$ и равному ей прямоугольнику $Aa \,.\, BO$. Слѣдовательно, отношеніе $Aa \,.\, BO$ къ $OV \,.\, BO$ равно отношенію площади этого эллипса къ $OV \,.\, BO$, значитъ Aa относится къ OV какъ площадь полукруга къ квадрату радіуса, т.-е. приблизительно какъ 11 къ 7; такимъ образомъ $\frac{7}{11}Aa$ такъ относится къ длинѣ маятника, какъ сопротивленіе колеблющагося тѣла при прохожденіи черезъ точку O къ силѣ тяжести.

Если сопротивленіе DK будетъ пропорціонально квадрату скорости, то фигура $BKVTa$ будетъ близка къ параболѣ вершина коей есть V и ось OV; площадь этой фигуры будетъ приблизительно равна $\frac{2}{3}Ba.OV$. Слѣдовательно, будетъ

$$\frac{1}{2}Ba \,.\, Aa = \frac{2}{3}Ba \,.\, OV,$$

т.-е.

$$OV = \frac{3}{4}Aa,$$

поэтому, сопротивленіе качающагося тѣла при прохожденіи черезъ точку O относится къ его тяжести какъ $\frac{3}{4}Aa$ къ длинѣ маятника [156]).

---

[156]) Эти соображенія основаны на предположеніи, что сопротивленіе среды настолько мало, что можно считать скорость при движеніи въ средѣ,

Я считаю, что точность такого рода соображеній вполнѣ достаточна для практическихъ приложеній, ибо если эллипсъ или парабола $BRVSa$ совпадаютъ съ кривою $BKVTa$ въ средней точкѣ V и если на одной половинѣ BRV или VSa ихъ ординаты превосходятъ ординаты кривой, то на другой половинѣ будетъ наоборотъ и такимъ образомъ площади приблизительно уравниваются.

Предложеніе XXXI. Теорема XXV.

Если сопротивленіе испытываемое качающимся тѣломъ въ каждой отдѣльной части описываемой имъ дуги, будетъ увеличено или уменьшено въ постоянномъ отношеніи, то и разность между длиною дуги нисходящей части его размаха и слѣдующей за нею восходящей увеличится или уменьшится въ томъ же отношеніи.

Такъ какъ эта разность происходитъ отъ утраты скорости маятника вслѣдствіе сопротивленія среды, то она пропорціональна какъ этой утратѣ, такъ и пропорціональному утратѣ сопротивленію. Въ предыдущемъ предложеніи показано, что произведеніе $\frac{1}{2} aB \,.\, Aa$, гдѣ Aa есть разность упомянутыхъ дугъ $CB - Ca$, равно площади $BKTa$, площадь же эта, если сохранять основаніе aB увеличивается или уменьшается въ томъ же отношеніи какъ и ординаты DK, т.-е. пропорціонально сопротивленію, слѣдовательно, эта площадь пропорціональна длинѣ aB и сопротивленію, значитъ, произведеніе $\frac{1}{2} aB \,.\, Aa$ пропорціонально сопротивленію и aB, слѣдовательно, Aa пропорціонально сопротивленію.

сопротивляющейся такою же, какъ въ той же точкѣ при движеніи безъ сопротивленія.

Сохраняя обозначенія предыдущаго примѣчанія, имѣемъ при $R = 0$:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l} s.$$

Умноживъ на $-\frac{ds}{dt} \,.\, dt = -ds$, и интегрируя въ предѣлахъ отъ $s = b$ до $s = s$, получимъ

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2 = \frac{g}{l} (b^2 - s^2).$$

Если сопротивленіе R пропорціонально v, то будетъ

$$DK = k\sqrt{b^2 - s^2}$$

т.-е. кривая $BKVa$ есть эллипсъ.

Если сопротивленіе R пропорціонально v^2, то будетъ

$$DK = k(b^2 - s^2)$$

т.-е. кривая $BKVa$ есть парабола.

Слѣдствіе 1. Если сопротивленіе пропорціонально скорости, то разность дугъ въ той же средѣ пропорціональна полной величинѣ размаха и наоборотъ.

Слѣдствіе 2. Если сопротивленіе пропорціонально квадрату скорости, то разность дугъ будетъ пропорціональна квадрату величины полнаго размаха и обратно.

Слѣдствіе 3. Вообще, если сопротивленіе пропорціонально кубу или какой-либо иной степени скорости, то и сказанная разность будетъ пропорціональна той же степени величины полнаго размаха и обратно.

Слѣдствіе 4. Если сопротивленіе частію пропорціонально первой степени скорости частію второй, то разность будетъ также частію пропорціональна первой степени величины полнаго размаха, частію второй, и обратно. Вообще законъ выражающій зависимость сопротивленія отъ скорости таковъ же какъ и законъ зависимости разности дугъ отъ полной величины размаха [157]).

Слѣдствіе 5. Слѣдовательно, когда маятникъ послѣдовательно совершаетъ неравной величины размахи, то можно найти зависимость возрастанія или убыванія сказанной разности вмѣстѣ съ величиною размаха; по этой зависимости получится затѣмъ и зависимость сопротивленія отъ скорости.

---

[157]) Какъ эта теорема, такъ и ея слѣдствія имѣютъ мѣсто лишь при упомянутомъ въ предыдущемъ предложеніи допущеніи.

Въ самомъ дѣлѣ, предполагая, что сопротивленіе пропорціонально $n^{ой}$ степени скорости и что оно настолько мало, что при каждомъ отдѣльномъ размахѣ можно скорость принимать равной той, которую маятникъ имѣлъ бы въ этой точкѣ, качаясь въ пустотѣ, на основаніи равенства (3) имѣемъ:

$$(b-a)\frac{b+a}{2}=k\int_{-a}^{b} v^n ds$$

причемъ k есть нѣкоторая постоянная; за величину v можно принять или $\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{b^2-s^2}$ или какъ дѣлаетъ Ньютонъ

$$v=\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{c^2-s^2}$$

гдѣ $c=\frac{b+a}{2}$ и тогда предыдущее уравненіе замѣнится такимъ:

$$c\,.\,(b-a)=k_1\int_{-c}^{+c}(c^2-s^2)^{\frac{n}{2}}\,.\,ds=k_1c^n\int_{-c}^{+c}\left(1-\frac{s^2}{c^2}\right)^{\frac{n}{2}}ds$$

въ которомъ k_1 есть нѣкоторая постоянная.

Полагая $s=cz$ имѣемъ

Общее поученіе.

На основаніи этихъ предложеній по качаніямъ маятниковъ въ сопротивляющейся средѣ можно найти сопротивленіе среды.

Я на основаніи этого изслѣдовалъ сопротивленіе воздуха при помощи слѣдующихъ опытовъ.

Я подвѣсилъ къ прочному крюку на тонкой нити деревянный шаръ, вѣсъ коего былъ $57\frac{7}{22}$ римскихъ унцій [158]) и діаметръ $6\frac{7}{8}$ англійскихъ дюйма, такъ что разстояніе между крюкомъ и центромъ качанія шара было $10\frac{1}{2}$ футъ; на нити я отмѣтилъ точку въ разстояніи 10 футъ 1 дюйма отъ центра подвѣса, и противъ этой точки я установилъ линейку раздѣленную на дюймы, по которой я и замѣчалъ длины дугъ описываемыхъ маятникомъ [159]).

Затѣмъ, я сосчитывалъ число размаховъ, послѣ котораго маятникъ утрачивалъ восьмую часть величины своего размаха. Напримѣръ, когда маятникъ отводился отъ отвѣса на 2 дюйма и пускался, такъ что полная величина дуги нисходящей части размаха была равна 2 дюймамъ, полная же величина перваго размаха составляла почти 4 дюйма, то послѣ 164 кача-

---

$$b - a = k_1 \cdot c^n \int_{-1}^{+1} (1 - z^2)^{\frac{n}{2}} \cdot dz = Kc^n$$

гдѣ K постоянная, а такъ какъ разность $b - a$ предполагается малой, то вмѣсто c можно написать b и тогда будетъ

$$b - a = Kb^n.$$

Очевидно, что когда сопротивленіе R представляется суммою членовъ вида

$$k_1 v^n + k_2 v^p + k_3 v^q + \ldots$$

то уменьшеніе величины размаха представится суммою вида

$$K_1 b^n + K_2 b^p + K_3 b^q + \ldots$$

[158]) Римская унція есть $\frac{1}{12}$ англійскаго фунта troy, т.-е. аптекарскаго, равная 480 гранъ, что равно 31,1035 грамма.

[159]) По моей просьбѣ въ Опытовомъ Судостроительномъ Бассейнѣ были произведены С. В. Вяхиревымъ опыты, подобные описаннымъ Ньютономъ, причемъ былъ взятъ шаръ указанныхъ имъ вѣса и размѣровъ и подвергнутъ качаніямъ на нити длиною $10\frac{1}{2}$ футъ. Запись величины размаховъ производилась фотоэлектрическимъ способомъ съ весьма большою точностью. Подробное описаніе этихъ опытовъ и полученныхъ результатовъ помѣщено въ концѣ этой книги.

ній онъ утрачивалъ восьмую часть величины своего размаха, и при последнемъ размахѣ длина восходящей части составляла $1\frac{3}{4}$ дюйма. Когда при первомъ размахѣ нисходящая часть дуги составляла 4 дюйма, то онъ утрачивалъ восьмую часть послѣ 121 размаха, при чемъ восходящая часть послѣдняго размаха составляла $3\frac{1}{2}$ дюйма. Когда маятникъ при первомъ размахѣ описывалъ дугу въ 8, 16, 32, 64 дюйма, то онъ утрачивалъ восьмую часть размаха послѣ: 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$ размаха. Слѣдовательно, разность длинъ нисходящей дуги при первомъ размахѣ и восходящей при послѣднемъ составляла соотвѣтственно въ первомъ, второмъ, третьемъ, четвертомъ, пятомъ и шестомъ случаяхъ: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 дюймовъ. Если эти разности раздѣлить на соотвѣтствующее каждому случаю число размаховъ, то при средней величинѣ размаха, при которомъ проходится дуга въ $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 дюймовъ разность восходящей и нисходящей части составитъ: $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ дюйма.

Эти величины для большихъ размаховъ, приблизительно пропорціональны квадратамъ самихъ размаховъ, для меньшихъ немного больше нежели первой степени ихъ, поэтому (см. 2 пр. XXXI) сопротивленіе шара, когда онъ движется быстрѣе, пропорціонально квадрату скорости, когда же медленнѣе, то—немного болѣе нежели первой ея степени.

Пусть V означаетъ наибольшую скорость при какомъ-либо размахѣ, и A, B, C постоянныя величины, допустимъ, что разность восходящей и нисходящей дуги выражается такъ:

$$AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2.$$

Такъ какъ при движеніи по циклоидѣ наибольшія скорости пропорціональны половинамъ длинъ дугъ, описываемыхъ качающимся тѣломъ, при движеніи же по кругу хордамъ этихъ половинныхъ дугъ, то при равныхъ длинахъ дугъ скорость для циклоиды больше, нежели для круга, въ отношеніи этихъ половинныхъ дугъ къ ихъ хордамъ, времена же качаній по кругу больше, нежели по циклоидѣ, въ отношеніи, обратномъ отношенію скоростей, отсюда слѣдуетъ, что разности дугъ (которыя пропорціональны сопротивленію и квадрату времени) будутъ приблизительно одинаковы для обѣихъ кривыхъ, ибо эти разности для циклоиды надо съ одной стороны увеличить вмѣстѣ съ сопротивленіемъ приблизительно пропорціонально квадрату отношенія дуги къ хордѣ, ибо скорость увеличивается въ этомъ отношеніи, съ другой стороны надо ихъ уменьшить пропорціонально квадрату времени, т.-е. тоже пропорціонально квадрату отношенія дуги къ хордѣ. Такимъ образомъ если сдѣлать приведеніе къ циклоидѣ, то надо принимать разности такими же, какъ и наблюденныя для

круга, наибольшія же скорости надо полагать пропорціональными или половиннымъ или цѣлымъ дугамъ размаховъ, т.-е. числамъ: $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16. Подставимъ поэтому для случаевъ второго, четвертаго и шестого вмѣсто V числа 1, 4 и 16, тогда получатся слѣдующія уравненія, выражающія разности дугъ:

$$\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$$

$$\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$$

$$\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$$

изъ которыхъ находимъ:

$$A = 0{,}0000916;\quad B = 0{,}0010847;\quad C = 0{,}0029558.$$

Слѣдовательно разность дугъ пропорціональна

$$0\,.\,0000916V + 0\,.\,0010847V^{\frac{3}{2}} + 0\,.\,0029558V^2.$$

Такъ какъ по слѣдствію пред. XXX, прилагаемому къ этому случаю, сопротивленіе шара по срединѣ описываемой при качаніяхъ дуги, гдѣ скорость есть V, относится къ его вѣсу какъ количество

$$\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$$

относится къ длинѣ маятника, то написавъ вмѣсто A, B, C выше найденныя числа, получится, что отношеніе сопротивленія шара къ его вѣсу равно отношенію количества

$$0.0000583V + 0.0007593V^{\frac{3}{2}} + 0.0022169V^2$$

къ длинѣ нити между центромъ подвѣса и линейкою, т.-е. къ 121 дюйму.

Такъ какъ V во второмъ случаѣ положено равнымъ 1, въ четвертомъ 4 и въ шестомъ 16, то отношеніе сопротивленія къ вѣсу шара составитъ во второмъ случаѣ 0.0030347 къ 121, въ четвертомъ 0.041748 къ 121 и въ шестомъ 0.61705 къ 121.

Дуга, описываемая отмѣченною на нити точкою, въ шестомъ случаѣ составляла $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$, т.-е. $119\frac{5}{29}$ дюйма, а такъ какъ радіусъ составлялъ 121 дюймъ, длина же маятника между точкою подвѣса и центромъ шара 126 дюймовъ, то дуга, описываемая центромъ шара, составляла

$124\frac{3}{31}$ дюйма. Затѣмъ наибольшая скорость колеблющагося тѣла, вслѣдствіе сопротивленія воздуха, приходится не въ низшей точкѣ описываемой дуги, а весьма близко къ серединѣ этой дуги; эта наибольшая скорость будетъ приблизительно такова, какъ будто бы тѣло въ средѣ не сопротивляющейся описало нисходящій полуразмахъ, равный сказанной половинѣ дуги, т.-е. $62\frac{3}{62}$ дюйма. Все это относится до движенія по циклоидѣ, къ которому приводится, какъ указано выше, движеніе маятника, поэтому эта скорость будетъ равна той скорости, которую тѣло могло бы пріобрѣсти падая съ высоты, равной синусу верзусу сказанной дуги. Но этотъ синусъ верзусъ относится для циклоиды къ дугѣ ея $62\frac{3}{62}$, какъ эта дуга къ удвоенной длинѣ маятника 252, слѣдовательно равенъ 15,278 дюйма. Такимъ образомъ скорость равна той, которую тѣло можетъ пріобрѣсти при свободномъ паденіи съ высоты 15,278 дюйма. Слѣдовательно, при такой скорости шаръ испытываетъ сопротивленіе, относящееся къ его вѣсу какъ 0,61705 къ 121 или же (если разсматривать лишь ту часть сопротивленія, которая пропорціональна квадрату скорости) какъ 0,56752 къ 121.

Гидростатическимъ испытаніемъ я нашелъ, что вѣсъ этого деревяннаго шара относился къ вѣсу такого же объема воды какъ 55 къ 97, и такъ какъ 121 къ 213,4 находится въ томъ же отношеніи, то сопротивленіе водяного шара, движущагося съ указанной выше скоростью, относилось бы къ его вѣсу какъ 0.56752 къ 213,4, т.-е. какъ 1 къ 376,02. Такъ какъ вѣсъ этого водяного шара въ продолженіе того времени, въ теченіе коего шаръ двигаясь съ указанною скоростью равномѣрно прошелъ бы путь въ 30,556 дюйма, образовалъ бы при паденіи шара эту самую скорость, то очевидно, что продолженное и постоянное сопротивленіе въ продолженіе этого времени могло бы поглотить скорость въ 376,02 раза меньшую, т.-е. $\frac{1}{376,02}$ часть полной скорости. Поэтому въ продолженіе того времени, въ теченіе коего шаръ, двигаясь съ этою скоростью, равномѣрно прошелъ бы путь, равный длинѣ своего радіуса, т.-е. $3\frac{7}{16}$ дюйма, онъ утратилъ бы $\frac{1}{3342}$ своего количества движенія.

Я просчитывалъ также число размаховъ, при которомъ маятникъ утрачивалъ четвертую часть своего движенія. Въ слѣдующей таблицѣ числа верхней строки означаютъ длины дугъ нисходящей части первыхъ размаховъ въ дюймахъ, числа средней строки—длины дугъ восходящей части послѣдняго размаха, въ нижней строкѣ показано число размаховъ. Я привожу этотъ опытъ, такъ какъ онъ болѣе точенъ, нежели когда утрачивалась восьмая часть размаха. Разсчетъ пусть попробуетъ произвести, кто пожелаетъ.

Начальное отклоненіе:	2	4	8	16	32	64	дюйма
Послѣднее поднятіе:	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48	»
Число размаховъ:	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{2}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$	»

Послѣ того я подвѣсилъ на той же нити свинцовый шаръ, діаметромъ 2 дюйма и вѣсомъ $26\frac{1}{4}$ римскихъ унцій такъ, чтобы разстояніе центра шара до точки подвѣса было равно $10\frac{1}{2}$ футамъ и сосчиталъ число размаховъ, при которомъ утрачивалась заданная часть начальной величины ихъ. Первая изъ слѣдующихъ двухъ таблицъ показываетъ число размаховъ, послѣ котораго утрачивалась восьмая часть, вторая—послѣ котораго утрачивалась четвертая часть.

Начальное отклоненіе:	1	2	4	8	16	32	64
Послѣднее поднятіе:	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Число размаховъ:	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30
Начальное отклоненіе:	1	2	4	8	16	32	64
Послѣднее поднятіе:	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Число размаховъ:	510	518	420	318	204	121	70.

Выбравъ изъ первой таблицы третье, пятое и седьмое наблюденія и обозначая наибольшія скорости въ этихъ наблюденіяхъ черезъ 1, 4, 16 и вообще черезъ V, какъ и раньше, получаемъ слѣдующія уравненія:

$$\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$$

$$\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$$

$$\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C.$$

Откуда слѣдуетъ:

$$A = 0{,}001414; \quad B = 0.000297; \quad C = 0.000879$$

и значитъ отношеніе сопротивленія шара движущагося со скоростью V къ его вѣсу $26\frac{1}{4}$ унцій выражается формулою:

$$(0{,}0009V + 0{,}000208V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659V^2) : 121.$$

Если же будемъ разсматривать лишь часть сопротивленія, пропорціональную квадрату скорости, то ея отношеніе къ вѣсу шара будетъ

$$0{,}000659V^2 : 121.$$

Но въ первыхъ опытахъ эта часть сопротивленія для деревяннаго шара относилась къ его вѣсу $57\frac{7}{22}$ унціи какъ

$$0 . 002217 V^2 : 121.$$

Поэтому сопротивленіе деревяннаго шара относится при одинаковыхъ скоростяхъ къ сопротивленію свинцоваго, какъ

$$\frac{57\frac{7}{22} . 0{,}002217}{26\frac{1}{4} . 0{,}000659} = 7\frac{1}{3} : 1.$$

Діаметры этихъ шаровъ были $6\frac{7}{8}$ и 2 дюйма; отношеніе квадратовъ этихъ діаметровъ равно $47\frac{1}{4}$: 4 или приблизительно $11\frac{13}{16}$: 1. Слѣдовательно, сопротивленіе шаровъ движущихся съ одинаковою скоростью было въ меньшемъ отношеніи, нежели квадраты діаметровъ. Но при этомъ не принято въ соображеніе сопротивленіе нити, которое навѣрное было весьма значительно и которое слѣдовало отнять изъ полнаго сопротивленія. Я не могъ его опредѣлить въ точности, однако я его нашелъ бо̀льшимъ, нежели третья часть сопротивленія малаго маятника и отсюда вывелъ, что за вычетомъ сопротивленія нити сопротивленіе шаровъ приблизительно пропорціонально квадратамъ діаметровъ ихъ, ибо отношеніе $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ къ $1 - \frac{1}{3}$, равное $10\frac{1}{2}$: 1, немного отличается отъ отношенія квадратовъ діаметровъ $11\frac{13}{16}$: 1.

Такъ какъ сопротивленіе нити для большихъ шаровъ имѣетъ меньшее значеніе, то я попробовалъ произвести такой же опытъ съ шаромъ, діаметръ котораго былъ $18\frac{3}{4}$ дюйма. Длина маятника между точкою подвѣса и центромъ качаній была 122,5 дюйма, между точкою подвѣса и мѣткою на нити 109,5 дюйма. Дуга описываемая мѣткою при первомъ размахѣ внизъ 32 дюйма. Дуга подъема послѣ пяти качаній, описываемая тою же мѣткою, 28 дюймовъ. Сумма дугъ или величина полнаго средняго размаха 60 дюймовъ. Разность дугъ 4 дюйма.

Десятая ея часть, т.-е. разность между длиною нисходящей и восходящей части при среднемъ размахѣ составляетъ 0,4 дюйма. Дуга описываемая центромъ шара при среднемъ размахѣ будетъ:

$$60 . \frac{122{,}5}{109{,}5} = 67\frac{1}{8} \text{ дюйма}$$

разность длинъ восходящей и нисходящей ея части:

$$0{,}4 . \frac{122{,}5}{109{,}5} = 0{,}4475 \text{ дюйма.}$$

Если бы увеличить длину маятника въ отношеніи 126 къ 122,5, сохраняя длину дуги размаха, то время размаха увеличилось бы, скорость же маят-

ника уменьшилась бы въ отношенiи корней квадратныхъ изъ этихъ чиселъ, разность же дугъ осталась бы безъ перемѣны 0,4475 дюйма. Затѣмъ, если дугу размаха увеличить въ отношенiи $124\frac{3}{31}$ къ $67\frac{1}{8}$, то эта разность 0,4475 увеличится въ отношенiи квадратовъ этихъ чиселъ и станетъ 1,5295.

Все это имѣло бы мѣсто предполагая, что сопротивленiе пропорцiонально квадрату скорости. Слѣдовательно, если бы маятникъ описывалъ полные размахи по $124\frac{3}{31}$ дюйма, и длина его между точкою подвѣса и центромъ качанiй составляла бы 126 дюймовъ, то разность нисходящей и слѣдующей за нею восходящей части размаха составляла бы 1,5295 дюйма. Эта разность, будучи помножена на вѣсъ маятника, составлявшiй 208 унцiй, даетъ 318,136. Для перваго же маятника съ деревяннымъ шаромъ описывавшимъ при своемъ качанiи полную дугу въ $124\frac{3}{31}$ дюйма, причемъ разстоянiе точки его подвѣса до центра качанiй было 126 дюймовъ разность дугъ составляла $\frac{8}{9\frac{2}{3}} \cdot \frac{126}{121}$, что̀ будучи умножено на вѣсъ шара $57\frac{7}{22}$ унцiй, даетъ произведенiе 49,396. Я умножалъ вышеуказанныя разности на вѣса маятниковъ, чтобы получить ихъ сопротивленiя, ибо эти разности происходятъ отъ сопротивленiя и прямо ему пропорцiональны, вѣсу же онѣ обратно пропорцiональны. Слѣдовательно, сопротивленiя относятся какъ числа 318,316 : 49,396.

Но для меньшаго шара часть сопротивленiя, пропорцiональная квадрату скорости, относилась къ полному сопротивленiю какъ 0,56752 къ 0,61675 и, значитъ, при полномъ сопротивленiи 49,396 составляла 45,453; для бо́льшаго же шара это сопротивленiе было почти равно полному его сопротивленiю, такимъ образомъ, отношенiе этихъ частей сопротивленiя равно 318,316 къ 45,453, т.-е. 7 къ 1. Но дiаметры шаровъ были $18\frac{3}{4}$ и $6\frac{7}{8}$ дюйма, отношенiе ихъ квадратовъ $351\frac{9}{16}$ и $47\frac{17}{64}$ приблизительно равно 7,438 къ 1, т.-е. близко къ отношенiю сопротивленiй 7 : 1. Разница этихъ отношенiй едва-ли больше той, которая могла произойти отъ сопротивленiя нити. Слѣдовательно, тѣ части сопротивленiя, которыя для того же шара пропорцiональны квадрату скорости, при равныхъ скоростяхъ пропорцiональны квадратамъ дiаметровъ шаровъ.

Впрочемъ, большiй изъ шаровъ, которыми я для этихъ опытовъ пользовался, не былъ вполнѣ правиленъ и поэтому я въ вышеизложенномъ вычисленiи для краткости пренебрегъ разными мелочами—мало озабочиваясь точностью вычисленiя для недостаточно точнаго опыта. Но я бы желалъ, ибо отъ этого зависитъ доказательство существованiя пустоты, чтобы эти опыты были бы повторены съ шарами бо́льшихъ размѣровъ и въ бо́льшемъ числѣ и болѣе правильными. Если взять шары въ геометрической прогрессiи напр., коихъ дiаметры были бы 4, 8, 16, 32 дюйма, то по

прогрессіи результатовъ опытовъ можно будетъ заключить, что должно имѣть мѣсто для шаровъ еще бóльшаго размѣра.

Для сравненія сопротивленія различныхъ жидкостей я произвелъ слѣдующія испытанія. Я изготовилъ деревянный ящикъ, длиною 4 фута, шириною и высотою по 1 футу; оставляя его сверху открытымъ, я наполнилъ его ключевой водой и заставлялъ маятники качаться внутри воды.

Свинцовый шаръ діаметромъ $3\frac{5}{8}$ дюйма, вѣсившій $166\frac{1}{6}$ унцій, колебался, какъ показано въ слѣдующей таблицѣ, причемъ длина нити отъ точки подвѣса до мѣтки на ней была 126 дюймовъ, разстояніе до центра качаній $134\frac{3}{8}$ дюйма.

Начальное отклоненіе мѣтки на нити:	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	дюйма
Послѣднее поднятіе:	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	»
Разность дугъ пропорціональная потерянному количеству движенія:	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	»
Число качаній въ водѣ:	—	—	$\frac{29}{60}$	1,2	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$	»
Число качаній въ воздухѣ:	85,5	—	287	535						»

При четвертомъ испытаніи утрачивалось одинаковое количество движенія послѣ 535 размаховъ въ воздухѣ и 1,2 размаха въ водѣ, но каченія въ воздухѣ были немного быстрѣе, нежели въ водѣ. Если бы каченія въ водѣ ускорить въ такомъ отношеніи, что движеніе маятниковъ въ обѣихъ жидкостяхъ стало бы одинаково быстрымъ, то число 1,2 качаній въ водѣ, при которомъ утрачивается то же количество движенія, сохранится безъ измѣненія, ибо сопротивленіе возросло бы, а квадратъ времени уменьшился бы въ одинаковомъ отношеніи, равномъ квадрату вышеупомянутаго.

Слѣдовательно, при равныхъ скоростяхъ равныя количества движенія утрачиваются: въ воздухѣ при 535 качаніяхъ, въ водѣ при 1,2, значитъ сопротивленіе маятника въ водѣ относится къ его сопротивленію въ воздухѣ, какъ 535 къ 1,2. Таково отношеніе полныхъ сопротивленій для случая четвертаго столбца.

Обозначимъ черезъ $AV+CV^2$ разность длинъ дугъ нисходящей и слѣдующей за ней восходящей части размаха описываемыхъ шаромъ, коего наибольшая скорость V; такъ какъ наибольшая скорость въ случаѣ четвертаго столбца относится къ наибольшей скорости случая столбца перваго, какъ 1 къ 8, отношеніе же соотвѣтствующихъ разностей дугъ равно отношенію чиселъ $\frac{2}{535}$ къ $\frac{16}{85,5}$ или 85,5 къ 4280, то положимъ, въ этихъ слу-

чаяхъ скорости равными 85,5 и 4280, примемъ числа 1 и 8 за разности дугъ, тогда получатся уравненія:

$$85{,}5 = A + C$$
$$4280 = 8A + 64C.$$

Откуда слѣдуетъ

$$C = 64\frac{3}{14}, \qquad A = 21\frac{2}{7}$$

а такъ какъ сопротивленіе пропорціонально

$$\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$$

то оно будетъ выражаться формулою

$$13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2.$$

Поэтому для случая четвертаго столбца, гдѣ скорость $V = 1$, полное сопротивленіе относится къ своей части пропорціональной квадрату скорости, какъ

$$\left(13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}\right) : 48\frac{9}{56}$$

т.-е. какъ

$$61\frac{12}{17} : 48\frac{9}{56}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что сопротивленіе маятника въ водѣ относится къ той части его сопротивленія въ воздухѣ, которая пропорціональна квадрату скорости, и которую только и надо разсматривать при болѣе быстрыхъ движеніяхъ, какъ

$$61\frac{12}{17} \cdot 535 \text{ къ } 1\frac{1}{5} \cdot 48\frac{9}{56}$$

т.-е. какъ 571 къ 1.

Если бы у маятника, качающагося въ водѣ, была бы погружена и вся нить, то его сопротивленіе стало бы больше, такъ что та часть сопротивленія маятника въ водѣ, которая пропорціональна квадрату скорости, и которую только и надо разсматривать при быстромъ движеніи тѣлъ, относилась бы къ таковой же части полнаго сопротивленія того же маятника, качающагося въ воздухѣ приблизительно какъ 850 къ 1, т.-е. какъ плотность воды къ плотности воздуха.

Въ предыдущемъ разсчетѣ слѣдовало принять лишь ту часть сопротивленія маятника въ водѣ, которая пропорціональна квадрату скорости, но (что весьма замѣчательно) сопротивленіе въ водѣ возрастаетъ въ пропорціи большей, нежели квадратъ скорости. Изслѣдуя это обстоятельство,

я напалъ на мысль, что ящикъ былъ слишкомъ узокъ для шара взятаго размѣра и черезъ это препятствовалъ движенію уступающей шару воды, и дѣйствительно, когда былъ погруженъ качающійся шаръ діаметромъ въ одинъ дюймъ, то сопротивленіе оказалось весьма близкимъ къ квадрату скорости. Этотъ опытъ я произвелъ, сдѣлавъ маятникъ съ двумя шарами, изъ коихъ нижній и меньшій качался въ водѣ, верхній же, большій, былъ укрѣпленъ на нити близь поверхности воды и, двигаясь въ воздухѣ, поддерживалъ качанія маятника болѣе продолжительное время.

Результаты произведенныхъ такимъ образомъ опытовъ даны въ слѣдующей таблицѣ:

Начальное отклоненіе:	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Послѣднее поднятіе:	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Разность этихъ дугъ пропорціональная утраченному количеству движенія:	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Число качаній:	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$.

Для сравненія сопротивленій различныхъ срединъ я заставилъ желѣзные маятники качаться во ртути. Длина желѣзной проволоки была около трехъ футъ, діаметръ шара около одной трети дюйма, причемъ къ проволокѣ близко надъ поверхностью ртути былъ прикрѣпленъ свинцовый шаръ достаточной величины, чтобы дольше поддерживать движеніе маятника. Затѣмъ я заполнялъ сосудъ, содержавшій около трехъ фунтовъ ртути, послѣдовательно ртутью и простою водою, чтобы, наблюдая поочередно качанія маятниковъ въ обѣихъ жидкостяхъ, опредѣлить отношеніе сопротивленій: оказалось, что сопротивленіе ртути приблизительно въ 14 или 13 разъ больше сопротивленія воды, т.-е. во столько же разъ, во сколько ея плотность больше плотности воды. Когда я бралъ для маятника шары большаго діаметра, т.-е. около $\frac{1}{2}$ или $\frac{2}{3}$ дюйма, то сопротивленіе ртути оказывалось къ сопротивленію воды приблизительно въ отношеніи 12 или 10 къ 1. Но первое испытаніе заслуживаетъ большаго довѣрія, ибо при послѣднихъ сосудъ былъ немного узковатъ для погруженныхъ шаровъ, — при увеличеніи шаровъ надо было увеличивать и размѣры сосуда. Я намѣревался повторить подобные этому опыты въ сосудахъ большей величины съ расплавленными металлами и съ различными жидкостями, какъ горячими, такъ и холодными, но я не имѣлъ времени, чтобы все это испытать.

Изъ описаннаго же съ достаточною ясностью слѣдуетъ, что сопротивленіе быстро движущихся тѣлъ приблизительно пропорціонально плотности той жидкости, въ которой тѣла движутся. Я не говорю, что въ точности пропорціональны, ибо жидкости болѣе вязкія при одинаковой плотности

несомнѣнно оказываютъ большее сопротивленіе, нежели жидкости болѣе текучія, такъ, напр., холодное масло по сравненію съ горячимъ, горячее—большее нежели дождевая вода, вода—большее нежели винный спиртъ. Несомнѣнно однако, что изложенное правило имѣетъ мѣсто съ достаточною точностью для жидкостей, которыя и на взглядъ представляются достаточно разрѣженными или текучими какъ напр.: воздухъ, прѣсная и соленая вода, спирты винный, скипидарный, соляной (соляная кислота), масло получаемое при перегонкѣ винныхъ дрожжей (сивушное), когда оно подогрѣто, масло купоросное (сѣрная кислота), ртуть, расплавленные металлы и тому подобныя тѣла, которыя настолько текучи, что послѣ взбалтыванія въ сосудѣ долго сохраняютъ сообщенное движеніе, при выливаніи же свободно распадаются на капли; въ особенности это такъ, когда опыты производятся надъ маятниками большими и быстро движущимися.

Есть мнѣніе, что существуетъ нѣкоторая чрезвычайно тонкая эфирная среда, свободно проникающая черезъ поры и промежутки между частицами всякихъ тѣлъ; отъ такой среды, при теченіи ея черезъ поры тѣлъ, должно было бы происходить сопротивленіе, поэтому я произвелъ испытанія, чтобы опредѣлить, сосредоточено ли полностью сопротивленіе, испытываемое тѣлами при движеніи, на ихъ наружной поверхности или же и внутреннія части тѣлъ претерпѣваютъ замѣтное сопротивленіе. Опытъ, который я придумалъ, состоялъ въ слѣдующемъ: къ достаточно прочно укрѣпленному стальному крюку при помощи стальнаго кольца я подвѣсилъ на нити длиною въ 11 футъ круглую еловую кадочку, чтобы получить маятникъ сказанной длины. Крюкъ сверху былъ на своей впалой поверхности хорошо заостренъ, такъ чтобы кольцо, налегая верхнею своею частью на это острое ребро, могло двигаться совершенно свободно, къ нижней же части кольца была привязана нить. Я отклонялъ маятникъ, такимъ образомъ устроенный, приблизительно на шесть футъ отъ отвѣса въ плоскости, перпендикулярной къ заостренному ребру крюка, чтобы кольцо при качаніяхъ маятника не скользило взадъ и впередъ, ибо точка подвѣса, въ которой кольцо касается крюка, должна оставаться неподвижной. Я точно замѣчалъ начальное отклоненіе, сообщаемое мною маятнику, затѣмъ, пустивъ маятникъ, я замѣчалъ еще три другихъ его отклоненія, которыя маятникъ имѣлъ послѣ перваго, второго и третьяго размаха. Я повторялъ это многократно, чтобы опредѣлить эти отклоненія какъ можно точнѣе. Затѣмъ я наполнялъ кадочку свинцомъ и болѣе тяжелыми изъ имѣвшихся подъ рукою металлами; передъ тѣмъ я взвѣсилъ порожнюю кадочку, вмѣстѣ съ тою частью нити, которою она была обмотана и половиною остальной части заключенной между крюкомъ и подвѣшенной кадочкою, ибо нить, когда маятникъ отклоненъ отъ прямого положенія, дѣйствуетъ на него половиною своего вѣса. Къ этому вѣсу я придалъ вѣсъ воздуха заполнявшаго кадочку. Полный вѣсъ порожней кадочки составлялъ приблизительно $\frac{1}{78}$ вѣса кадочки, заполненной металлами. Такъ какъ кадочка, наполнен-

ная металломъ, растягивая нить, увеличивала ея длину, то я укорачивалъ нить настолько, чтобы при качаніяхъ маятника длина ея была такою же, какъ и раньше. Отведя затѣмъ маятникъ до перваго изъ замѣченныхъ, какъ сказано выше, отклоненій я его пускалъ и насчитывалъ около 77 качаній, пока маятникъ имѣлъ отклоненіе равное второму, затѣмъ еще столько, пока оно становилось равнымъ третьему и, наконецъ, еще столько же, когда оно становилось равнымъ четвертому. Отсюда я заключаю, что все сопротивленіе заполненной кадочки имѣетъ не большее отношеніе къ сопротивленію порожней, какъ 78 къ 77. Ибо если бы оба сопротивленія были равны, то заполненная кадочка, масса которой въ 78 разъ болѣе массы порожней кадочки, должна была бы сохранять и во столько же разъ дольше свое колебательное движеніе и, слѣдовательно, по совершеніи 78 размаховъ приходить въ замѣченныя, какъ сказано выше, положенія. Она же приходила въ нихъ черезъ 77 размаховъ [160]).

Обозначимъ черезъ A сопротивленіе, дѣйствующее на наружную поверхность кадочки и черезъ B сопротивленіе на внутреннія частицы порожней кадочки; если принять, что при одинаковыхъ скоростяхъ сопротивленіе дѣйствующее на внутреннія частицы тѣлъ пропорціонально количеству матеріи, т.-е. числу испытывающихъ сопротивленіе частицъ, то сопротивленіе на внутреннія частицы заполненной кадочки будетъ $78B$, слѣдовательно полное сопротивленіе $A+B$ порожней кадочки будетъ относиться къ полному сопротивленію $A+78B$ заполненной, какъ 77 къ 78. Откуда слѣдуетъ:

$$(A+B) : 77B = 77 : 1$$

или

$$A+B : B = 77 . 77 : 1$$

откуда

$$A : B = 5928 : 1.$$

Слѣдовательно, сопротивленіе на внутреннія частицы порожней кадочки въ пять съ лишкомъ тысячъ разъ меньше, нежели сопротивленіе на ея наружную поверхность. Правда, при этомъ разсужденіи мы исходили изъ предположенія, что большее сопротивленіе заполненной кадочки происходитъ не отъ какихъ-либо иныхъ причинъ, какъ отъ дѣйствія нѣкоторой тончайшей жидкости на заключенные въ ней металлы.

Я изложилъ этотъ опытъ на память, такъ какъ бумага, на которой я его записалъ, пропала, поэтому я былъ вынужденъ опустить нѣкоторыя дроби, исчезнувшія изъ памяти.

---

[160]) Въ текстѣ сказано: «ob vim suam insitam septuagesies et octies majorem vi insitae pyxidis vacuae»... т.-е. «такъ такъ содержащаяся (врожденная) сила ея въ 78 разъ больше врожденной силы порожней кадочки»..., но такъ какъ терминомъ vis insita теперь не пользуются, то я придержался смысла, а не буквы текста.

Произвести же вновь всѣ испытанія я не имѣлъ времени. При этихъ опытахъ я воспользовался сперва недостаточно прочнымъ крюкомъ, тогда заполненная кадочка замедлялась значительнѣе; изыскивая причину я замѣтилъ, что крюкъ, поддаваясь вѣсу заполненной кадочки, слѣдовалъ ея качаніями и гнулся взадъ и впередъ; я изготовилъ затѣмъ болѣе прочный крюкъ, чтобы точка подвѣса оставалась неподвижной, послѣ чего все шло какъ описано выше.

ОТДѢЛЪ VII.

О движеніи жидкостей и сопротивленіи брошенныхъ тѣлъ.

Предложеніе XXXII. Теорема XXVI.

Пусть двѣ матеріальныя системы подобны между собою и состоятъ изъ одинаковаго числа подобнымъ образомъ расположенныхъ частицъ, причемъ каждая частица одной системы подобна, и масса ея пропорціональна массѣ частицы ей соотвѣтствующей другой системы, и плотности частицъ находятся въ постоянномъ отношеніи; пусть эти частицы по прошествіи пропорціональныхъ промежутковъ времени начинаютъ двигаться подобнымъ образомъ (принадлежащія одной системѣ другъ по отношенію къ другу и принадлежащія другой также другъ относительно друга); если при этомъ частицы той же системы не касаются другъ друга, за исключеніемъ моментовъ соудареній, взаимно не притягиваются и не отталкиваются ни съ какими силами, за исключеніемъ ускорительныхъ силъ обратно пропорціональныхъ линейнымъ размѣреніямъ соотвѣтствующихъ частицъ и прямо пропорціональныхъ квадратамъ ихъ скоростей, то я утверждаю, что частицы каждой изъ этихъ системъ будутъ продолжать находиться въ концѣ пропорціональныхъ промежутковъ времени въ подобномъ другъ относительно друга движеніи.

Я называю движенія подобныхъ и, по прошествіи пропорціональныхъ промежутковъ времени, подобнымъ образомъ расположенныхъ тѣлъ подобными, когда въ концѣ любыхъ таковыхъ промежутковъ времени относительное расположеніе этихъ тѣлъ подобно, предполагая, что частицы одной системы сопоставляются съ соотвѣтствующими частицами другой. Поэтому промежутки времени, въ продолженіе которыхъ соотвѣтствующія частицы описываютъ подобныя и пропорціональныя части подобныхъ фигуръ пропорціональны. Слѣдовательно, если имѣются двѣ системы такого рода, то соотвѣтствующія частицы вслѣдствіе подобія начальныхъ движеній будутъ продолжать двигаться подобнымъ образомъ, пока не встрѣтятся, ибо, если

на эти частицы никакія силы не дѣйствуютъ, и по Закону I онѣ будутъ двигаться равномѣрно и прямолинейно; если же онѣ дѣйствуютъ другъ на друга съ какими-либо ускорительными силами, обратно пропорціональными линейнымъ размѣреніямъ соотвѣтствующихъ частицъ и прямо пропорціональными квадратамъ скоростей, то, въ виду подобія расположенія частицъ и пропорціональности этихъ силъ, полныя ускорительныя силы дѣйствующія на частицы, слагающіяся, по 2^{ому} слѣдствію законовъ, изъ частныхъ будутъ направлены сходственнымъ образомъ, т.-е. какъ будто бы къ сходственно между частицами расположеннымъ центрамъ; эти полныя силы будутъ относиться между собою какъ и ихъ составляющія, т.-е. будутъ обратно пропорціональны линейнымъ размѣрамъ соотвѣтствующихъ частицъ и прямо пропорціональны квадратамъ ихъ скоростей, поэтому вслѣдствіе дѣйствія такихъ силъ соотвѣтствующія частицы будутъ продолжать описывать подобныя фигуры. Это будетъ происходить такимъ образомъ (по сл. 1 и 8, IV предл. 1-ой книги), когда эти кажущіеся центры будутъ находиться въ покоѣ. Но и тогда, когда эти центры будутъ двигаться, расположеніе ихъ относительно частицъ въ виду подобія перемѣщеній, остается сходственнымъ, значитъ и производимыя измѣненія въ фигурахъ описываемыхъ частицами будутъ подобны.

Слѣдовательно, движенія соотвѣтствующихъ и сходственныхъ частицъ будутъ оставаться подобными до первой ихъ встрѣчи другъ съ другомъ, а такъ какъ эта встрѣча и ударъ будутъ подобны, то будетъ подобно и отраженіе и значитъ (по выше показанному) вновь будетъ подобное относительное движеніе частицъ, пока снова не произойдетъ ударъ, и такъ будетъ продолжаться до безконечности.

Слѣдствіе 1. Такимъ образомъ, если два какихъ-либо подобныхъ между собою тѣла, расположенныхъ сходственнымъ образомъ по отношенію къ соотвѣтствующимъ частицамъ, начнутъ по прошествіи пропорціональныхъ промежутковъ времени двигаться подобнымъ образомъ и если ихъ величины и плотности находятся въ томъ же отношеніи, какъ величины и плотности соотвѣтствующихъ частицъ, то въ концѣ пропорціональныхъ промежутковъ времени эти тѣла будутъ продолжать двигаться подобнымъ образомъ. Ибо все, относящееся до частицъ обѣихъ системъ въ равной мѣрѣ относится и до бо́льшихъ частей ихъ.

Слѣдствіе 2. Если всѣ подобныя и подобнымъ образомъ расположенныя части системъ находятся въ относительномъ покоѣ, и двѣ изъ этихъ частей, которыя больше прочихъ, и въ обѣихъ системахъ соотвѣтствуютъ другъ другу, начнутъ двигаться подобнымъ образомъ по линіямъ сходственнымъ образомъ расположеннымъ, то онѣ произведутъ въ прочихъ частяхъ системы подобныя движенія и въ концѣ пропорціональныхъ промежутковъ времени будутъ продолжать двигаться между ними подобнымъ образомъ, описывая при этомъ пространства пропорціональныя своимъ линейнымъ размѣреніямъ.

Предложеніе XXXIII. Теорема XXVII.

При тѣхъ же предположеніяхъ я утверждаю, что бо́льшія части системъ будутъ испытывать сопротивленія пропорціональныя: квадратамъ ихъ скоростей, квадратамъ линейныхъ размѣреній и плотностямъ частей системъ.

Сопротивленіе происходитъ частію отъ центробѣжныхъ и центростремительныхъ силъ взаимодѣйствія между частицами, частію отъ ударовъ частицъ о бо́льшія части системъ и отраженій отъ нихъ.

Сопротивленія перваго рода относятся между собою, какъ полныя движущія силы, отъ коихъ они происходятъ, т.-е. какъ произведенія полныхъ ускорительныхъ силъ на массы соотвѣтствующихъ частей; по предположенію это одинаково съ прямою пропорціональностью квадратамъ скоростей и массамъ соотвѣтствующихъ частей и обратною пропорціональностью разстояніямъ между соотвѣтствующими частицами; но разстоянія между частицами одной системы относятся къ разстояніямъ между частицами другой какъ діаметры этихъ частицъ или какъ размѣры частей одной системы къ размѣрамъ соотвѣтствующихъ частей другой, массы же пропорціональны плотностямъ этихъ частей и кубамъ ихъ размѣровъ, слѣдовательно, сопротивленія будутъ пропорціональны квадратамъ скоростей, квадратамъ сходственныхъ размѣреній и плотностямъ частей системъ.

Сопротивленія второго рода пропорціональны числу и силѣ соотвѣтствующихъ ударовъ и отраженій. Числа отраженій прямо пропорціональны скоростямъ соотвѣтствующихъ частицъ и обратно пропорціональны разстояніямъ между мѣстами ихъ встрѣчъ. Силы же отраженій пропорціональны скоростямъ, объемамъ и плотностямъ соотвѣтствующихъ частей, т.-е. скоростямъ, кубамъ размѣреній и плотностямъ частей. По перемноженіи всѣхъ этихъ отношеній окажется, что сопротивленія, испытываемыя соотвѣтствующими частями системъ, относятся между собою какъ произведенія квадратовъ скоростей на квадраты линейныхъ размѣреній и на плотности частей.

Слѣдствіе 1. Поэтому, если обѣ эти системы представляютъ двѣ упругихъ жидкости въ родѣ воздуха, и частицы ихъ находятся въ относительномъ покоѣ для каждой системы, два же подобныхъ тѣла, по величинѣ и плотности пропорціональныхъ частицамъ жидкости и расположенныхъ сходственнымъ образомъ между этими частицами ея, будутъ брошены какъ бы то ни было по линіямъ, также сходственно расположеннымъ, то, такъ какъ ускорительныя силы взаимодѣйствій между частицами обратно пропорціональны діаметрамъ брошенныхъ тѣлъ и прямо пропорціональны квадратамъ ихъ скоростей, тѣла эти въ пропорціональные промежутки времени будутъ возбуждать подобныя движенія въ жидкости и будутъ описывать подобныя пространства, относящіеся между собою какъ линейныя размѣренія этихъ тѣлъ.

Слѣдствіе 2. Отсюда слѣдуетъ, что быстро движущееся тѣло испытываетъ въ той же самой жидкости сопротивленіе, приблизительно пропорціональное квадрату скорости. Ибо, если бы силы, съ которыми находящіяся на разстояніи частицы дѣйствуютъ другъ на друга, увеличивались бы какъ квадраты скоростей, то сопротивленіе было бы также въ точности пропорціонально квадрату скорости; такимъ образомъ въ средѣ, частицы которой находящіяся въ нѣкоторомъ разстояніи другъ отъ друга совсѣмъ не оказываютъ взаимодѣйствій, сопротивленіе въ точности пропорціонально квадрату скорости. Пусть имѣется три среды A, B, C, состоящія изъ равныхъ и подобныхъ частицъ правильно расположенныхъ на равныхъ другъ отъ друга разстояніяхъ. Частицы средъ A и B взаимно отталкиваются съ силами, относящимися между собою какъ T къ V, частицы же среды C таковыми силами совершенно не обладаютъ. Если въ этихъ средахъ будутъ двигаться четыре равныхъ тѣла D, E, F, G—первыя два соотвѣтственно въ средахъ A и B послѣднія два въ средѣ C, причемъ отношеніе скорости тѣла D къ скорости тѣла E и отношеніе скорости тѣла F къ скорости тѣла G равно $\sqrt{\frac{T}{V}}$, тогда сопротивленіе тѣла D будетъ относиться къ сопротивленію тѣла E, и сопротивленіе тѣла F къ сопротивленію тѣла G, какъ квадраты ихъ скоростей, поэтому и отношеніе сопротивленія тѣла D къ сопротивленію тѣла F будетъ равно отношенію сопротивленія тѣла E къ сопротивленію тѣла G. Положимъ теперь, что скорости тѣлъ D и F равны, такъ же и скорости тѣлъ E и G; увеличивая скорости тѣлъ D и F въ любомъ отношеніи и уменьшая силы взаимодѣйствія частицъ среды B въ такомъ же отношеніи, но возвышенномъ въ квадратъ, можно приблизить сколь угодно среду B къ виду и условіямъ среды C, значитъ и сопротивленія равныхъ и обладающихъ равными скоростями тѣлъ E и G, въ этихъ средахъ будутъ приближаться къ равенству такъ, что разность между этими сопротивленіями можетъ быть сдѣлана меньше любой заданной величины. Такъ какъ сопротивленія D и F относятся между собою какъ сопротивленія тѣлъ E и G, то и они приблизятся также къ равенству. Такимъ образомъ, когда тѣла D и F движутся весьма быстро, то сопротивленія ихъ весьма близки къ равенству, и такъ какъ сопротивленіе тѣла F пропорціонально квадрату скорости, то и сопротивленіе тѣла D будетъ приблизительно слѣдовать тому же закону.

Слѣдствіе 3. Сопротивленіе тѣла движущагося весьма быстро во всякой упругой жидкости почти такое же, какъ если бы частицы жидкости были лишены отталкивательныхъ силъ; въ упругихъ жидкостяхъ сила упругости происходитъ отъ отталкивательныхъ силъ частицъ и надо, чтобы скорость была настолько велика, чтобы эти силы не имѣли достаточно времени, чтобы проявить свое дѣйствіе.

Слѣдствіе 4. Такъ какъ сопротивленіе тѣлъ подобныхъ и обладающихъ одинаковыми скоростями въ средѣ, частицы которой взаимно не отталкиваются пропорціонально квадратамъ линейныхъ размѣреній, то и сопроти-

вленія тѣлъ движущихся съ равными весьма большими скоростями въ упругой жидкости будутъ приблизительно пропорціональны квадратамъ этихъ размѣреній.

Слѣдствіе 5. Въ срединахъ той же самой плотности, частицы которыхъ взаимно не отталкиваются, но могутъ быть какъ большими и въ небольшомъ числѣ, такъ и малыми и многочисленными, тѣла подобныя, равныя и движущіяся съ одинаковыми скоростями въ равныя времена встрѣчаютъ одинаковое количество матеріи и сообщаютъ ему тоже самое количество движенія и слѣдовательно (по 3-му Закону) испытываютъ и равное противодѣйствіе, т.-е. претерпѣваютъ одинаковое сопротивленіе; поэтому очевидно, что при весьма быстромъ движеніи въ упругихъ жидкостяхъ той же самой плотности сопротивленія приблизительно равны независимо отъ того, состоятъ ли эти жидкости изъ болѣе грубыхъ частицъ или же изъ самыхъ мельчайшихъ. Отъ большей тонкости жидкости сопротивленія снарядовъ движущихся весьма быстро не уменьшилось бы значительно.

Слѣдствіе 6. Все изложенное выше имѣетъ мѣсто въ такихъ упругихъ жидкостяхъ, коихъ сила упругости происходитъ отъ отталкивательныхъ силъ между частицами. Если же эта сила происходитъ отъ чего-либо иного, какъ напр., отъ расположенія частицъ на подобіе шерсти или вѣтвей дерева, или отъ всякой иной причины, по которой относительныя движенія становятся менѣе свободными, то сопротивленіе вслѣдствіе меньшей текучести жидкости станетъ больше, нежели въ предыдущихъ случаяхъ.

Предложеніе XXXIV. Теорема XXVIII.

Если шаръ и цилиндръ, описанные на равныхъ діаметрахъ, движутся съ одинаковой скоростью по направленію оси цилиндра, въ рѣдкой средѣ состоящей изъ равныхъ частицъ свободно расположенныхъ въ равныхъ другъ отъ друга разстояніяхъ, то сопротивленіе шара вдвое меньше сопротивленія цилиндра.

Такъ какъ дѣйствіе среды на тѣло то же самое (по слѣд. 5 законовъ), движется ли тѣло въ покоющейся средѣ, или же частицы среды ударяютъ съ тою же скоростью на покоющееся тѣло, то будемъ разсматривать, что тѣло въ покоѣ и посмотримъ какой напоръ будетъ на него дѣйствовать отъ движущейся среды. Пусть $ABKJ$ (фиг. 168) представляетъ шаръ, описанный изъ центра C радіусомъ CA, и частицы среды ударяютъ его съ постоянною скоростью по прямымъ линіямъ, направленнымъ параллельно прямой AC, пусть FB есть одна изъ этихъ прямыхъ линій. Отложимъ по FB длину LB равную радіусу CB и проведемъ касательную BD къ шару въ точкѣ B; на KC и BD опустимъ перпендикуляры BE и LD, сила, съ которою частица среды, падая наклонно по прямой FB, ударяетъ шаръ въ точкѣ B, относится къ той силѣ, съ которою та же частица ударила бы цилиндръ въ точкѣ b, какъ LD къ LB или какъ BE къ BC.

Затѣмъ на движеніе шара по направленію линіи паденія FB или AC дѣйствительною оказывается отъ полной силы удара направленной по BC лишь слагающая по направленію FB, относящаяся къ этой полной силѣ какъ BE къ BC. Изъ перемноженія этихъ отношеній слѣдуетъ, что дѣйствующая по направленію FB слагающая силы удара частицы на шаръ, относится къ дѣйствующей по этому же направленію слагающей силы удара частицы на цилиндръ, какъ BE^2 относится къ BC^2. Поэтому, если по перпендикуляру bE къ основанію NAO цилиндра отложить длину bH такъ, чтобы было $bH:BE=BE:CB$, то отношеніе bH къ bE будетъ равно отношенію вышеупомянутыхъ дѣйствій силы удара на шаръ и на цилиндръ, слѣдовательно объемъ, занятый всѣми прямыми bH, находится къ объему, занятому прямыми bE въ томъ же отношеніи, какъ дѣйствіе всѣхъ частицъ на шаръ къ дѣйствію ихъ на цилиндръ [161]).

Но первый объемъ есть параболоидъ, коего вершины C, ось CA и параметръ CA, второй же объемъ есть цилиндръ около этого параболоида

---

[161]) Въ этомъ предложеніи, какъ видно, попутно устанавливается законъ пропорціональности сопротивленія испытываемаго элементомъ поверхности квадрату синуса угла встрѣчи.

Ньютонъ разсматриваетъ здѣсь жидкость какъ бы состоящей изъ отдѣльныхъ независимыхъ частицъ движущихся на встрѣчу тѣлу съ одною и тою же скоростью какъ по величинѣ, такъ и по направленію. Обозначимъ эту скорость черезъ V, она представлена на чертежѣ длиною BF. Нормаль къ элементу поверхности шара въ точкѣ B направлена къ радіусу BC, уголъ $FBD=\alpha$, между направленіемъ скорости и ея проекціи на касательную плоскость, называется угломъ встрѣчи.

Подъ словомъ «сила удара», «сила дѣйствія частицы по направленію BE» и т. п. надо разумѣть количество движеніе сообщаемое частицею ударяемому тѣлу и его проекцію на указанное направленіе; эти количества движенія пропорціональны полному количеству движенія частицы и его проекціи на соотвѣтствующее направленіе.

Такимъ образомъ проекція количества движенія частицы, масса которой m, на направленіе нормали BC будетъ $mV\sin\alpha$, и количество движенія, сообщенное тѣлу ударомъ, будетъ направлено по BC и пропорціонально $mV\sin\alpha$ такъ, что его можно обозначить черезъ $kmV\sin\alpha$, гдѣ k нѣкоторая постоянная, проекція этого количества движенія на направленіе CA будетъ $kmV.\sin^2\alpha$, но $\sin^2\alpha=BE^2:CB^2$. Этой же проекціи количества движенія пропорціональна и составляющая силы сопротивленія испытываемаго тѣломъ по направленію AC, происходящая отъ разсматриваемаго элемента поверхности подвергнувшагося удару.

Вычисленіе отношенія сопротивленія шара къ сопротивленію описаннаго около него цилиндра, коего производящія параллельны направленію движенія, заключаетъ еще неявно предположеніе, что число ударяющихъ частицъ пропорціонально величинѣ элемента поверхности или его проекціи на плоскость перпендикулярную къ направленію движенія, ибо лишь при этомъ предположеніи сопротивленія шара и цилиндра представляются указанными объемами параболоида и цилиндра съ такимъ же основаніемъ и высотою; это предположеніе и оговорено въ условіи теоремы,—что частицы распредѣлены равномѣрно.

описанный, извѣстно, что объемъ параболоида равенъ половинѣ объема описаннаго цилиндра. Слѣдовательно, полная сила дѣйствія среды на шаръ равна половинѣ таковой же силы на цилиндръ, поэтому, если бы частицы среды находились въ покоѣ, цилиндръ же и шаръ двигались съ одинаковою скоростью, сопротивленіе шара было бы вдвое меньше сопротивленія цилиндра.

Поученіе.

По этому способу можно сравнивать сопротивленія и другихъ фигуръ между собою, а также находить тѣ, которыя наиболѣе приспособлены къ продолженію своего движенія въ сопротивляющейся средѣ. Такъ, если на круговомъ основаніи $CEBH$ (фиг. 169), описанномъ изъ центра O радіусомъ OC требуется построить такой усѣченный конусъ $CBFG$ съ высотою OD, коего сопротивленіе было бы меньше сопротивленія всякаго другого усѣченнаго конуса, построеннаго на томъ же основаніи и высотѣ и движущагося по оси OD въ сторону D, то, раздѣливъ высоту OD въ точкѣ Q пополамъ, продолжи OQ до S такъ, чтобы было

$$QS = QC$$

S и будетъ вершиною искомаго конуса, который усѣкается [162]).

Здѣсь же замѣтимъ мимоходомъ, что уголъ CSB (фиг. 170) всегда острый, поэтому, если тѣло $ADBE$ образуется обращеніемъ элипса или овала

---

[162]) Обозначимъ OD черезъ $2a$, OC черезъ r, OS черезъ x и черезъ k постоянный множитель. Сопротивленіе испытываемое усѣченнымъ конусомъ при движеніи по направленію своей оси слагается изъ сопротивленія на малое основаніе, пропорціональное площади этого основанія, и проекціи на ось сопротивленія дѣйствующаго на боковую поверхность; на каждый элементъ этой поверхности дѣйствуетъ нормальное сопротивленіе пропорціональное величинѣ этого элемента и квадрату синуса угла встрѣчи равнаго CSO, такимъ образомъ сумма проекцій всѣхъ этихъ элементарныхъ сопротивленій на ось получится если умножить на $\sin^2 CSO$ сопротивленіе, которое дѣйствовало бы на кольцевую площадь равную разности площадей большого и малаго основаній конуса.

Такимъ образомъ полное сопротивленіе R будетъ:

$$R = k\left[\frac{r^2(x-2a)^2}{x^2} + \left(r^2 - \frac{r^2(x-2a)^2}{x^2}\cdot\frac{r^2}{r^2+x^2}\right)\right] = kr^2\cdot\frac{(x-2a)^2+r^2}{r^2+x^2}.$$

Величина x обращающая сопротивленіе R въ minimum опредѣляется уравненіемъ:

$$x^2 - 2ax - r^2 = 0,$$

положительный корень котораго

$$x = a + \sqrt{a^2 + r^2}$$

отвѣчающій вопросу и строится описаннымъ въ текстѣ способомъ.

ADBE около оси *AB*, и къ производящей кривой проводятся касательныя *FG*, *GH*, *HI* въ точкахъ *F*, *B* и *I* такъ, что *GH* препендикулярно къ оси *AB* въ точкѣ касанія *B*, другія же двѣ касательныя *FG* и *HI* составляютъ съ *GH* углы *FGB* и *IHB* равные 135°, то тѣло, образуемое обращеніемъ фигуры *ADFGHIE* около той же оси *AB* будетъ испытывать меньшее сопротивленіе, нежели первоначальное при движеніи вдоль своей оси точкою *B* впередъ. Я считаю, что это предложеніе можетъ быть не безполезно при построеніи судовъ [163]).

Когда же фигура *DNFG* будетъ кривою такого рода, что если изъ любой ея точки *N* опустить на ось перпендикуляръ *NM* и изъ заданной точки *G* провести прямую *GR* параллельную касательной къ кривой въ точкѣ *N* и пересѣкающую ось въ точкѣ *R*, то имѣетъ мѣсто пропорція:

$$MN : GR = GR^3 : 4BR \, . \, GB^2$$

тогда тѣло, образующееся при обращеніи этой кривой около оси *AB* при движеніи въ вышеупомянутой рѣдкой средѣ въ направленіи отъ *A* къ *B* будетъ испытывать меньшее сопротивленіе, нежели всякое иное тѣло вращенія, описанное на той же длинѣ и той же наибольшей ширинѣ [164]).

---

[163]) Доказательство этого свойства требуетъ уже соображеній составляющихъ какъ бы переходную ступень къ тѣмъ, которыя теперь относятся къ варіаціонному исчисленію. Прежде всего замѣтимъ (черт. 170а), что когда высота a отсѣка конуса приближается къ нулю, то x приближается къ r и уголъ составляемый производящей съ осью конуса приближается къ 45°. Такимъ образомъ, если взять безконечно-тонкій усѣченный конусъ, то проведя производящую *MS* подъ угломъ 45° къ оси, получимъ отсѣкъ *MNPQ* испытывающій меньшее сопротивленіе нежели *PMRQ*, при бо̀льшемъ объемѣ, отсюда слѣдуетъ также, что сопротивленіе встрѣчаемое коническою поверхностью *MR* больше суммы сопротивленій на коническую поверхность *MN* и на кольцевую площадь *NR*. Слѣдовательно, если имѣется какая-либо поверхность вращенія, касательная къ меридіану которой въ какой-либо точкѣ составляетъ съ осью уголъ больше 45°, то взявъ поверхность образованную вращеніемъ ломанной *DMNRH*, элементъ *MN* которой составляетъ 45° съ осью, получимъ тѣло, объемъ котораго больше нежели у первоначальнаго, сопротивленіе же меньше; значитъ, наименьшимъ сопротивленіемъ будетъ обладать въ этомъ случаѣ такое тѣло, для котораго ни въ одной точкѣ вышеуказанной замѣны сдѣлать нельзя, иначе у котораго касательная къ меридіану составляетъ вездѣ уголъ въ 45°, и слѣдовательно дуга меридіана *MH* замѣнена наклоненною къ оси подъ угломъ 45° прямою и конечною ея ординатою.

[164]) Это утвержденіе Ньютона всецѣло относится къ варіаціонному исчисленію, и приведенный имъ отвѣтъ на вопросъ о тѣлѣ вращенія представляющаго наименьшее сопротивленіе указываетъ, что имъ была рѣшена первая задача въ этой области, хотя онъ и не привелъ метода, которымъ это рѣшеніе получено.

Къ переводу Motte'а «Началъ» на англійскій языкъ сдѣлано небольшое прибавленіе, въ которомъ, по словамъ переводчика, его другъ даетъ рѣшеніе задачи о тѣлѣ наименьшаго сопротивленія. Переводъ этотъ изданъ въ 1727—1729 годахъ, поэтому, приведенное рѣшеніе можетъ дать указанія

Предложеніе XXXV. Задача VII.

Предполагая, что рѣдкая среда состоитъ изъ равныхъ, весьма малыхъ, покоющихся частицъ, свободно расположенныхъ въ равныхъ другъ отъ друга разстояніяхъ, требуется опредѣлить сопротивленіе, испытываемое равномѣрно движущимся въ такой средѣ шаромъ.

Случай 1. Вообразимъ, что цилиндръ, діаметръ и высота коего равны діаметру шара, движется съ такою же скоростью, какъ и шаръ по направленію своей оси въ той же средѣ. Положимъ, что частицы среды, на которыя наталкивается цилиндръ или шаръ, отражаются съ наибольшею силою. По предыдущему предложенію сопротивленіе шара вдвое меньше сопротивленія цилиндра, объемъ шара составляетъ $\frac{2}{3}$ объема цилиндра, и цилиндръ ударяя частицы нормально и отражая ихъ съ наибольшею силою, сообщаетъ имъ скорость вдвое бóльшую своей собственной, по-

---

на то, какимъ образомъ рѣшались подобные вопросы англійскими математиками современниками Ньютона.

Пусть BC есть ось вращенія (фиг. 170b), B заданная на ней точка и BG также заданная крайняя ордината искомой кривой GD, которая своимъ обращеніемъ около оси BC должна образовать поверхность, испытывающую при движеніи вдоль оси CB наименьшее сопротивленіе.

На оси BC берется произвольная точка M, и пусть MN есть ордината искомой кривой; возьмемъ безконечно близко къ B точку b и безконечно близко къ M точку m, такъ чтобы сумма $\frac{1}{2}Mm + \frac{1}{2}Bb$ оставалась постоянной, какую бы точку M на оси ни брать; обозначимъ эту сумму черезъ ε, положимъ также $\frac{1}{2}Mm - \frac{1}{2}Bb = \xi$, итакъ:

$$\frac{1}{2}Mm + \frac{1}{2}Bb = \varepsilon; \quad \frac{1}{2}Mm - \frac{1}{2}Bb = \xi,$$

проведя ординаты mn и bg и прямыя $N\nu$ и $G\gamma$ параллельныя оси получимъ отрѣзочки νn и γg, и будемъ выбирать длину ξ, такъ чтобы было

$$\nu n = \gamma g = \alpha,$$

гдѣ α также постоянная, т.-е. не зависитъ отъ положенія точки M

Докажемъ сперва, что сумма сопротивленій испытываемыхъ элементами поверхности происходящими отъ обращенія отрѣзочковъ Gg и Nn будетъ наименьшая при условіи:

$$Gg^4 : Nn^4 = BG \,.\, Bb : MN \,.\, Mm.$$

Сопротивленіе испытываемое разсматриваемыми элементами поверхности по направленію BC пропорціонально соотвѣтственно кольцевымъ площадямъ описаннымъ отрѣзочками νn и γg и обратно пропорціонально Nn^2 и Gg^2, а такъ какъ эти кольцевыя площади пропорціональны ордина-

этому въ продолженіе того времени, какъ онъ равномѣрно проходитъ путь, равный половинѣ длины своей оси, онъ сообщитъ частицамъ количество движенія, такъ относящееся къ количеству движенія его самого, какъ плотность жидкости относится къ плотности этого цилиндра. Шаръ сообщитъ частицамъ такое же количество движенія въ продолженіе того времени, въ которое онъ равномѣрно проходитъ путь, равный своему діаметру; въ то же время, какъ онъ проходитъ $\frac{2}{3}$ своего діаметра, сообщитъ частицамъ количество движенія, относящееся къ полному количеству движенія его самого какъ плотность среды къ плотности шара. Поэтому шаръ испытываетъ сопротивленіе такъ относящееся къ силѣ, которая могла бы поглотить или образовать полное его количество движенія, въ продолженіе того времени, какъ шаръ проходитъ равномѣрно путь, равный двумъ третямъ своего діаметра, какъ плотность среды относится къ плотности шара.

тамъ MN и BG, ибо по условію νn и γg постоянны, то сумма сопротивленій пропорціональна количеству

$$\frac{BG}{Gg^2}+\frac{MN}{Nn^2};$$

это количество и должно быть наименьшимъ, причемъ BG и MN надо считать постоянными, а измѣняются лишь Gg и Nn.

Но

$$Gg^2 = Bb^2 + \gamma g^2 = (\varepsilon - \xi)^2 + \alpha^2; \quad Nn^2 = mM^2 + \nu n^2 = (\varepsilon + \xi)^2 + \alpha^2,$$

слѣдовательно, наименьшею должна быть величина

$$\frac{BG}{(\varepsilon-\xi)^2+\alpha^2}+\frac{MN}{(\varepsilon+\xi)^2+\alpha^2},$$

уравнивая нулю ея производную по ξ имѣемъ

$$\frac{BG.(\varepsilon-\xi)}{[(\varepsilon-\xi)^2+\alpha^2]^2}=\frac{MN.(\varepsilon+\xi)}{[(\varepsilon+\xi)^2+\alpha^2]^2}$$

т.-е.

$$Gg^4 : Nn^4 = BG \,.\, Bb : MN \,.\, Mm.$$

Но для крайней точки B, на основаніи предыдущей теоремы уголъ gGB долженъ равняться 135°, такъ что $Gg=\sqrt{2}\,\gamma g$, слѣдовательно $Gg^4=4\gamma g^4$ и предыдущая пропорція будетъ:

$$4\gamma g^4 : Nn^4 = BG \,.\, Bb : MN \,.\, Mm \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Проведя GR параллельно nN (т.-е. въ предѣлѣ параллельно касательной въ точкѣ N), будемъ имѣть подобные треугольники $n\nu N$ и BGR, изъ которыхъ слѣдуетъ:

$$\nu n : \nu N = BG : BR$$

но

$$\nu n = g\gamma = Bb \quad \text{и} \quad \nu N = Mm,$$

Случай 2. Положимъ, что частицы среды, встрѣчаемыя шаромъ или цилиндромъ не отражаются, тогда цилиндръ при нормальномъ ударѣ будетъ сообщать этимъ частицамъ скорость лишь равную своей собственной, и будетъ испытывать сопротивленіе, равное половинѣ предыдушаго, сопротивленіе шара составитъ также половину предыдущаво.

слѣдовательно,

$$Bb = \frac{BG \, . \, Mm}{BR}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\nu n : Nn = BG : GR$$

значитъ:

$$\nu n = \gamma g = \frac{Nn \, . \, BG}{GR}$$

и изъ пропорціи (1) слѣдуетъ:

$$\frac{4BG^4}{GR^4} = \frac{BG^2 \, . \, Mm}{BR \, . \, MN \, . \, Mm}$$

или иначе:

$$4BG^2 \, . \, BR : GR^3 = GR : MN$$

это и есть данное въ текстѣ условіе.

Примемъ ось вращенія за ось x, и положимъ

$$MN = y, \quad BG = a,$$

тогда

$$\operatorname{tg} GRB = y'; \quad BR = \frac{a}{y'}$$

и

$$GR = \frac{a \, . \sqrt{1 + y'^2}}{y'}$$

и предыдущее условіе равносильно при теперешнихъ обозначеніяхъ дифференціальному уравненію

$$\frac{yy'^3}{(1 + y'^2)^2} = \frac{1}{4} a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Обозначая черезъ k коэффиціентъ сопротивленія, получимъ, что полное ссопротивленіе на поверхность выражается интеграломъ:

$$k \int_{x_0}^{X} \frac{yy'^3}{1 + y'^2} \, dx.$$

Разысканіе minimum'а этого интеграла, по правиламъ варіаціоннаго исчисленія приводитъ къ уравненію:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Случай 3. Предположимъ теперь, что частицы среды обладаютъ нѣкоторою силою отраженія, которая меньше наибольшей и не равна нулю, но средняя между этою наибольшею и нулевой, тогда и сопротивленіе шара будетъ среднимъ и находящимся въ такомъ же отношеніи къ сопротивленію въ первомъ и во второмъ случаѣ.

гдѣ

$$F = \frac{yy'^3}{1+y'^2}.$$

Но такъ какъ функція F перемѣнной x явно не содержитъ то ея полная производная по x будетъ:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot y'',$$

это уравненіе на основаніи предыдущаго напишется такъ:

$$\frac{dF}{dx} - \left(y' \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

здѣсь первая часть есть полная производная по x и, значитъ, по интегрированіи будетъ:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = yy'^2 \cdot \frac{3+y'^2}{(1+y'^2)^2},$$

полагая

$$C = -\frac{1}{2} a$$

и получаемъ Ньютоново рѣшеніе

$$\frac{yy'^3}{(1+y'^2)^2} = \frac{1}{4} a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Ньютонъ не счелъ нужнымъ представить свое рѣшеніе въ аналитической формѣ, т.-е. положивъ $y' = p$ выразить въ функціи p не только ординату y

$$y = \frac{1}{4} a \cdot \frac{(1+p^2)^2}{p^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

но и абсциссу x. Замѣтивъ, что $dx = \frac{dy}{p}$ имѣемъ:

$$x = \int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{ydp}{p^2} = \frac{1}{4} a \cdot \frac{(1+p^2)^2}{p^4} + \frac{1}{4} a \int \frac{(1+p^2)^2 \cdot dp}{p^5} =$$

$$= \frac{1}{4} a \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^2} + \log p\right] + C_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

гдѣ C_1 постоянная произвольная, опредѣляемая въ разсматриваемомъ случаѣ изъ условія, что при $p = 1$, x должно равняться x_0.

Слѣдствіе 1. Такимъ образомъ, если шаръ и частицы безконечно тверды и лишены всякой упругости, а значитъ, и всякой силы отраженія, то сопротивленіе шара относится къ силѣ, которая можетъ поглотить или образовать полное его количество движенія въ продолженіе того времени, въ которое шаръ проходитъ путь равный четыремъ третямъ своего діаметра, какъ плотность среды относится къ плотности шара.

Слѣдствіе 2. Сопротивленіе шара при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ пропорціонально квадрату скорости.

Слѣдствіе 3. Сопротивленіе шара при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ пропорціонально квадрату діаметра.

Слѣдствіе 4. Сопротивленіе шара при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ пропорціонально плотности среды.

Слѣдствіе 5. Сопротивленіе шара пропорціонально квадрату скорости, квадрату діаметра и плотности среды.

Слѣдствіе 6. Движеніе шара при такомъ сопротивленіи можетъ быть представлено такъ: пусть AB (фиг. 171) представляетъ то время, въ продолженіе котораго шаръ можетъ утратить все свое количество движенія, если принять сопротивленіе постояннымъ и равнымъ начальному; къ AB проводимъ перпендикуляры AD и BC и по BC откладываемъ длину BC, изображающую полное начальное количество движенія шара; черезъ точку C проводится гипербола CF, имѣющая своими ассимптотами прямыя AD и AB. Продолжимъ AB до какой-либо точки E и возставимъ перпендикуляръ EF, пересѣкающій гиперболу въ точкѣ F. Дополнивъ параллелограммъ $BCGE$, проводимъ прямую AF, пересѣкающую BC въ H. Если шаръ въ теченіе какого-либо времени BE, продолжая двигаться равномѣрно въ средѣ не сопротивляющейся, описалъ бы пространство, представляемое площадью $CBEG$ параллелограмма, то въ сопротивляющейся средѣ онъ опишетъ пространство представляемое гиперболическою площадью $CBEF$, и количество его движенія въ концѣ сказаннаго времени представится ординатою гиперболы EF, за утратою части FG. Сопротивленіе шара въ концѣ того же времени представится длиною BH, за утратою части HC начальнаго сопротивленія. Все это слѣдуетъ изъ предл. V, 2-ой книги, сл. 1 и 3.

Слѣдствіе 7. Такимъ образомъ, если шаръ въ теченіе времени T, предполагая, что сопротивленіе R остается постояннымъ, утрачиваетъ полное свое количество движенія M, то этотъ шаръ въ продолженіе времени t утратитъ вслѣдствіе сопротивленія среды, уменьшающагося вмѣстѣ со скоростью пропорціонально квадрату ея, количество движенія равное $\frac{Mt}{T+t}$ и остающаяся его часть составитъ $\frac{M.T}{T+t}$; при этомъ шаръ пройдетъ путь, длина коего относится къ пути, описываемому во время t равномѣрно съ такою скоростью, при которой количество движенія равно M, какъ $2{,}302585092994 . \log\frac{T+t}{T} : \frac{T}{t}$ ибо отношеніе площади $BCFF$ гиперболы къ площади $BCGE$ равно такой величинѣ.

Поученіе.

Въ этомъ предложеніи изложено о сопротивленіи и замедленіи шаровъ, движущихся въ срединахъ не сплошныхъ и получено, что это сопротивленіе относится къ силѣ, которая могла бы поглотить или образовать полное количество движенія шара въ такое время, въ которое шаръ, продолжая двигаться равномѣрно со скоростью равной начальной, прошелъ бы путь равный $\frac{2}{3}$ своего діаметра, какъ плотность среды относится къ плотности шара, это будетъ въ томъ случаѣ, когда шаръ и частицы среды весьма упруги и обладаютъ наибольшею силою отраженія. Сказанное сопротивленіе будетъ вдвое меньше, когда шаръ и частицы среды безконечно тверды и совершенно лишены силы отраженія. Въ срединахъ сплошныхъ, такихъ какъ вода, горячее масло, ртуть, въ которыхъ шаръ не ударяется непосредственно о всѣ частицы жидкости, производящія сопротивленіе, а надавливаетъ сперва на ближайшія частицы, которыя надавливаютъ на слѣдующія и слѣдующія, сопротивленіе еще въ два раза меньше. Такимъ образомъ, въ такого рода весьма текучихъ срединахъ шаръ испытываетъ сопротивленіе, относящееся къ силѣ, которая можетъ образовать или поглотить полное его количество движенія въ продолженіе времени, въ которое шаръ, продолжая двигаться равномѣрно, прошелъ бы путь равный $\frac{8}{3}$ своего діаметра, какъ плотность средины къ плотности шара. Въ послѣдующемъ мы постараемся это показать.

Предложеніе XXXVI. Задача VIII.

Опредѣлить движеніе воды, вытекающей черезъ круглое отверстіе, сдѣланное въ днѣ сосуда.

Пусть $ACBD$ (фиг. 172) есть цилиндрическій сосудъ, AB его открытый верхъ, CD дно параллельное горизонту, EF круглое отверстіе по серединѣ дна, G центръ отверстія, GH ось цилиндра перпендикулярная горизонту. Вообрази, что ледяной цилиндръ $APQB$ имѣетъ тотъ же діаметръ какъ и полость сосуда и ту же ось, и что онъ опускается равномѣрно, и что тѣ его части, которыя достигаютъ поверхности воды AB таютъ и, обратившись въ воду подъ дѣйствіемъ своей тяжести, стекаютъ въ сосудъ и, продолжая двигаться внизъ, образуютъ водопадъ или столбъ воды $ABNFEM$, который, выходя черезъ отверстіе EF, заполняетъ его цѣликомъ.

Пусть равномѣрная скорость опусканія льда и соприкасающейся къ нему по кругу AB воды равна той, которую вода могла бы получить, падая съ высоты JH, причемъ JH составляетъ продолженіе GH; проведемъ черезъ точку J прямую KL, параллельную горизонту и пересѣкающую боковую поверхность льда въ K и L. Скорость воды, вытекающей черезъ отверстіе EF, будетъ равна той, которую вода могла бы получить при паденіи съ вы-

соты *JG*, поэтому, по теоремѣ *Галилея*, отношеніе *JG* къ *JH* будетъ равно отношенію квадратовъ скоростей воды въ отверстіи *EF* и въ плоскости круга *AB*, т.-е. равно квадрату отношенія площади круга *AB* къ площади круга *EF*, ибо эти площади обратно пропорціональны скоростямъ воды черезъ нихъ протекающей въ одинаковое время и въ одинаковомъ количествѣ. Здѣсь идетъ рѣчь о скорости воды перпендикулярной къ горизонту. Движеніе же воды параллельное горизонту, съ которымъ частицы воды сближаются другъ къ другу, здѣсь не разсматривается, ибо оно происходитъ не отъ силы тяжести и не измѣняетъ движенія перпендикулярнаго горизонту.

Предположимъ же, что частицы воды чуть-чуть сцѣпляются и вслѣдствіе этого взаимнаго сцѣпленія при движеніи внизъ сближаются, двигаясь параллельно горизонту, такъ что образуется одна струя, а не много отдѣльныхъ, но это параллельное горизонту движеніе, происходящее отъ такого сцѣпленія, здѣсь не разсматривается.

Случай 1. Вообрази теперь, что вся полость сосуда въ смежности съ текущей внизъ водою *ABNFEM* заполнена льдомъ, и что вода течетъ черезъ ледъ, какъ черезъ трубу. Если бы вода совсѣмъ не касалась льда или, что то же самое, и касалась бы, но вслѣдствіе чрезвычайной гладкости льда скользила бы по нему совершенно свободно, не встрѣчая никакого сопротивленія, то она вытекала бы черезъ отверстіе *EF* съ тою же скоростью, какъ и раньше, и полный вѣсъ столба воды *ABNFEM* затрачивался бы на производство ея истеченія, какъ и раньше, дно же сосуда поддерживало бы вѣсъ льда окружающаго столбъ воды.

Если бы ледъ въ сосудѣ растаялъ, истеченіе воды по отношенію къ скорости его осталось бы такимъ же, какъ и прежде. Оно не будетъ меньше, ибо превращеніе льда въ воду лишь способствуетъ ея теченію внизъ, оно не будетъ больше, ибо ледъ, превратившись въ воду, не иначе можетъ течь внизъ, какъ отнимая отъ движенія внизъ прочей воды равное количество движенія. Та же самая сила должна сообщить ту же самую скорость тому же самому количеству воды.

Но отверстіе въ днѣ сосуда вслѣдствіе наклоннаго движенія вытекающей воды должно быть нѣсколько больше, нежели прежде, ибо теперь не всѣ частицы воды проходятъ черезъ отверстіе перпендикулярно къ его плоскости, но, притекая по всѣмъ направленіямъ отъ стѣнокъ сосуда и сходясь къ отверстію, проходятъ сквозь него косвеннымъ движеніемъ и стремясь внизъ сливаются въ струю вытекающей воды; эта струя въ небольшомъ разстояніи подъ отверстіемъ имѣетъ діаметръ меньше діаметра отверстія приблизительно въ отношеніи 5 къ 6 или $5\frac{1}{2}$ къ $6\frac{1}{2}$, если только я достаточно точно обмѣрилъ эти діаметры. Для этого я изготовилъ очень тонкую пластинку съ отверстіемъ по срединѣ, діаметромъ въ $\frac{5}{8}$ дюйма, и чтобы струя вытекающей воды не ускорялась и не становилась отъ увеличенной скорости тока тоньше, я укрѣплялъ эту пластинку не къ дну,

а къ боковой стѣнкѣ сосуда, такъ что струя вытекала по направленію параллельному горизонту. Затѣмъ, когда сосудъ былъ заполненъ водой, я, открывъ отверстіе, чтобы дать водѣ вытекать, измѣрялъ точнѣйшимъ образомъ діаметръ струи въ разстояніи около $\frac{1}{2}$ дюйма отъ отверстія, и получилъ $\frac{21}{40}$ дюйма; такимъ образомъ, отношеніе діаметра сказаннаго круглаго отверстія къ діаметру струи было около 25 къ 21. Вода, чтобы пройти черезъ отверстіе, притекаетъ, сходясь отовсюду, и послѣ выхода изъ отверстія отъ этого схожденія струя ея становится тоньше и вслѣдствіе утоненія ускоряется, пока не достигнетъ разстоянія около $\frac{1}{2}$ дюйма отъ отверстія; въ этомъ разстояніи струя тоньше и быстрѣе, нежели въ самомъ отверстіи въ отношеніи 25 . 25 къ 21 . 21, т.-е. приблизительно 17 къ 12 или $\sqrt{2}$ къ 1. Изъ опытовъ также оказывается, что количество воды, вытекающей въ продолженіе заданнаго времени черезъ круглое отверстіе въ днѣ сосуда, такое, которое соотвѣтствуетъ протоку съ упомянутой выше скоростью не черезъ самое отверстіе, а черезъ такой кругъ, коего діаметръ относится къ діаметру отверстія какъ 21 къ 25. Поэтому, вода при проходѣ черезъ самое отверстіе имѣетъ направленную внизъ скорость равную той, которую, получило бы тяжелое тѣло при свободномъ паденіи съ высоты равной приблизительно половинѣ высоты воды въ сосудѣ. Послѣ же выхода изъ сосуда скорость воды увеличивается отъ сжатія струи, пока въ разстояніи приблизительно равномъ діаметру отверстія она не станетъ больше, нежели въ самомъ отверстіи въ отношеніи $\sqrt{2}$ къ 1 и станетъ тогда равной скорости, пріобрѣтаемой тѣломъ свободно падающимъ съ высоты равной высотѣ воды въ сосудѣ.

Въ послѣдующемъ діаметръ струи будетъ приниматься равнымъ діаметру отверстія EF; при этомъ будемъ воображать, что проведена плоскость VW параллельная EF въ разстояніи, равномъ діаметру отверстія и въ ней прорѣзано бо̀льшее отверстіе ST такъ, чтобы струя, проходя черезъ него, заполняла бы нижнее отверстіе EF, т.-е. отверстіе ST такое, что его діаметръ относится къ діаметру EF какъ 25 къ 21. Такимъ образомъ, вода будетъ протекать перпендикулярно плоскости нижняго отверстія, и количество вытекающей черезъ него воды будетъ тогда приблизительно согласоваться съ тѣмъ, которое предполагается при рѣшеніи задачи. Пространство же между этими двумя плоскостями и струею можетъ быть принято за дно сосуда.

Но чтобы рѣшеніе задачи было проще и бо̀лѣе математично, предпочтительнѣе принимать за дно сосуда лишь плоскость нижняго его основанія и воображать, что вода, которая протекала черезъ ледъ или черезъ трубу и вытекала изъ сосуда черезъ отверстіе EF въ нижнемъ основаніи, сохраняетъ свое движеніе, ледъ же сохраняетъ свой покой. Въ послѣдующемъ пусть ST представляетъ діаметръ описаннаго изъ центра Z круглаго отверстія, черезъ которое струя вытекаетъ изъ сосуда, когда вся вода

въ сосудѣ жидкая, и EF діаметръ отверстія, черезъ которое струя проходитъ цѣликомъ, заполняя его, идетъ ли вода черезъ сказанное верхнее отверстіе ST изъ сосуда или же течетъ внутри льда какъ бы черезъ трубу. Діаметръ верхняго отверстія ST пусть относится къ діаметру нижняго, какъ 25 къ 21 и перпендикулярное разстояніе между плоскостямя отверстій равно діаметру нижняго EF. Направленная внизъ скорость воды, вытекающей изъ сосуда черезъ отверстіе ST, будетъ при проходѣ черезъ плоскость его равна скорости падающаго тѣла, соотвѣтствующей половинѣ высоты JZ; скорость же продолжающей свое паденіе струи при проходѣ черезъ отверстіе EF равна скорости, соотвѣтствующей всей высотѣ JG.

Случай 2. Если отверстіе EF сдѣлано не по серединѣ дна сосуда, а гдѣ либо въ иномъ мѣстѣ—вода вытекаетъ съ тою же скоростью, какъ и въ первомъ случаѣ, если величина отверстія такая же. Ибо тяжелое тѣло хотя и опускается по наклонной линіи на ту же глубину въ большее время, нежели по отвѣсной, но въ обоихъ случаяхъ пріобрѣтаетъ одинаковую скорость, какъ это доказалъ Галилей.

Случай 3. Такова же скорость и воды, вытекающей черезъ отверстіе въ боковой стѣнкѣ сосуда. Ибо если отверстіе настолько мало, что разность уровней AB и KL нечувствительна, и струя вытекающей горизонтально воды принимаетъ параболическую форму, то по параметру этой параболы можно вывести, что скорость вытекающей воды равна скорости, которую пріобрѣтаетъ тѣло свободно падающее съ высоты HD или JG уровня воды въ сосудѣ. Продѣлавъ такое испытаніе, я нашелъ, что когда высота воды въ сосудѣ надъ отверстіемъ была 20 дюймовъ и высота отверстія надъ горизонтальною плоскостью тоже была около 20 дюймовъ, то струя вытекающей воды ударяла эту плоскость въ разстояніи приблизительно 37 дюймовъ отъ перпендикуляра, опущеннаго изъ отверстія на эту плоскость. При отсутствіи сопротивленія воздуха если бы струя была параболою съ параметромъ 80 дюймовъ, она должна бы падать на эту плоскость въ разстояніи 40 дюймовъ.

Случай 4. Наконецъ, если вытекающая вода направляется вверхъ, то скорость ея истеченія та же самая, ибо небольшая струя вытекающей воды поднимается въ отвѣсномъ движеніи до уровня GH или GJ воды, стоящей въ сосудѣ, лишь чуть-чуть теряя въ высотѣ подъема отъ сопротивленія воздуха, поэтому скорость ея истеченія такова же, какую она могла бы пріобрѣсти падая, съ этой высоты. Частица стоячей воды повсюду испытываетъ одинаковое давленіе (по пред. XIX, 2-ой кн.) и уступая давленію несется по любому направленію съ одинаковымъ стремленіемъ, идетъ ли она внизъ черезъ отверстіе въ днѣ сосуда, или же вытекаетъ горизонтально черезъ отверстіе въ его стѣнкѣ, или же поступаетъ въ трубу и затѣмъ направляется вверхъ черезъ малое отверстіе, сдѣланное въ верхней стѣнкѣ трубы. Что скорость, съ которою вытекаетъ вода, именно такова, какъ указано въ этомъ предложеніи, слѣдуетъ не только изъ разсужденія, но подтверждается также извѣстными опытами, описаннымв выше.

Случай 5. Скорость вытекающей воды та же самая, какова бы ни была форма отверстія: круглая ли, квадратная ли, треугольная или какая-либо иная равномѣрная съ круговой, ибо эта скорость не зависитъ отъ формы отверстія, а опредѣляется величиною его погруженія подъ плоскостью KL.

Случай 6. Если нижняя часть сосуда $ABDC$ погружена въ стоячую воду и высота уровня этой воды надъ дномъ сосуда есть GR (фиг. 173), то скорость, съ которою вода вытекаетъ изъ сосуда черезъ отверстіе EF въ стоячую воду, будетъ таковою, которую вода пріобрѣла бы, падая съ высоты JR, ибо вѣсъ всей воды, расположенной ниже уровня стоячей воды, удерживается въ равновѣсіи вѣсомъ этой послѣдней, и слѣдовательно нисколько не ускоряетъ движенія воды, опускающейся въ сосудѣ. Этотъ случай также слѣдуетъ изъ опытовъ, если измѣрять время вытеканія воды.

Слѣдствіе 1. Поэтому, если продолжить высоту AC уровня воды до точки K такъ, чтобы отношеніе AK къ CK было равно квадрату отношенія площади отверстія, сдѣланнаго гдѣ либо въ днѣ, къ площади круга AB, то скорость вытекающей воды будетъ равна скорости, которую вода пріобрѣла бы падая съ высоты KC.

Слѣдствіе 2. Сила, которая могла бы произвести полное количество движенія вытекающей воды равна вѣсу цилиндрическаго столба воды, основаніе котораго есть отверстіе EF и высота $2GJ$ или $2CK$, ибо вытекающая вода въ продолженіе того времени пока ея количество сравняется съ объемомъ этого столба, пріобрѣла бы, падая подъ дѣйствіемъ своего вѣса съ высоты GJ, ту скорость, съ которою она вытекаетъ.

Слѣдствіе 3. Полный вѣсъ всей воды въ сосудѣ $ABDC$ относится къ той части вѣса, которая затрачивается на вытеканіе воды, какъ сумма площадей круговъ AB и EF къ удвоенной площади EF. Пусть JO есть среднее пропорціональное между JH и JG; количество воды, протекающей черезъ отверстіе EF въ продолженіе такого времени, что падающая изъ J капля могла бы описать высоту JG, равно объему цилиндра, коего основаніе есть кругъ EF и высота $2JG$, т.-е. такого цилиндра, коего основаніе есть кругъ AB и высота $2JO$, ибо площадь круга EF относится къ площади круга AB какъ корень квадратный изъ JH къ корню изъ высоты JG, т.-е. какъ среднее ихъ пропорціональное JO къ JG. Количество воды, вытекающей въ продолженіе такого времени, въ которое капля можетъ при паденіи описать высоту JH, будетъ равно объему цилиндра съ основаніемъ AB и высотою $2JH$, и въ то время, какъ капля при своемъ паденіи изъ J черезъ H въ G пройдетъ разность высотъ HG, количество вытекающей воды, т.-е. воды заключенной въ объемѣ $ABNFEM$ будетъ равно разности объемовъ цилиндровъ, т.-е. объему цилиндра, коего основаніе AB и высота $2HO$. Такимъ образомъ, полное количество воды въ сосудѣ $ABDC$ относится къ полному количеству вытекающей въ объемѣ $ABNFEM$ воды какъ HG къ $2HO$, т.-е. какъ $HO+OG$ къ $2HO$ или какъ $JH+JO$ къ $2JH$. Но вѣсъ воды, содержащейся въ объемѣ $ABNFEM$, затрачивается на

вытеканіе, слѣдовательно, вѣсъ полнаго количества воды въ сосудѣ относится къ той его части, которая затрачивается на вытеканіе какъ $JH + JO$ къ $2JH$, иначе, какъ сумма площадей круговъ EF и AB къ удвоенной площади круга EF.

Слѣдствіе 4. Поэтому, вѣсъ всего количества воды въ сосудѣ $ABDC$ относится къ той части этого вѣса, которая поддерживается дномъ какъ сумма площадей круговъ AB и EF къ ихъ разности.

Слѣдствіе 5. Та часть вѣса, которая поддерживается дномъ, относится къ той его части, которая затрачивается на вытеканіе воды, какъ разность площадей круговъ AB и EF къ удвоенной площади меньшаго круга EF, иначе, какъ площадь дна къ удвоенной площади отверстія [165]).

---

[165]) Всѣ эти разсужденія основаны на предположеніи, что вода течетъ въ объемѣ $AMEFNB$ какъ по трубѣ, *причемъ вертикальная слагающая ея скорости равна* $\sqrt{2gz}$, гдѣ z есть погруженіе разсматриваемаго сѣченія ниже условнаго уровня KJ, гдѣ эта скорость равнялась бы нулю. Если при этомъ предположеніи принять ось JG цилиндра за ось z, прямую JL за ось y и положить $AB = 2a$, $EF = 2c$, $JH = h_0$, $JG = h_1$ и діаметръ какоголибо сѣченія MN обозначить черезъ $2y$, то изъ условія, что количество протекающей воды вездѣ одно и то же, получится уравненіе кривой BNF, вращеніемъ которой около оси JG образуется труба $AMEFNB$.

Въ самомъ дѣлѣ, тогда должно быть:

$$\pi y^2 \sqrt{2gz} = \text{постоянной}.$$

Примѣнивъ это равенство для сѣченія AB, получимъ по сокращеніи:

$$y^2 \sqrt{z} = a^2 \sqrt{h_0} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

иначе:

$$y^4 z = a^4 h_0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

т.-е. эта кривая есть гипербола пятаго порядка, имѣющая своими ассимптотами прямыя JL и JG.

Изъ уравненія (1) слѣдуетъ, что объемъ $AMEFNB$, который обозначимъ черезъ V, будетъ:

$$V = \pi \int_{h_0}^{h_1} y^2 dz = \pi a^2 \sqrt{h_0} \int_{h_0}^{h_1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \pi \frac{a^2 \sqrt{h_0}}{2} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_0}).$$

Объемъ же V_0 цилиндра $ABCD$ равенъ $\pi a^2 (h_1 - h_0)$, слѣдовательно, будетъ:

$$\frac{V_0}{V} = \frac{h_1 - h_0}{2\sqrt{h_0}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_0})} = \frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_0}}{2\sqrt{h_0}}.$$

На основаніи уравненія

$$c^2 \sqrt{h_1} = a^2 \sqrt{h_0}$$

Слѣдствіе 6. Отношеніе вѣса воды, которая только и поддерживается дномъ къ вѣсу цилиндрическаго вертикальнаго столба воды надъ нимъ расположеннаго равно отношенію площади круга AB къ суммѣ площадей круговъ AB и EF, иначе отношенію площади круга AB къ избытку удвоенной площади AB надъ площадью дна. Ибо по слѣдствію 4-му отношеніе вѣса воды поддерживаемаго дномъ къ вѣсу всей воды въ сосудѣ равно отношенію разности площадей круговъ AB и EF къ ихъ суммѣ, вѣсъ же всей воды въ сосудѣ относится къ вѣсу всего ея столба стоящаго прямо надъ дномъ какъ площадь круга AB къ разности площадей круговъ AB и EF. Отсюда слѣдуетъ, что отношеніе вѣса воды, поддерживаемаго дномъ, къ вѣсу столба воды, прямо надъ дномъ стоящаго, равно отношенію площади круга AB къ суммѣ площадей AB и EF или, что то же, къ избытку удвоенной площади AB надъ площадью дна.

Слѣдствіе 7. Если по срединѣ отверстія EF (фиг. 174) помѣстить горизонтально кружокъ PQ, описанный изъ центра G, то вѣсъ воды, поддерживаемый этимъ кружкомъ больше третьей части вѣса водяного цилиндра, коего основаніе есть этотъ кружокъ и высота GH.

Пусть $ABNFEM$ есть тотъ водопадъ или же тотъ столбъ падающей внизъ воды, коего ось GH; вообразимъ, какъ и прежде, что вся остальная вода въ сосудѣ какъ въ смежности съ водопадомъ, такъ и находящаяся надъ кружкомъ, текучесть которой не требуется для самаго скораго и самаго свободнаго ея вытеканія, замерзла.

получимъ:

$$\frac{V_0}{V}=\frac{a^2+c^2}{2c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Это равенство и выражаетъ свойство высказанное въ слѣдствіи 3.

Изъ пропорціи (3) непосредственно получаются такія двѣ:

$$\frac{V_0}{V_0-V}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\frac{V_0-V}{V}=\frac{a^2-c^2}{2c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

выражающія слѣдствія (4) и (5).

Какъ это разсужденіе, такъ и послѣдующія основаны, какъ видно, на предположеніи, что *вертикальная* слагающая скорости воды, текущей по объему $ABNFEM$ равна $\sqrt{2gz}$. Это предположеніе физически невозможно, ибо оно требовало бы, чтобы давленіе, напр., въ точкѣ M внутри столба текущей воды было бы меньше атмосфернаго, снаружи же этого столба въ водѣ стоячей это давленіе очевидно больше атмосфернаго, слѣдовательно, такого теченія въ жидкости образоваться не можетъ.

Слѣдствія 5 и 6, если ихъ сопоставить съ законами гидростатики, какъ бы указываютъ на то, что Ньютонъ считалъ, что на всю поверхность $ABNFEM$ раздѣла стоячей и текущей воды дѣйствуетъ атмосферное давленіе, такое же какъ на свободную поверхность AB, уравновѣшиваемое давленіемъ атмосферы на дно CD.

Пусть PHQ есть столбъ замерзшей воды, находящейся надъ кружкомъ, точка H его вершина и GH высота. Представь себѣ, что водопадъ подъ дѣйствіемъ полнаго своего вѣса падаетъ внизъ, не производя на PQH ни давленія и не встрѣчая препятствія, но скользя свободно и безъ тренія, за исключеніемъ, можетъ быть, самой вершины ледяного столба, гдѣ при началѣ движенія поверхность воды можетъ быть и впалой. Подобно тому, какъ замерзшая вокругъ водопада вода $AMEC$ и $BNFD$ ограничена съ внутренней, обращенной къ водопаду стороны, выпуклою въ его сторону поверхностью AME и BNF, такъ и столбъ PHQ будетъ имѣть обращенную къ водопаду поверхность выпуклою, и, слѣдовательно, его объемъ больше, нежели объемъ конуса, коего основаніе есть сказанный кружокъ PQ и высота GH, т.-е. больше трети объема цилиндра тѣхъ же основанія и высоты. Кружокъ же поддерживаетъ вѣсъ этого столба, т.-е. вѣсъ большій вѣса конуса или третьей части цилиндра.

Слѣдствіе 8. Можно показать, что вѣсъ воды, поддерживаемый весьма малымъ кружкомъ PQ меньше двухъ третей вѣса водяного цилиндра, имѣющаго своимъ основаніемъ этотъ кружокъ и высотою GH.

Принявъ прежнія положенія, вообрази, что описанъ полусфероидъ (эллипсоидъ вращенія) коего основаніе есть сказанный кружокъ и высота GH. Эта поверхность будетъ имѣть объемъ, равный двумъ третямъ объема сказаннаго цилиндра, причемъ она будетъ заключать въ себѣ столбъ PHQ замерзшей воды, вѣсъ котораго и поддерживается кружкомъ. Хотя движеніе воды и направлено прямо внизъ, тѣмъ не менѣе наружная поверхность столба подходитъ къ основанію PQ подъ нѣсколько острымъ угломъ, вслѣдствіе того, что при паденіи вода постоянно ускоряется, и струя ея, ускоряясь, становится болѣе тонкой; и такъ вслѣдствіе того, что этотъ уголъ меньше прямого, столбъ въ нижнихъ своихъ частяхъ располагается внутри сфероида.

Точно также вверху онъ будетъ имѣть заостренную вершину, ибо иначе горизонтальное движеніе воды у вершины сфероида было бы безконечно быстрѣе ея вертикальнаго движенія. Чѣмъ меньше будетъ кружочекъ PQ, тѣмъ острѣе будетъ вершина столба и при безпредѣльномъ уменьшеніи кружочка уголъ PHQ уменьшается безконечно, поэтому столбъ располагается внутри полусфероида. Слѣдовательно, объемъ этого столба меньше объема полусфероида, т.-е. меньше двухъ третей объема цилиндра, коего основаніе есть сказанный кружочекъ и высота GH. Кружочекъ же поддерживаетъ силу, равную вѣсу сказаннаго столба, ибо вѣсъ окружающей воды затрачивается на ея вытеканіе.

Слѣдствіе 9. Вѣсъ воды, поддерживаемый весьма малымъ кружочкомъ PQ, приблизительно равенъ вѣсу водяного цилиндра, коего основаніе есть этотъ кружочекъ и высота $\frac{1}{2}GH$, ибо этотъ послѣдній вѣсъ есть среднее ариѳметическое между вѣсомъ конуса и вѣсомъ полусфероида. Если же этотъ кружочекъ не весьма малъ, но увеличиваясь сравняется

съ отверстіемъ EF, то онъ будетъ поддерживать полный вѣсъ воды отвѣсно надъ нимъ расположенной, т.-е. вѣсъ цилиндра, коего основаніе есть этотъ кружокъ и высота GH.

Слѣдствіе 10. И (какъ мнѣ кажется) вѣсъ, поддерживаемый кружкомъ, всегда приблизительно относится къ вѣсу цилиндра воды, имѣющаго своимъ основаніемъ этотъ кружокъ и высотою $\frac{1}{2}GH$ какъ EF^2 относится къ $\left(EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2\right)$, т.-е. какъ площадь кружка EF къ избытку этой площади надъ половиною площади кружочка PQ [166]).

Лемма IV.

Сопротивленіе цилиндра, движущагося равномѣрно въ направленіи своей длины, не измѣняется при увеличеніи или уменьшеніи этой длины, поэтому оно то же самое, какъ и сопротивленіе круга того же діаметра, движущагося по направленію прямой перпендикулярной къ его плоскости съ тою же скоростью.

Ибо боковая поверхность цилиндра нисколько не препятствуетъ его движенію, при безпредѣльномъ же уменьшеніи длины цилиндръ обращается въ кругъ [167]).

Предложеніе XXXVII. Теорема XXIX.

Для цилиндра, движущагося равномѣрно по направленію своей оси въ сжатой, безпредѣльной и неупругой жидкости, сопротивленіе, происходящее отъ величины поперечнаго сѣченія цилиндра, приблизительно относится къ такой силѣ, которая можетъ въ такое время, пока цилиндръ проходитъ учетверенную свою длину, произвести или уничтожить полное его количество движенія, какъ плотность среды относится къ плотности цилиндра.

Пусть сосудъ $ABDC$ (черт. 175) касается своимъ дномъ CD поверхности стоячей воды, и изъ этого сосуда по вертикальной трубѣ $EFTS$ вытекаетъ вода въ стоячую воду, и гдѣ-либо внутри этой трубы помѣщенъ кружокъ PQ, коего плоскость горизонтальна; если продолжить CA до K такъ, чтобы отношеніе $AK : CK$ было равно квадрату отношенія избытка площади отверстія трубы EF надъ площадью кружочка PQ къ площади

---

[166]) Всѣ разсужденія въ этомъ предложеніи основаны на оговоренномъ въ сл. 7 предположеніи «что водопадъ подъ дѣйствіемъ полнаго своего вѣса падаетъ внизъ не производя на PQH ни давленія и не встрѣчая препятствія, но скользя свободно и безъ тренія». Это предположеніе, такъ и всѣ дальнѣйшія изъ него слѣдующія, на дѣлѣ мѣста не имѣютъ и не совмѣстимы со свойствами жидкости.

[167]) Это заключеніе противорѣчитъ результатамъ опытовъ, которые были произведены однако на много лѣтъ послѣ изданія «Началъ».

круга AB, то по сл. 5, 6 и сл. 1 пр. XXXVI явствуетъ, что скорость воды, протекающей черезъ кольцевое пространство заключенное между стѣнкою трубы и кружочкомъ, равна той скорости, которую вода пріобрѣла бы при своемъ свободномъ паденіи съ высоты KC или JG.

По слѣд. X пр. XXXVI, если ширина сосуда будетъ безконечно велика, такъ что отрѣзочекъ JH исчезаетъ и высоты JG и HG сравняются, то сила, производимая текущей водой на кружочекъ, будетъ относиться къ вѣсу цилиндра, имѣющаго его своимъ основаніемъ и высотою $\frac{1}{2}JG$ приблизительно какъ $EF^2 : \left(EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2\right)$, ибо сила, производимая равномѣрно текущей водой, будетъ та же самая, въ какой бы части трубы кружокъ PQ ни былъ расположенъ.

Положимъ, что концы трубы EF и ST закрыты и что кружокъ, поднимаясь вверхъ въ жидкости повсюду одинаково сжатой, заставляетъ этимъ своимъ движеніемъ воду, надъ нимъ расположенную, опускаться черезъ кольцевое пространство между нимъ и стѣнками трубы внизъ; скорость поднимающагося кружка будетъ относиться къ скорости опускающейся воды какъ разность площадей круговъ EF и PQ относится къ площади круга PQ, отношеніе же скорости поднимающагося кружка къ суммѣ скоростей, т.-е. къ его скорости относительно обтекающей его воды, будетъ равно отношенію разности площадей круговъ EF и PQ къ площади круга EF, т.-е. $(EF^2 - PQ^2) : EF^2$.

Пусть эта относительная скорость равна той скорости, съ которою предполагалось, что вода протекаетъ черезъ то же кольцевое пространство, когда кружокъ былъ неподвиженъ, т.-е. той скорости, которую вода пріобрѣла бы при свободномъ паденіи съ высоты JG; сила дѣйствія воды на поднимающійся кружокъ будетъ по слѣд. 5 Законовъ такая же какъ и раньше, т.-е. сопротивленіе поднимающагося кружка будетъ приблизительно относиться къ вѣсу цилиндра воды, коего основаніе есть этотъ кружокъ и высота $\frac{1}{2}JG$, какъ $EF^2 : \left(EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2\right)$. Скорость же поднимающагося кружка относится къ скорости, пріобрѣтаемой водою при свободномъ паденіи съ высоты JG, какъ $(EF^2 - PQ^2) : EF^2$.

При увеличеніи ширины трубы до безконечности оба отношенія

$$(EF^2 - PQ^2) : EF^2, \qquad EF^2 : \left(EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2\right)$$

приближаются въ предѣлѣ къ равенству и, слѣдовательно, тогда скорость кружочка будетъ та же самая, какъ та скорость, которую вода можетъ пріобрѣсти при свободномъ паденіи съ высоты JG; сопротивленіе имъ испытываемое становится тогда равнымъ вѣсу такого цилиндра, коего основаніе есть этотъ кружокъ и высота равна половинѣ той высоты JG, съ которой этотъ цилиндръ долженъ бы упасть, чтобы пріобрѣсти ту скорость, съ которою кружокъ движется вверхъ; двигаясь съ такою скоростью цилиндръ за время своего паденія прошелъ бы путь, равный учетверенной длинѣ своей.

Но сопротивленіе цилиндра, движущагося по направленію своей длины такое же, какъ и сопротивленіе кружочка (по леммѣ IV), слѣдовательно оно равно такой силѣ, которая можетъ произвести то количество движенія, которымъ цилиндръ обладаетъ въ такое время, въ какое онъ, двигаясь равномѣрно, проходитъ путь, равный учетверенной длинѣ своей [168]).

Если увеличивать или уменьшать длину цилиндра, то и количество движенія его и время, въ продолженіе котораго онъ проходитъ учетверенную длину свою, увеличатся или уменьшатся въ одномъ и томъ же отношеніи; слѣдовательно, та сила, которая въ продолженіе этого соотвѣтственно увеличеннаго или уменьшеннаго времени произвела бы и увеличенное или уменьшенное количество движенія, не измѣнится и попрежнему будетъ равна сопротивленію цилиндра, ибо по леммѣ IV и оно остается безъ измѣненія.

Если увеличится или уменьшится плотность цилиндра, то и его количество движенія и сила, которая въ продолженіе одного и того же времени могла бы произвести или уничтожить это количество движенія, увеличится или уменьшится въ томъ же отношеніи. Такимъ образомъ сопротивленіе какого-либо цилиндра будетъ относиться къ такой силѣ, которая могла бы произвести или уничтожить полное количество движенія цилиндра, пока онъ проходитъ путь, равный учетверенной своей длинѣ, приблизительно какъ плотность среды относится къ плотности цилиндра.

Жидкость должна быть сжатой, дабы она оставалась сплошною; она вмѣстѣ съ тѣмъ должна быть сплошною и неупругой, чтобы всякое давленіе, которое происходитъ отъ этого сжиманія, распространялось бы мгновенно и дѣйствуя одинаково на всѣ части движущагося тѣла, не измѣняло бы сопротивленія имъ испытываемаго.

Лишь то давленіе, которое происходитъ отъ движенія тѣла и затрачивается на образованіе количества движенія жидкости, производитъ сопротивленіе ея. Давленіе-же, которое происходитъ отъ сжиманія жидкости сколь бы велико оно

---

[168]) Пусть будетъ: плотность жидкости Δ, плотность цилиндра δ, площадь его основанія S, длина l, масса m, скорость v, сопротивленіе имъ испытываемое при движеніи вдоль своей оси съ этою скоростью R. Количество движенія, которымъ цилиндръ обладаетъ при движеніи со скоростью v есть $mv = Sl\delta v$, время τ въ продолженіе котораго проходится путь $4l$, есть $\tau = \frac{4l}{v}$, слѣдовательно сила, сообщающая такое количество движенія въ это время, есть $\frac{mv}{\tau} = \frac{1}{4} Sv^2\delta$ и сила сопротивленія R будетъ:

$$R = \frac{1}{4} Sv^2\Delta \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Если обозначить черезъ q вѣсъ единицы объема жидкости и черезъ h высоту, соотвѣтствующую скорости v, то получится

$$R = \frac{1}{2} Shq \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

ни было, если только оно распространяется мгновенно, не сообщаетъ частицамъ сплошной жидкости никакого количества движенія и совершенно не производитъ никакого его измѣненія и слѣдовательно, не увеличиваетъ и не уменьшаетъ сопротивленія. Въ самомъ дѣлѣ, дѣйствіе жидкости, происходящее отъ такого сжатія, не можетъ быть болѣе сильнымъ на кормовую часть тѣла, нежели на носовую его часть, и слѣдовательно, не можетъ уменьшить описаннаго въ этомъ предложеніи сопротивленія; оно не будетъ болѣе сильнымъ на носовую часть тѣла, нежели на кормовую, если его распространеніе будетъ безконечно быстрѣе движенія тѣла испытывающаго давленіе. Когда же жидкость будетъ сплошною и не упругой, оно будетъ безконечно быстрымъ и будетъ распространяться мгновенно.

Слѣдствіе 1. Сопротивленія цилиндровъ движущихся равномѣрно по направленію своихъ длинъ пропорціональны квадратамъ скоростей, квадратамъ діаметровъ и плотностямъ жидкостей.

Слѣдствіе 2. Если ширина трубы не безконечно велика, цилиндръ же движется по направленію своей длины, въ средѣ заключенной въ трубѣ и находящейся въ покоѣ и ось его совпадаетъ съ осью трубы, то отношеніе его сопротивленія къ силѣ, которою полное его количество движенія, могло бы быть произведено или уничтожено во время, пока онъ проходитъ учетверенную длину свою, будетъ равно произведенію количества

$$\frac{EF^2}{EF^2-\frac{1}{2}PQ^2}\cdot\left(\frac{EF^2}{EF^2-PQ^2}\right)^2$$

на отношеніе плотности среды къ плотности цилиндра.

Слѣдствіе 3. При тѣхъ же предположеніяхъ, если отношеніе длины L къ учетверенной длинѣ цилиндра равно величинѣ

$$\frac{EF^2}{EF^2-\frac{1}{2}PQ^2}\cdot\left(\frac{EF^2}{EF^2-PQ^2}\right)^2$$

то сопротивленіе цилиндра будетъ относиться къ силѣ, которая можетъ произвести или уничтожить полное количество движенія его, пока онъ проходитъ равномѣрно путь L, какъ плотность среды къ плотности цилиндра.

Поученіе.

Въ этомъ предложеніи мы изслѣдовали сопротивленіе, происходящее единственно только отъ величины поперечнаго сѣченія цилиндра, пренебрегая тою частью сопротивленія, которая можетъ происходить отъ наклонности движеній. Подобно тому, какъ въ случаѣ 1$^{\text{омъ}}$ предложенія XXXVI наклонность движеній, съ которыми частицы воды отовсюду сходились къ отверстію EF, препятствовала вытеканію воды изъ этого отверстія, такъ и въ этомъ случаѣ, наклонность тѣхъ движеній, съ которыми частицы воды,

нажимаемыя переднимъ основаніемъ цилиндра, уступаютъ этому давленію и расходятся во всѣ стороны, замедляетъ переходъ частицъ черезъ мѣста смежныя съ переднимъ основаніемъ цилиндра къ кормовому его основанію. Вслѣдствіе этого, жидкость приходитъ въ движеніе въ бо́льшемъ разстояніи отъ цилиндра, и сопротивленіе возрастаетъ приблизительно въ такомъ же отношеніи, какъ уменьшалось истеченіе воды изъ сосуда, т.-е. кругло какъ $\left(\frac{25}{21}\right)^2$. Подобно тому, какъ въ указанномъ первомъ случаѣ предложенія XXXVI, чтобы заставить частицы воды проходить перпендикулярно и въ наибольшемъ количествѣ черезъ отверстіе EF было положено, что въ сосудѣ вся та вода, движеніе которой было наклонное и безполезное, заморожена вокругъ стрежня и оставалась неподвижной, такъ и въ этомъ предложеніи, чтобы уничтожить наклонность движеній и чтобы отступающія частицы воды обладали самымъ прямымъ и кратчайшимъ движеніемъ, представляя наиболѣе легкій проходъ цилиндру, и чтобы оставалось только то сопротивленіе, которое происходитъ отъ величины поперечнаго сѣченія цилиндра, и которое не иначе можетъ быть уменьшено, какъ уменьшивъ діаметръ цилиндра, надо вообразить, что тѣ частицы жидкости, коихъ движенія косвенны и безполезны и увеличиваютъ сопротивленіе, находятся въ относительномъ покоѣ у обѣихъ оконечностей цилиндра, сцѣплены между собою и присоединены къ цилиндру. Пусть $ABCD$ (чер. 176) прямоугольникъ, AE и BE двѣ дуги параболъ, описанныхъ на оси AB параметромъ, который относится къ пространству HG, проходимому цилиндромъ, пока онъ при паденіи не получитъ той скорости, съ которой онъ движется, какъ $HG : \frac{1}{2} AB$; также CF и DF двѣ другія дуги параболъ, описанныхъ на оси CD параметромъ вчетверо бо́льшимъ предыдущаго, тогда при обращеніи этой фигуры около оси EF образуется тѣло, коего средняя часть есть цилиндръ, о которомъ идетъ дѣло, крайнія же части ABE и CFD заключаютъ въ себѣ частицы покоющейся жидкости, которыя связаны въ два твердыхъ тѣла и присоединены къ цилиндру подобно носу и кормѣ. Сопротивленіе тѣла $EACFDB$, движущагося по направленію своей оси EF въ сторону точки E, и будетъ приблизительно равно тому, о которомъ сказано въ этомъ предложеніи, т.-е. такому, коего отношеніе къ силѣ, которая можетъ произвести или уничтожить полное количество движенія цилиндра въ то время, пока онъ проходитъ равномѣрно путь $4AC$, приблизительно равно отношенію плотности жидкости къ плотности цилиндра. Сопротивленіе не можетъ быть меньше этой силы, нежели въ отношеніи $2:3$ по слѣд. 7 предл. XXXVI.

Лемма V.

Если внутри трубы помѣщать послѣдовательно цилиндръ, шаръ и сфероидъ равныхъ поперечныхъ сѣченій такъ, чтобы ихъ оси совпа-

дали съ осью трубы, то эти тѣла будутъ оказывать одинаковое препятствіе теченію воды черезъ трубу.

Ибо пространства между трубою, цилиндромъ, шаромъ и сфероидомъ, черезъ которыя протекаетъ вода, равны между собою; черезъ одинаковыя же пространства вода протекаетъ одинаково.

Такъ это происходитъ при предположеніи, что вся вода, текучесть которой не способствуетъ скорѣйшему ея протеканію по трубѣ, заморожена надъ цилиндромъ шаромъ, или сфероидомъ, какъ это объяснено въ слѣд. 7 предл. XXXVI.

Лемма VI.

При тѣхъ же предположеніяхъ вышеуказанныя тѣла испытываютъ одинаковое дѣйствіе отъ протекающей по трубѣ воды.

Это слѣдуетъ изъ леммы V и третьяго закона движенія, ибо вода и тѣла дѣйствуютъ другъ на друга одинаково.

Лемма VII.

Если вода въ трубѣ находится въ покоѣ, эти же тѣла движутся съ одинаковыми скоростями, то сопротивленія ими испытываемыя будутъ между собою равны.

Это устанавливается предыдущею леммою, ибо относительное движеніе тѣлъ и воды остается безъ измѣненія.

Поученіе.

Все изложенное относится и до всѣхъ круглыхъ и выпуклыхъ тѣлъ, оси коихъ совпадаютъ съ осью трубы. Нѣкоторая разница можетъ происходить отъ бо̀льшаго или меньшаго тренія, но въ этихъ леммахъ предполагается, что тѣла вполнѣ отполированныя, что вязкость и треніе среды равны нулю, и что тѣ части жидкости, косвенныя и излишнія движенія которыхъ могли бы возмущать, препятствовать и замедлять теченіе воды, находятся въ относительномъ покоѣ, какъ бы будучи примороженными къ носовой и кормовой оконечности тѣлъ, какъ объ этомъ сказано въ предыдущемъ предложеніи. Поэтому въ послѣдующемъ дѣло идетъ о томъ наименьшемъ изъ всѣхъ сопротивленій, которое могутъ испытывать круглыя тѣла заданнаго сѣченія.

Плавающія въ жидкости тѣла, двигаясь прямолинейно, производятъ то, что жидкость передъ носовой частію повышается, позади кормовой опускается, въ особенности когда ихъ обводы тупые, поэтому такія тѣла испытываютъ немного бо̀льшее сопротивленіе, нежели при остромъ носѣ и кормѣ. Когда тѣла движутся въ упругой жидкости, и если они спереди и

сзади тупого образованія, то они немного болѣе сгущаютъ жидкость въ передней части, и немного болѣе разрѣжаютъ въ кормовой и поэтому испытываютъ бо́льшее сопротивленіе нежели при остромъ носѣ и кормѣ. Но въ этихъ леммахъ и предложеніяхъ мы разсматриваемъ не сжимаемыя жидкости, а не упругія, и тѣла не плавающія на поверхности, но глубоко погруженныя. Послѣ того, какъ сопротивленіе въ неупругихъ жидкостяхъ найдено, его слѣдуетъ немного увеличить для жидкостей упругихъ, каковъ воздухъ, такъ и для тѣлъ плавающихъ на поверхности стоячей жидкости, каковы моря и озера.

Предложеніе XXXVIII. Теорема XXX.

Сопротивленіе шара движущагося равномѣрно въ безпредѣльной, находящейся подъ давленіемъ, жидкости относится къ такой силѣ, которая можетъ произвести или уничтожить полное количество движенія шара въ такое время, пока онъ проходитъ восемь третей длины своего діаметра, какъ плотность жидкости къ плотности шара.

Ибо объемъ шара составляетъ двѣ трети объема описаннаго цилиндра и слѣдовательно сила, которая можетъ уничтожить полное количество движенія цилиндра, пока онъ проходитъ длину равную четыремъ діаметрамъ, уничтожитъ полное количество движенія шара пока онъ проходитъ двѣ трети указанной длины, т.-е. восемь третей своего діаметра. Сопротивленіе же цилиндра относится къ этой силѣ приблизительно, какъ плотность жидкости къ плотности цилиндра или шара по предл. XXXVII, по леммамъ же V, VI, VII сопротивленіе шара и цилиндра равны [169]).

---

[169]) Такъ какъ сопротивленія шара и описаннаго около него цилиндра при гипотезѣ сплошной жидкости между собою равны, то будетъ на основаніи форм. (1) и (2) примѣчанія (168)

$$R = \frac{1}{4} Sv^2\Delta = \frac{1}{2} Shq \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

гдѣ S есть площадь большого круга шара, т.-е. $S = \frac{\pi D^2}{4}$, когда D означаетъ діаметръ шара, такъ что

$$R = \frac{1}{16}\pi D^2 v^2 \Delta = \frac{1}{8}\pi D^2 hq \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Въ предложеніи XXXIV показано, что для жидкости рѣдкой, т.-е. состоящей изъ отдѣльныхъ независимыхъ частицъ, сопротивленіе шара равно половинѣ сопротивленія цилиндра.

Въ слѣдствіи 2 разсчитывается предѣльная скорость, которой можетъ достигнуть падающій въ жидкости шаръ. Эта скорость v_0 опредѣляется изъ равенства сопротивленія и кажущагося вѣса:

$$\frac{1}{16}\pi D^2 v_0^2 \Delta = \frac{4}{3}\pi \frac{D^3}{8}(\delta - \Delta) \,.\, g$$

Слѣдствіе 1. Сопротивленія шаровъ движущихся въ находящихся подъ давленіемъ безграничныхъ жидкостяхъ пропорціональны плотностямъ жидкостей, квадратамъ скоростей и квадратамъ діаметровъ.

Слѣдствіе 2. Наибольшая скорость, которую можетъ достичь шаръ, падающій въ жидкости подъ дѣйствіемъ кажущагося своего вѣса, такова, которую этотъ шаръ, падая подъ дѣйствіемъ того же вѣса безъ сопротивленія, получаетъ, пройдя путь, относящійся къ четыремъ третямъ діаметра шара, какъ плотность шара относится къ плотности жидкости. Ибо шаръ, двигаясь съ этою скоростью равномѣрно въ продолженіе времени своего паденія, прошелъ бы путь, относящійся къ восьми третямъ его діаметра какъ плотность шара къ плотности жидкости, отношеніе же силы тяжести, производящей это количество движенія, къ силѣ, которая могла бы произвести такое же количество движенія въ продолженіе времени, пока шаръ, двигаясь равномѣрно съ этою скоростью, проходитъ путь въ восемь третей діаметра, равно отношенію плотности жидкости къ плотности шара, слѣдовательно, кажущаяся сила тяжести будетъ равна силѣ сопротивленія и, значитъ, шаръ не можетъ ускоряться.

Слѣдствіе 3. Когда заданы плотность шара и начальная его скорость, а также и плотность покоющейся и находящейся подъ давленіемъ жидкости, въ которой шаръ движется, то для всякаго времени найдутся скорость шара, его сопротивленіе и пройденный имъ путь по слѣд. 7 пр. XXXV.

Слѣдствіе 4. Шаръ, движущійся въ находящейся подъ давленіемъ покоющейся жидкости одинаковой съ нимъ плотности, утрачиваетъ половину своего количества движенія ранѣе, нежели пройдетъ путь, равный удвоенной длинѣ своего діаметра по тому же слѣд. 7.

откуда

$$v_0^2 = \frac{8}{3} D \frac{\delta - \Delta}{\Delta} g \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Ньютонъ эту формулу представляетъ иначе.

Такъ какъ масса шара есть $\frac{4}{3}\pi\frac{D^3}{8}.\delta$, и кажущійся его вѣсъ въ жидкости $\frac{4}{3}\pi D^3(\delta - \Delta)g$, то ускореніе g_1 при свободномъ паденіи шара въ жидкости есть $\frac{\delta - \Delta}{\delta} g$, и формулу (3) можно написать такъ:

$$v_0^2 = \frac{8}{3} D g_1 . \frac{\delta}{\Delta}.$$

Полагая $v_0^2 = 2Lg_1$ получимъ

$$L = \frac{4}{3} D . \frac{\delta}{\Delta}$$

какъ это и высказано въ слѣдствіи 2.

Предложеніе XXXIX. Теорема XXXI.

Отношеніе сопротивленія шара, движущагося равномѣрно въ жидкости, находящейся подъ давленіемъ и заключенной въ замкнутой трубѣ, къ такой силѣ, которая могла бы произвести или уничтожить полное его количество движенія въ продолженіе времени, пока онъ проходитъ восемь третей своего діаметра, приблизительно равно произведенію слѣдующихъ отношеній: площади сѣченія трубы къ избытку площади этого сѣченія надъ половиною площади бо́льшаго круга шара, площади сѣченія трубы къ избытку этой площади надъ площадью бо́льшаго круга шара и плотности жидкости къ плотности шара.

Получается изъ сл. 2 пр. XXXVII, такимъ же образомъ, какъ и предыдущее предложеніе.

Поученіе.

Въ двухъ послѣднихъ предложеніяхъ (также какъ и въ л. V) предполагается, что вся вода впереди шара, текучесть которой увеличиваетъ сопротивленіе, къ нему примерзла; если же эта вода въ жидкомъ состояніи, то сопротивленіе будетъ немного болѣе. Однако, это увеличеніе сопротивленія въ разсматриваемыхъ случаяхъ не велико и имъ можно пренебречь, ибо выпуклая поверхность шара исполняетъ ту же роль, какъ и ледъ.

Предложеніе XL. Задача IX.

Опредѣлить по наблюдаемымъ явленіямъ сопротивленіе, испытываемое шаромъ при движеніи въ жидкой средѣ находящейся подъ давленіемъ.

Пусть A есть вѣсъ шара въ пустотѣ, B его вѣсъ въ жидкости, D діаметръ шара, F длина пути, такъ относящаяся къ $\frac{4}{3}D$ какъ плотность шара къ плотности жидкости, т.-е. какъ $A:(A-B)$; G время, въ теченіе котораго шаръ, падая безъ сопротивленія проходитъ путь F, и H скорость, которую онъ въ этомъ случаѣ получаетъ. Тогда H будетъ тою наибольшею скоростью, которую шаръ можетъ достигнуть подъ дѣйствіемъ вѣса B въ сопротивляющейся средѣ; по сл. 2 пр. XXXVIII, сопротивленіе, испытываемое шаромъ при этой скорости, будетъ равно вѣсу B; сопротивленіе же при всякой другой скорости будетъ относиться къ вѣсу B какъ квадратъ этой скорости къ квадрату наибольшей скорости H, по сл. 1 пр. XXXVIII. Таково сопротивленіе происходящее отъ инерціи вещества жидкости.

Сопротивленіе-же, которое происходитъ отъ упругости, вязкости и тренія жидкости изслѣдуется слѣдующимъ образомъ: шаръ пускается сво-

бодно падать въ жидкости подъ дѣйствіемъ своего вѣса B; пусть P есть время паденія, выраженное также въ секундахъ, какъ и время G. Опредѣляется число N соотвѣтствующее логариѳму $0{,}4342944819 \cdot \frac{2P}{G}$, и пусть L означаетъ логариѳмъ числа $\frac{N+1}{N}$, тогда, если скорость достигнутая при паденіи будетъ $\frac{N-1}{N+1}H$, пройденное при паденіи пространство будетъ [170])

$$\frac{2P \cdot F}{G} - 1{,}3862943611 F + 4{,}605170186 L \cdot F.$$

---

[170]) Обозначая черезъ g ускореніе силы тяжести и черезъ g_1 ускореніе, которое имѣло бы тѣло двигаясь въ жидкости подъ дѣйствіемъ кажущагося своего вѣса такъ, что при Ньютоновомъ обозначеніи $g_1 : g = B : A$, тогда обозначая черезъ v_0 предѣльную скорость, можемъ написать уравненіе движенія тѣла

$$m\frac{dv}{dt} = m\left(g_1 - g_1 \frac{v^2}{v_0^2}\right)$$

откуда получаемъ:

$$\frac{dv}{v_0^2 - v^2} = \frac{g_1}{v_0^2} dt,$$

полагая затѣмъ

$$\tau = \frac{v_0}{g_1} \quad \text{и} \quad \frac{2}{\tau} = n$$

имѣемъ:

$$\log \frac{v_0 + v}{v_0 - v} = \frac{2t}{\tau}$$

или иначе:

$$v = \frac{e^{nt} - 1}{e^{nt} + 1} v_0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Высота паденія

$$h = \int_0^t v dt = v_0 \int_0^t \frac{e^{nt} - 1}{e^{nt} + 1} dt = v_0 t + \frac{2v_0}{n} \log \frac{1 + e^{nt}}{e^{nt}} - \frac{2v_0}{n} \log 2 \quad . \ . \quad (2)$$

Ньютонъ формулы (1) и (2) пишетъ иначе, а именно: время t у него обозначено черезъ P, величина τ черезъ G, величина $v_0 \tau$ обозначена черезъ $2F$, величина e^{nt} обозначена черезъ N, логариѳмы онъ предполагаетъ обыкновенные, число $0{,}43429\ldots$ есть модуль обыкновенныхъ логариѳмовъ, т.-е. $\log_{10} e$ число $4{,}60517\ldots = 2\log 10$, число $1{,}38629\ldots$ есть $2\log 2$; такимъ образомъ формула приведенная въ текстѣ есть не что иное какъ (форм. 2).

Величины F и G вычисляются по формуламъ:

$$F = \frac{4}{3} D \cdot \frac{A}{A - B} = \frac{1}{2} g \frac{B}{A} \cdot G^2$$

и

$$G^2 = \frac{2F \cdot A}{B \cdot g}.$$

Если жидкость достаточно глубока, то членомъ $4{,}605170186 L \,.\, F$ можно пренебречь, и пройденное пространство составитъ приблизительно

$$\frac{2P.F}{G} - 1{,}3862943611 F.$$

Все это слѣдуетъ изъ предложенія девятаго этой книги и его слѣдствій, въ предположеніи, что шаръ никакого другого сопротивленія не испытываетъ, какъ только происходящее отъ инерціи матеріи. Если же, сверхъ того, онъ будетъ испытывать еще какое-либо сопротивленіе, то его паденіе будетъ происходить медленнѣе и по этому замедленію можно опредѣлить и величину этого добавочнаго сопротивленія.

Чтобы проще находить скорость и длину пути тѣла, падающаго въ жидкости, я составилъ слѣдующую таблицу, въ которой первый столбецъ заключаетъ время паденія, второй даетъ пріобрѣтаемую при паденіи скорость, принимая наибольшую скорость за 100.000.000, въ третьемъ показано пространство, пройденное за это время падающимъ тѣломъ, принимая за $2F$ то пространство, которое тѣло описываетъ въ продолженіе времени G, двигаясь равномѣрно съ наибольшею скоростью, въ четвертомъ показано пространство, проходимое за время, указанное въ первомъ столбцѣ при движеніи съ наибольшею скоростью. Числа четвертаго столбца суть $\frac{2P}{G}$, вычитаніемъ изъ нихъ числа

$$1{,}3862944 - 4{,}6051702 L$$

получаются числа третьяго столбца. Эти числа надо помножать на F, чтобы получить пространства, пройденныя падающимъ тѣломъ. Сверхъ того прибавленъ еще пятый столбецъ, заключающій пространства, проходимыя тѣломъ при паденіи въ пустотѣ подъ дѣйствіемъ силы, равной его кажущемуся вѣсу B (см. таблицу на стр. 408).

Поученіе.

Чтобы изслѣдовать сопротивленіе жидкостей по опытамъ, я изготовилъ деревянный сосудъ квадратнаго сѣченія шириною и длиною внутри по девять англійскихъ дюймовъ, глубиною же въ девять съ половиною футъ, наполнилъ его дождевою водой, и замѣчалъ время паденія шаровъ, сдѣланныхъ изъ воска съ свинцовымъ ядромъ внутри, высота паденія была 112 дюймовъ. Англійскій кубическій футъ заключаетъ 76 римскихъ фунтовъ дождевой воды, кубическій же дюймъ $\frac{19}{36}$ унціи, т.-е. $253\frac{1}{3}$ грана, водяной шаръ, коего діаметръ одинъ дюймъ, вѣситъ 132,645 грана въ воздухѣ или 132,8 грана въ пустотѣ; объемъ всякаго другого шара пропорціоналенъ избытку его вѣса въ пустотѣ надъ вѣсомъ его въ водѣ.

Опытъ 1. Шаръ, вѣсъ котораго въ воздухѣ былъ $156\frac{1}{4}$ грана и 77 гранъ въ водѣ, прошелъ полную высоту 112 дюймовъ въ 4 секунды.

Времена P	Скорости падающаго тѣла въ жидкости.	Пространства пройденныя при паденіи въ жидкости.	Пространство которое тѣло прошло бы, двигаясь съ наиб. скоростью.	Пространство проходимое при паденіи въ пустотѣ.
0,001 G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01	999967	0,0001	0,02	0,0001
0,1	9966799	0,0099834	0,2	0,01
0,2	19737532	0,0397361	0,4	0,04
0,3	29131261	0,0886815	0,6	0,09
0,4	37994896	0,1559070	0,8	0,16
0,5	46211716	0.2402290	1,0	0,25
0,6	53704957	0,3402706	1,2	0,36
0,7	60436778	0,4545405	1,4	0,49
0,8	66403677	0,5815071	1,6	0,64
0,9	71629787	0,7196609	1,8	0,81
1,0	76159416	0.8675617	2,0	1,0
2,0	96402758	2,6500055	4,0	4,0
3,0	99505475	4,6186570	6,0	9,0
4,0	99932930	6,6143765	8,0	16,0
5,0	99990920	8,6137964	10,0	25,0
6,0	99998771	10,6137179	12.0	36,0
7,0	99999834	12,6137073	14,0	49.0
8,0	99999980	14,6137059	16,0	64,0
9,0	99999997	16,6137057	18,0	81,0
10,0 G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056 F	20,0 F	100,0 F

При повтореніи опыта шаръ опять падалъ въ продолженіе тѣхъ же 4 секундъ.

Вѣсъ шара въ пустотѣ есть $156\frac{13}{38}$ грана, и избытокъ его вѣса надъ вѣсомъ воды $79\frac{13}{38}$ гр., отсюда слѣдуетъ, что діаметръ этого шара равенъ 0,84224 дюйма.

Плотность воды относится къ плотности этого шара, какъ избытокъ его вѣса надъ вѣсомъ воды къ вѣсу самого шара, въ такомъ же отношеніи находятся и восемь третей діаметра шара (т.-е. 2,24597 дюйма) къ длинѣ $2F$, которая поэтому равна 4,4256 дюйма. Шаръ въ продолженіе одной секунды падая подъ дѣйствіемъ полнаго своего вѣса $156\frac{13}{38}$ грана въ пустотѣ проходитъ путь, равный $193\frac{1}{3}$ дюйма; подъ дѣйствіемъ силы въ 77 гранъ въ то же время, безъ сопротивленія, прошелъ бы въ водѣ 95,219 дюйма, въ продолженіе же времени G, которое составляетъ отъ одной секунды

такую же долю, какъ $\sqrt{F}$ отъ $\sqrt{95{,}219}$, т.-е. $\sqrt{\frac{2{,}2128}{95{,}219}}$ шаръ пройдетъ путь, равный 2,2128 и достигнетъ своей наибольшей возможной скорости въ водѣ. Слѣдовательно, время $G = 0{,}15244$ секунды. Въ продолженіе этого времени G, двигаясь съ своею наибольшею скоростью H, шаръ проходитъ путь $2F = 4{,}4256$ дюйма, слѣдовательно въ продолженіе четырехъ секундъ онъ прошелъ бы путь 116,1245 дюйма. Вычитая пространство $1{,}3862944F = 3{,}0676$ дюйма, получимъ въ остаткѣ 113,0569 дюйма, которые долженъ бы пройти шаръ въ четыре секунды, двигаясь въ водѣ, заключенной въ безграничномъ сосудѣ. Эту величину надо уменьшить въ виду узкости сосуда въ отношеніи, равномъ произведенію корня квадратнаго изъ отношенія площади сѣченія сосуда къ избытку этой площади надъ половиною площади большого круга шара на отношеніе площади того же сѣченія къ избытку ея надъ площадью большого круга шара, что составляетъ 1 : 0,9914. Сдѣлавъ это, получаемъ 112,08 дюйма, которыя и долженъ бы проходить шаръ, падая въ продолженіе четырехъ секундъ въ упомянутомъ деревянномъ сосудѣ, согласно теоріи. Прошелъ же онъ на самомъ дѣлѣ 112 дюймовъ при испытаніи.

Опытъ 2. Три равныхъ шара, вѣсъ каждаго изъ которыхъ былъ въ воздухѣ $76\frac{1}{3}$ грана и $5\frac{1}{16}$ грана въ водѣ пускались послѣдовательно; каждый изъ нихъ падалъ въ водѣ въ продолженіе пятнадцати секундъ, проходя путь въ 112 дюймовъ.

Производя разсчетъ, получаемъ: вѣсъ шара въ пустотѣ $76\frac{5}{12}$ грана, избытокъ этого вѣса надъ вѣсомъ въ водѣ $71\frac{17}{48}$ грана, діаметръ шара, 0,81296 дюйма, восемь третей этого діаметра 2,16789 дюйма, пространство $2F = 2{,}3217$ дюйма, пространство, проходимое шаромъ подъ дѣйствіемъ силы, равной его вѣсу въ водѣ, т.-е. $5\frac{1}{16}$ грана въ одну секунду безъ сопротивленія 12,808 дюйма и время $G = 0{,}301056$ секунды. Слѣдовательно, шаръ при наибольшей скорости, которую онъ можетъ имѣть въ водѣ, двигаясь подъ дѣйствіемъ своего кажущагося вѣса $5\frac{1}{16}$ грана въ продолженіе времени 0,301056 секунды пройдетъ путь 2,3217 дюйма, въ продолженіе же 15 секундъ путь 115,678 дюйма.

Вычитая величину $1{,}3862944F = 1{,}609$ дюйма, получаемъ въ остаткѣ 114,069 дюйма, которыя шаръ прошелъ бы въ 15 секундъ въ весьма широкомъ сосудѣ. Вслѣдствіе узкости сосуда надо вычесть около 0,895 дюйма, такимъ образомъ остается 113,174 дюйма, которыя шаръ долженъ бы пройти въ продолженіе 15 секундъ, согласно теоріи при паденіи въ разсматриваемомъ сосудѣ. Опытъ далъ 112 дюймовъ. Разница нечувствительная.

Опытъ 3. Три равныхъ шара, вѣса коихъ составляли въ воздухѣ 121 гранъ и въ водѣ 1 гранъ, пускались послѣдовательно, время ихъ паденія съ высоты 112 дюймовъ въ водѣ составило: 46 сек., 47 сек., 50 сек.

По теоріи эти шары должны были бы падать приблизительно въ 40 секундъ. Что они падали болѣе продолжительно, можетъ быть приписано: или меньшей величинѣ при медленныхъ движеніяхъ сопротивленія,

которое происходитъ отъ инерціи матеріи по сравненію съ сопротивленіемъ, происходящимъ отъ другихъ причинъ, или же прилипанію къ шарамъ нѣкоторыхъ пузырьковъ воздуха, или же расширенію воска отъ теплоты руки или погоды, или же незначительнымъ погрѣшностямъ взвѣшиванія шаровъ въ водѣ, а чему именно, я считаю неопредѣленнымъ. Такимъ образомъ вѣсъ шара въ водѣ долженъ составлять нѣсколько гранъ, чтобы опытъ могъ быть произведенъ съ увѣренностью и былъ бы достовѣрнымъ.

Опытъ 4. Я началъ производить предыдущіе опыты ранѣе, нежели я обладалъ теоріею изложенною въ предыдущихъ предложеніяхъ. Но затѣмъ для изслѣдованія найденной теоріи я изготовилъ деревянный сосудъ шириною внутри $8\frac{2}{3}$ дюймовъ и глубиною $15\frac{1}{3}$ фута, и сдѣлалъ изъ воска съ свинцомъ внутри три шара вѣсомъ по $139\frac{1}{4}$ грана въ воздухѣ и $7\frac{5}{8}$ грана въ водѣ. Я пускалъ ихъ падать въ водѣ, измѣряя время паденія помощью маятника, дѣлавшаго полусекундные размахи. Шары были холодными и сохранялись на холоду нѣкоторое время, какъ передъ взвѣшиваніемъ, такъ и передъ паденіемъ; тепло дѣлаетъ воскъ менѣе плотнымъ и, значитъ, уменьшаетъ его кажущійся вѣсъ въ водѣ, и этотъ менѣе плотный воскъ отъ холода не возвращается мгновенно къ первоначальной своей плотности. Прежде чѣмъ пустить шары падать, ихъ вполнѣ погружали въ воду, чтобы при началѣ движеніе ихъ не ускорялось дѣйствіемъ вѣса выступающихъ изъ воды частей, и когда они были вполнѣ погружены и находились въ покоѣ, то ихъ пускали самымъ осторожнымъ образомъ, чтобы не сообщить никакого толчка рукою, пускающею ихъ. Они падали соотвѣтственно въ продолженіе: $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 и 51 размаха маятника, проходя высоту въ 15 фут. 2 дюйма. Однако погода была нѣсколько холоднѣе, нежели при взвѣшиваніи шаровъ, поэтому я повторилъ испытаніе въ другой день, и время паденія шаровъ составило: $49\frac{1}{2}$, 50, 51, 53 размаха. При многократномъ повтореніи испытанія шары падали по большей части въ продолженіе времени $49\frac{1}{2}$ и 50 размаховъ маятника. Когда же ихъ паденіе было болѣе медленное, то я подозрѣваю, что они замедлялись отъ ударовъ о стѣнки сосуда.

Производя разсчетъ согласно теоріи, получаемъ: вѣсъ шара въ пустотѣ 139,67 грана, избытокъ этого вѣса надъ вѣсомъ въ водѣ 132,275 грана, діаметръ шара 0,99868 дюйма, восемь третей діаметра 2,66315 дюйма, пространство $2F = 2{,}8066$ дюйма. Пространство, проходимое шаромъ въ одну секунду, при паденіи безъ сопротивленія подъ дѣйствіемъ силы въ 7,125 грана 9,88164 дюйма и время $G = 0{,}376843$ секунды. Слѣдовательно, шаръ, двигаясь съ наибольшею скоростью, которую онъ только можетъ получить въ водѣ подъ дѣйствіемъ силы въ 7,125 грана, пройдетъ въ продолженіе 0,376843 секунды пространство равное 2,8066 дюйма, въ продолженіе же 1 секунды — пространство равное 7,44766 дюйма и въ 25 секундъ, т.-е. въ продолженіе времени 50 размаховъ, пространство равное 186,1915 дюйма.

Вычитая величину 1,386294F=1,9454 дюйма, получимъ въ остаткѣ 184,2461 дюйма, которые въ продолженіе этого времени шаръ прошелъ бы въ весьма широкомъ сосудѣ.

Вслѣдствіе узкости нашего сосуда, это пространство надо уменьшить въ отношеніи, которое получается если корень квадратный изъ отношенія площади сѣченія сосуда къ избытку этой площади надъ половиною площади большого круга шара умножить на отношеніе площади того же сѣченія къ избытку ея надъ площадью большого круга шара; тогда получится пространство равное 181,86 дюйма, которое по теоріи долженъ бы проходить шаръ въ нашемъ сосудѣ въ продолженіе 50 размаховъ. На самомъ же дѣлѣ при испытаніи онъ проходилъ 182 дюйма въ продолженіе 49,5 или 50 размаховъ.

Опытъ 5. Четыре шара вѣсомъ по $154\frac{3}{8}$ гр. въ воздухѣ и $21\frac{1}{2}$ гранъ въ водѣ падали при многократныхъ испытаніяхъ въ продолженіе: 28,5, 29, 29,5, 30 размаховъ, а иногда 31, 32 и 33, проходя пространство въ 15 футъ 2 дюйма.

По теоріи, время ихъ паденія должно бы приблизительно составлять 29 размаховъ.

Опытъ 6. Пять шаровъ вѣсомъ по $212\frac{3}{8}$ гр. въ воздухѣ и $79\frac{1}{2}$ гр. въ водѣ при нѣсколькихъ испытаніяхъ падали въ продолженіе: 15, 15,5, 16, 17 и 18 размаховъ, проходя ту же высоту 15 футъ 2 дюйма.

По теоріи время ихъ паденія должно бы составлять приблизительно 15 размаховъ.

Опытъ 7. Четыре шара вѣсомъ въ воздухѣ по $293\frac{3}{8}$ гр. и въ водѣ по $35\frac{7}{8}$ гр. при многихъ опусканіяхъ падали въ водѣ проходя путь 15 футъ 2 дюйма въ продолженіе: 29,5, 30, 30,5, 31, 32 и 33 размаховъ.

По теоріи время паденія ихъ должно бы составлять приблизительно 28 размаховъ.

Изслѣдуя причину, почему шары того же самаго вѣса и величины падаютъ одни быстрѣе, другіе медленнѣе, я напалъ на слѣдующее: когда шары пускаются и начинаютъ падать, то они поворачиваются около своихъ центровъ, причемъ опускается впередъ та сторона, которая тяжелѣе, вслѣдствіе чего происходитъ колебательное движеніе. При колебаніяхъ шаръ сообщаетъ водѣ, бо̀льшее количество движенія, нежели опускаясь безъ колебанія, и сообщая таковое, утрачиваетъ и часть того количества движенія, съ которымъ онъ долженъ бы опускаться; сообразно бо̀льшему или меньшему колебанію шаръ болѣе или менѣе замедляется. Кромѣ того, шаръ при этомъ получаетъ боковое движеніе въ сторону обратную опускающагося его бока, приближается къ стѣнкамъ сосуда и иногда даже о нихъ ударяется. Это колебаніе для тяжелыхъ шаровъ сильнѣе и для бо̀льшихъ въ бо̀льшей степени возмущаетъ воду. Поэтому, чтобы умень-

шить колебанія шаровъ, я сдѣлалъ изъ воску и свинца новые шары, помѣщая свинецъ съ одной стороны шара близъ поверхности его, и пускалъ шары такъ, чтобы при началѣ движенія болѣе тяжелая сторона была внизу, насколько это оказывалось возможнымъ. Такимъ образомъ, колебанія стали гораздо меньше, нежели прежде и время паденія шаровъ стало менѣе разнообразно, какъ то видно изъ слѣдующихъ испытаній.

Опытъ 8. Четыре шара, вѣсомъ въ воздухѣ по 139 гранъ и въ водѣ по 6,5 при многихъ опусканіяхъ падали въ продолженіи не болѣе 52 и не менѣе 50 размаховъ маятника, большею же частью въ продолженіе около 51, проходя путь въ 182 дюйма.

По теоріи время паденія должно бы составлять около 52 размаховъ.

Опытъ 9. Четыре шара вѣсомъ по 273,25 грана въ воздухѣ и по 140,75 въ водѣ, при многихъ опусканіяхъ падали въ продолженіе не болѣе какъ 13 размаховъ и не менѣе 12, проходя путь въ 182 дюйма.

По теоріи, эти шары должны были бы падать въ продолженіе времени, приблизительно $11\frac{1}{3}$ качаній.

Опытъ 10. Четыре шара, вѣсомъ по 384 грана въ воздухѣ и по 119,5 въ водѣ, при многихъ опусканіяхъ падали въ продолженіе: 17,75, 18, $18\frac{1}{2}$ и 19 размаховъ, проходя путь въ 181,5 дюйма, и когда время ихъ паденія составляло 19 размаховъ, то я иногда слышалъ ихъ удары о стѣнки сосуда, ранѣе нежели они достигали его дна.

По теоріи время ихъ паденія должно бы составлять, приблизительно, $15\frac{5}{9}$ размаховъ.

Опытъ 11. Три равныхъ шара вѣсомъ по 48 гранъ въ воздухѣ и по $3\frac{29}{32}$ въ водѣ, при многихъ опусканіяхъ падали въ продолженіе $43\frac{1}{2}$, 44, 44,5, 45 и 46 размаховъ, по большей части 44 и 45, проходя путь приблизительно въ 182,6 дюйма.

По теоріи время ихъ паденія должно бы составлять около $46\frac{5}{9}$ размаха.

Опытъ 12. Три равныхъ шара вѣсомъ по 141 гранъ въ воздухѣ и по $4\frac{3}{8}$ въ водѣ при многихъ опусканіяхъ падали въ продолженіе: 61, 62, 63, 64 и 65 размаховъ, проходя высоту въ 182 дюйма.

По теоріи время ихъ паденія должно бы составлять приблизительно 64,5 размаха.

Изъ этихъ опытовъ обнаруживается, что когда шары падаютъ медленно, какъ въ опытахъ: $2^{омъ}$, $4^{омъ}$, $5^{омъ}$, $8^{омъ}$, $11^{омъ}$ и $12^{омъ}$, времена паденія даются теоріей правильно; когда же шары падаютъ быстрѣе, какъ въ опытахъ: $6^{омъ}$, $9^{омъ}$ и $10^{омъ}$, то сопротивленіе растетъ нѣсколько быстрѣе, нежели въ отношеніи квадратовъ скорости. При паденіи шары немного колеблятся, это колебаніе для шаровъ болѣе легкихъ и падающихъ медленно вслѣдствіе слабости движенія быстро прекращается; для болѣе же

тяжелыхъ и большихъ, вслѣдствіе значительности движенія продолжается долѣе и прекращается окружающей водой лишь послѣ нѣсколькихъ колебаній. Кромѣ того, шары болѣе быстро движущіеся, испытываютъ меньшее давленіе на заднюю свою часть, и если скорость постоянно увеличивать, то, наконецъ, за ними образовалось бы пустое пространство, если только одновременно не увеличивалось бы и давленіе, подъ которымъ жидкость находится. Это давленіе на жидкость по предл. XXXII и XXXIII должно увеличиваться пропорціонально квадрату скорости, для того, чтобы и сопротивленіе слѣдовало такой же пропорціи. Такъ какъ это не имѣетъ мѣсто, то болѣе быстро движущіеся шары испытываютъ сзади нѣсколько меньшее давленіе и вслѣдствіе этого недостатка давленія ихъ сопротивленіе нѣсколько большее, нежели то, которое пропорціонально квадрату скорости.

Такимъ образомъ, теорія согласуется съ наблюдаемыми явленіями при паденіи тѣлъ въ водѣ; остается изслѣдовать явленія паденія тѣлъ въ воздухѣ.

Опытъ 13. Съ вершины собора Св. Павла въ Лондонѣ въ іюлѣ мѣсяцѣ 1710 года одновременно пускали падать два стеклянныхъ шара, одинъ наполненный ртутью, другой воздухомъ. При паденіи пройденная ими высота составляла 220 англійскихъ футъ. Деревянная доска была подвѣшана на петляхъ за одинъ изъ концовъ, другой же ея конецъ удерживался деревянной чекой; оба шара положенные на эту доску пускались одновременно, для чего выдергивали чеку помощью желѣзной проволоки, опущенной до земли, тогда доска удерживаясь лишь на желѣзныхъ петляхъ, поворачивалась, въ тотъ же самый моментъ времени натяженіемъ той же проволоки пускался маятникъ, дѣлавшій размахъ въ одну секунду. Діаметры шаровъ и времена ихъ паденія показаны въ слѣдующей таблицѣ:

Шары заполненные ртутью.			Шары заполненные воздухомъ.		
Вѣса.	Діаметры.	Времена паденія.	Вѣса.	Діаметръ.	Времена паденія.
Граны.	Дюймы.	Секунды.	Граны.	Дюймы.	Секунды.
908	0,8	4	510	5,1	$8\frac{1}{2}$
983	0,8	4(—)	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4(+)	515	5,0	$8\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	$8\frac{1}{2}$
784	0,75	4(+)	641	5,2	8

Наблюденныя времена требуютъ нѣкоторой поправки; шары, заполненные ртутью въ продолженіе четырехъ секундъ проходятъ (по теоріи *Галилея*) путь 257 англ. футъ, а 220 футъ въ 3 сек. 42 терціи. Слѣдовательно, деревянная доска не поворачивалась около своихъ петель такъ быстро, какъ было желательно, и вслѣдствіе такого замедленнаго поворота задерживала начало паденія шаровъ, ибо шары располагались на доскѣ близъ ея средины и даже немного ближе къ петлямъ нежели къ чекѣ. Такимъ образомъ времена паденія удлинялись приблизительно на 18 терцій и, значитъ, должны быть исправлены, вычитая эти терціи въ особенности для большихъ шаровъ, которые вслѣдствіе величины своего діаметра оставались нѣсколько далѣе на доскѣ при поворотѣ ея. Дѣлая эту поправку, получимъ слѣдующія времена паденія для большихъ шаровъ: $8''12'''$; $7''42'''$; $7''42'''$; $7''57'''$; $8''12'''$; $7''42'''$. Такимъ образомъ пятый изъ заполненныхъ воздухомъ шаровъ діаметромъ въ 5 дюймовъ и вѣсомъ 483 грана падалъ съ высоты въ 220 футъ въ продолженіе $8''12'''$. Вѣсъ воды въ объемѣ равномъ этому шару составляетъ 16600 гранъ, вѣсъ воздуха $\frac{16600}{860}$, т.-е. 19,3 грана, поэтому вѣсъ шара въ пустотѣ есть 502,3 грана; отношеніе этого вѣса къ вѣсу соотвѣтствующаго объема воздуха равно 502,3 : 19,3. Въ такомъ же отношеніи находится $2F$ къ восьми третямъ діаметра шара, т.-е. къ $13\frac{1}{3}$ дюймамъ. Отсюда слѣдуетъ, что $2F = 28$ футъ 11 дюймамъ. При паденіи въ пустотѣ подъ дѣйствіемъ полнаго своего вѣса 502,3 грана шаръ проходитъ въ первую секунду $193\frac{1}{3}$ дюйма, подъ дѣйствіемъ же силы 483 гр. пройдетъ 185,905 дюйма, путь же F равный 14 ф. 5,5 дюйм. при этой же силѣ и въ пустотѣ шаръ пройдетъ въ 57 сек. 58 терц. и пріобрѣтетъ ту наибольшую скорость, которой можетъ достичь въ воздухѣ. Съ этой скоростью шаръ въ 8 сек. 12 терц. пройдетъ путь въ 245 футъ $5\frac{1}{3}$ дюйм. Вычитая $1{,}3863F$, иначе 20 ф. $\frac{1}{2}$ дюйм., получимъ въ остаткѣ 225 ф. 5 дюйм. Это и есть то пространство, которое шаръ долженъ проходить согласно теоріи въ продолженіе 8 сек. 12 терц. при своемъ паденіи въ воздухѣ. По испытаніи же оказалось 220 футъ. Разница нечувствительная.

Дѣлая подобный же разсчетъ для прочихъ шаровъ, я составилъ слѣдующую таблицу (см. таблицу на стр. 415).

Опытъ 14. Въ іюлѣ мѣсяцѣ 1719 года Г. Дезагюлье (Desaguliers) произвелъ вновь подобныя испытанія, придавъ свинымъ пузырямъ шаровой видъ при помощи полой деревянной шаровой формы, въ которую помѣщались предварительно размоченные пузыри и раздувались воздухомъ, и послѣ просушки вынимались. Ихъ пускали затѣмъ падать съ вершины фонаря надъ куполомъ того же храма, именно съ высоты 272 фута, пуская въ тотъ же моментъ и свинцовый шаръ, вѣсъ котораго былъ около двухъ римскихъ фунтовъ. Одни наблюдатели, стоявшіе вверху храма,

Вѣса шаровъ.	Діаметры шаровъ.	Времена паденія съ высоты 220 ф.	Пространства проходимыя по теоріи.	Избытки.
510 гр.	5,1 дюйм.	8″ 12‴	226 ф. 11 дм.	6 ф. 11 дм.
642	5,2	7 42	230 9	10 9
599	5,1	7 42	237 10	7 10
515	5	7 57	224 5	4 5
483	5	8 12	225 5	5 5
641	5,2	7 42	230 7	10 7

откуда пускались шары, замѣчали полное время паденія, другіе же, стоявшіе внизу, замѣчали разность между временами паденія свинцоваго шара и пузыря. Времена замѣчались по маятникамъ, дѣлавшимъ полусекундные размахи. Одинъ изъ наблюдателей, стоявшихъ внизу, имѣлъ пружинный маятникъ, дѣлавшій четверть секундные размахи, у другого была машина иначе, но весьма тщательно устроенная, также съ маятникомъ, дѣлавшимъ четверть секундные размахи. Подобную же машину имѣлъ и одинъ изъ наблюдателей на верху храма. Всѣ эти инструменты были устроены такъ, что по желанію они или пускались въ ходъ или останавливались. Свинцовый шаръ падалъ приблизительно въ четыре съ четвертью секунды. Прилагая это время къ наблюденной разности временъ паденія получали полное время паденія пузыря.

Промежутки времени въ секундахъ, черезъ которые достигли земли пять пузырей послѣ свинцоваго шара были при первомъ рядѣ испытаній: $14\frac{3}{4}$, $12\frac{3}{4}$, $14\frac{5}{8}$, $17\frac{3}{4}$ и $16\frac{7}{8}$, при второмъ же рядѣ: $14\frac{1}{2}$, $14\frac{1}{4}$, 14, 19, $16\frac{3}{4}$, прибавляя $4\frac{1}{4}$ — время паденія свинцоваго шара, получимъ полныя времена паденія пузырей для перваго ряда: 19, 17, $18\frac{7}{8}$, 22 и $21\frac{1}{8}$ сек., для второго ряда: $18\frac{3}{4}$, $18\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{4}$, $23\frac{1}{4}$ и 21 сек. Наблюденныя же времена на вершинѣ храма были для перваго ряда: $19\frac{3}{8}$, $17\frac{1}{4}$, $18\frac{3}{4}$, $22\frac{1}{8}$, $21\frac{5}{8}$ и для второго: 19, $18\frac{5}{8}$, $18\frac{3}{8}$, 24 и $21\frac{1}{4}$. Пузыри не всегда падали прямо, а иногда отклонялись и колебались въ ту и другую сторону во время паденія. Вслѣдствіе этихъ боковыхъ движеній времена паденія увеличивались иногда на полъ-секунды, а иногда и на цѣлую секунду. Наиболѣе прямо падали при первомъ рядѣ испытаній пузыри второй и четвертый, при второмъ рядѣ — первый и третій. Пятый пузырь былъ шершавый, вслѣдствіе чего онъ нѣсколько замедлялся. Діаметры пузырей я вывелъ

изъ обмѣра ихъ окружностей помощью тонкой нити, обвиваемой дважды. Я сопоставилъ теорію и опытъ въ слѣдующей таблицѣ, принимая отношеніе плотности воздуха къ плотности дождевой воды равнымъ 1 : 860 и разсчитавъ длину пути, которую шары должны бы проходить въ продолженіе времени своего паденія.

Вѣса пузырей.	Діаметры.	Времена паденія съ высоты 272 футъ.	Пространства проходимыя по теоріи.		Разность между теор. и наблюд.	
128 гр.	5,28 дм.	19 сек.	271 ф.	11 дм.	— 0 ф.	1 дм.
156	5,19	17	272	$\frac{1}{2}$	+ 0	$\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272	7	+ 0	7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277	4	+ 5	4
$99\frac{7}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+10	0

Такимъ образомъ сопротивленіе движенію шаровъ какъ въ водѣ, такъ и въ воздухѣ представляется въ общемъ весьма правильно нашею теоріей, причемъ оно оказывается при одинаковыхъ скоростяхъ и размѣрахъ шаровъ пропорціональнымъ плотности жидкости.

Въ поученіи къ шестому отдѣлу этой книги показано опытами надъ маятниками, что сопротивленіе, испытываемое равными и двигающимися съ одинаковыми скоростями въ воздухѣ, водѣ и ртути шарами пропорціонально плотности жидкости. То же самое получено гораздо болѣе точно по опытамъ съ паденіемъ тѣлъ въ воздухѣ и въ водѣ, ибо маятникъ при каждомъ своемъ колебаніи возбуждаетъ въ жидкости движеніе, направленное на встрѣчу возвращающемуся маятнику; происходящее отъ этого сопротивленіе, а также и дѣйствующее на нить подвѣса увеличиваютъ сопротивленіе маятника, и оно получается больше, нежели по опытамъ съ паденіемъ тѣлъ.

Такъ, по опытамъ съ маятникомъ, изложеннымъ въ указанномъ поученіи, шаръ одинаковой плотности съ водою при проходѣ въ воздухѣ пути, равнаго своему полудіаметру, долженъ потерять $\frac{1}{3342}$ своего количества движенія. По теоріи же, изложенной въ седьмомъ отдѣлѣ, подтвержденной опытами съ паденіемъ тѣлъ, тотъ же шаръ при прохожденіи того же пути долженъ утратить $\frac{1}{4586}$ своего количества движенія предполагая, что плотность воздуха относится къ плотности воды, какъ 1 къ 860. Такимъ образомъ по опытамъ съ маятниками сопротивленіе получается больше (по указанной выше причинѣ) нежели по опытамъ съ паденіемъ тѣлъ въ отношеніи приблизительно 4 къ 3.

Такъ какъ сопротивленія маятниковъ, находящихся въ воздухѣ, водѣ и ртути отъ подобныхъ причинъ увеличиваются подобнымъ-же образомъ, то пропорціональность сопротивленій въ этихъ срединахъ обнаруживается съ достаточною точностью какъ по опытамъ надъ маятниками, такъ и надъ паденіемъ тѣлъ. Отсюда можно заключить, что сопротивленіе тѣлъ, испытываемое при движеніи въ какихъ-угодно жидкихъ срединахъ при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ пропорціонально плотности этихъ жидкостей.

Послѣ того какъ все это установлено, можно показать какую приблизительно часть своего количества движенія утрачиваетъ въ продолженіе заданнаго времени шаръ, пущенный двигаться въ какой-либо жидкости. Пусть D діаметръ шара, V его скорость при началѣ движенія, T время, въ продолженіе котораго шаръ проходитъ въ пустотѣ, двигаясь со скоростью, V путь, относящійся къ $\frac{8}{3}D$, какъ плотность шара къ плотности жидкости, тогда шаръ, будучи брошенъ въ этой жидкости, въ продолженіе какого-либо иного времени t утрачиваетъ отъ своей первоначальной скорости часть, равную $\frac{tV}{T+t}$, и остается скорость $\frac{TV}{T+t}$, проходитъ же онъ путь, который относится къ пути, проходимому въ пустотѣ при движеніи со скоростью V въ продолженіе того же времени t, какъ логариѳмъ числа $\frac{T+t}{T}$, умноженный на число 2,302585093 къ числу $\frac{t}{T}$, что показано въ сл. 7 пред. XXXV.

Для медленныхъ движеній сопротивленіе можетъ быть немного менѣе, такъ какъ шаровая форма тѣла болѣе приспособлена къ такому движенію, нежели цилиндръ, описанный около этого шара.

Для быстрыхъ движеній сопротивленіе можетъ быть немного болѣе, ибо упругость и давленіе на жидкость не увеличиваются въ отношеніи квадратовъ скоростей. Но здѣсь я не вхожу въ разсмотрѣніе этихъ подробностей.

Хотя бы воздухъ, вода, ртуть и подобныя имъ жидкости отъ раздѣленія ихъ частицъ до безконечности становились бы все болѣе и болѣе тонкими и образовали бы средины безконечно жидкія, всетаки они оказывали бы движущимся тѣламъ лишь немногимъ меньшее сопротивленіе. Ибо то сопротивленіе, о которомъ шло дѣло въ предыдущихъ предложеніяхъ, происходитъ отъ инерціи матеріи, инерція же вещества существенна для тѣлъ и всегда пропорціональна количеству вещества. Подраздѣленіемъ частицъ жидкости можетъ быть нѣсколько уменьшено сопротивленіе, происходящее отъ ея сцѣпленія и тренія частицъ, количество же вещества не уменьшается отъ раздѣленія частицъ его, при неизмѣнности же количества матеріи сохраняется и ея сила инерціи, которой пропорціонально разсматриваемое сопротивленіе. Чтобы уменьшилось это сопротивленіе, надо чтобы уменьшилось количество вещества въ томъ пространствѣ, черезъ

которое тѣло движется. Поэтому небесныя пространства, черезъ которыя планетные и кометные шары повсюду непрестанно движутся совершенно свободно и безъ всякаго замѣтнаго уменьшенія своего количества движенія, совершенно лишены какой-либо тѣлесной жидкости, за исключеніемъ, можетъ быть, чрезвычайно тонкихъ паровъ и пронизывающихъ эти пространства свѣтовыхъ лучей.

Брошенныя тѣла возбуждаютъ движеніе въ жидкости при своемъ прохожденіи; образующееся въ ней при этомъ количество движенія происходитъ отъ избытка давленія жидкости на переднія части этихъ тѣлъ надъ давленіемъ ея на заднія ихъ части и не можетъ быть для тончайшей жидкости меньше, нежели въ отношеніи ея плотности къ плотности воздуха, воды или ртути. Вмѣстѣ съ тѣмъ этотъ избытокъ давленія не только возбуждаетъ движеніе въ жидкости, но дѣйствуетъ и на брошенное тѣло, замедляя движеніе его: поэтому сопротивленіе во всякой средѣ пропорціонально количеству движенія, возбужденному движущимся тѣломъ въ средѣ, и не можетъ быть въ тончайшемъ эфирѣ меньше, нежели въ отношеніи плотности этого эфира къ плотности воздуха, воды или ртути, по сравненію съ сопрстивленіемъ этихъ жидкостей.

ОТДѢЛЪ VIII.

О движеніи распространяющемся черезъ жидкости.

Предложеніе XLI. Теорема XXXII.

Давленіе не распространяется черезъ жидкость прямолинейно, если только частицы жидкости не лежатъ на одной прямой.

Если частицы a, b, c, d, e (фиг. 177) расположены на одной прямой, то давленіе можетъ распространяться прямо отъ a къ e. Если же частица e будетъ дѣйствовать на косвенно лежащія частицы f и g косвенно, то эти частицы не иначе выдержатъ приложенное давленіе, какъ будучи поддерживаемы послѣдующими частицами h и k, и насколько онѣ ими поддерживаются, настолько же онѣ нажимаютъ и на эти поддерживающія частицы; эти послѣднія въ свою очередь не иначе выдержатъ давленіе, какъ при поддержкѣ дальнѣйшихъ частицъ l и m, на которыя онѣ давятъ, и такъ далѣе до безконечности. Слѣдовательно, давленіе какъ только оно достигнетъ до частицъ не лежащихъ на одной прямой, начнетъ уклоняться и распространяется косвенно до безконечности. Начавъ распространяться косвенно, если оно опять встрѣтитъ частицы не лежащія на одной прямой, оно вновь уклонится, и такъ это будетъ происходить всякій разъ, какъ только встрѣтятся частицы не лежащія на одной прямой.

Слѣдствіе. Если нѣкоторая часть давленія, распространяющагося по жидкости изъ заданной точки, будетъ задержана какимъ-либо препятствіемъ,

то остающаяся не задержанная препятствіемъ часть уклонится въ пространство, находящееся за препятствіемъ. Это можетъ быть доказано такъ: пусть изъ точки A (фиг. 178) распространяется давленіе по всѣмъ направленіямъ, притомъ, если это возможно, по прямымъ линіямъ, и пусть онѣ всѣ кромѣ той конической части APQ, которая проходитъ черезъ круговое отверстіе BC, задерживаются препятствіемъ $NBCK$, имѣющимъ отверстіе въ BC. Раздѣлимъ конусъ APQ поперечными плоскостями de, fg, hi на отсѣки; конусъ ABC, распространяя давленіе, дѣйствуетъ на ближайшій отсѣкъ $degf$ по поверхности de, этотъ отсѣкъ по поверхности fg дѣйствуетъ на слѣдующій $fghi$, который въ свою очередь дѣйствуетъ на третій и такъ далѣе до безконечности; по третьему закону движенія очевидно, что первый отсѣкъ $defg$ противодѣйствіемъ второго отсѣка $fghi$ нажимается по поверхности fg настолько же, насколько онъ самъ давитъ на этотъ второй, слѣдовательно отсѣкъ $degf$ сжимается между конусомъ Ade и отсѣкомъ $fhig$ съ двухъ сторонъ, поэтому (пр. XIX, сл. 6) онъ не можетъ сохранить своей формы, если только не будетъ сжиматься отовсюду съ одинаковою силою. Такимъ образомъ, вслѣдствіе дѣйствующаго на поверхности de и fg давленія онъ долженъ бы раздаваться по боковымъ поверхностямъ df и eg, и такъ какъ этотъ отсѣкъ не твердый, а вполнѣ жидкій, то онъ и сталъ бы по этой поверхности растекаться или расширяться, если бы не было окружающей жидкости, которая воспрепятствовала бы этому стремленію. Слѣдовательно, отъ своего стремленія растечься этотъ отсѣкъ оказываетъ по боковой поверхности df и eg такое же давленіе на окружающую жидкость какъ и на отсѣкъ $fghi$, и значитъ давленіе распространяется отъ боковъ df и eg въ области NO и KL съ неменьшимъ напряженіемъ, какъ отъ поверхности fg въ сторону PQ.

Предложеніе XLII. Теорема XXXIII.

Всякое движеніе, распространяющееся черезъ жидкость, отклоняется отъ прямого пути въ области занятыя неподвижной жидкостью.

Случай 1. Положимъ, что движеніе распространяется изъ точки A черезъ отверстіе BC (фиг. 178) и продолжаетъ идти, если это возможно, внутри коническаго пространства $BCQP$ по прямымъ линіямъ, расходящимся изъ точки A. Примемъ сперва, что это движеніе подобно волнамъ на стоячей водѣ и пусть de, fg, hi, kl и т. д. суть вершины послѣдовательныхъ волнъ, раздѣленныя другъ отъ друга промежуточными впадинами. Такъ какъ вода на вершинахъ волнъ выше, нежели въ тѣхъ областяхъ LK и NO, гдѣ она неподвижна, то она стекаетъ съ границъ вершинъ волнъ e, g, i, l и т. д., d, f, h, k и т. д., по направленію къ KL и NO и такъ какъ въ впадинахъ волнъ вода ниже, нежели въ областяхъ KL и NO, гдѣ она неподвижна, то она течетъ изъ этихъ областей въ впадины волнъ. Вслѣдствіе перваго изъ этихъ теченій вершины волнъ, вслѣдствіе второго—ихъ впа-

дины расширяются и распространяются въ сторону *KL* и *NO*. Такъ какъ движеніе волнъ отъ *A* къ *PQ* совершается постояннымъ стокомъ вершинъ въ ближайшія впадины, и слѣдовательно не быстрѣе соотвѣтствующей скорости паденія, то и паденіе воды по направленіямъ *KL* и *NO* должно совершаться съ такою же скоростью; слѣдовательно расширеніе волнъ по направленію къ *KL* и *NO* должно распространяться съ такою же скоростью, какъ и самихъ волнъ изъ *A* къ *PQ*, вслѣдствіе этого все пространство въ сторону къ *KL* и *NO* будетъ занято расширившимися волнами *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv* и т. д. Что дѣйствительно все происходитъ именно такъ, можетъ испытать всякій на стоячей водѣ.

Случай 2. Положимъ теперь, что *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* представляютъ распространяющіяся изъ точки *A* въ упругой средѣ біенія. Распространеніе біеній надо себѣ представлять какъ послѣдовательное сгущеніе и разрѣженіе среды, такъ что самая плотная часть какого-либо отдѣльнаго біенія занимаетъ сферическую поверхность, описанную изъ центра *A*, и между послѣдовательными біеніями заключаются равные промежутки. Пусть линіи *de*, *fg*, *hi*, *kl* и пр. обозначаютъ мѣста наибольшей плотности въ біеніяхъ, распространяющихся черезъ отверстіе *BC*. Такъ какъ среда здѣсь болѣе плотна нежели въ областяхъ, расположенныхъ отсюда въ сторону *KL* и *NO*, то эта среда будетъ расширяться какъ въ сторону этихъ областей, такъ и въ промежутки между наиболѣе плотными мѣстами біеній, поэтому среда, становясь постоянно болѣе рѣдкой въ промежуткахъ между біеніями и болѣе плотной въ мѣстахъ ихъ, способствуетъ ихъ движенію. Такъ какъ поступательное движеніе біеній происходитъ отъ постояннаго расширенія болѣе плотныхъ частей въ сторону предшествующихъ имъ менѣе плотныхъ промежутковъ, то біенія должны распространяться отъ этихъ плотныхъ мѣстъ и въ сторону покоющихся частей среды *KL* и *NO* приблизительно съ тою же самою скоростью, слѣдовательно біенія ширятся отовсюду въ области *KL* и *NO*, занятыя неподвижной средою приблизительно съ тою же скоростью, съ какою они распространяются прямо отъ центра *A*, и, значитъ, они заполнятъ все пространство *KLNO*. Мы это испытываемъ въ звукѣ, который слышенъ и за горою; проникнувъ въ комнату черезъ окно звукъ распространяется по всей комнатѣ, такъ что слышенъ и въ каждомъ углу ея не черезъ отраженіе отъ противоположныхъ стѣнъ, а распространяясь непосредственно отъ окна, поскольку объ этомъ можно судить по ощущенію.

Случай 3. Положимъ, наконецъ, что изъ *A* распространяется черезъ отверстіе *CB* движеніе какого бы то ни было рода; такъ какъ это распространеніе совершается не иначе, какъ поскольку части среды, ближайшія къ центру *A* напираютъ и приводятъ въ движеніе дальше расположенныя части ея, то части подвергающіяся напору, будучи жидкими, отступаютъ во всѣ тѣ стороны, откуда онѣ подвергаются меньшему давленію, т.-е. въ сторону всѣхъ покоющихся частей среды, какъ боковыхъ *KL* и *NO*, такъ и впереди лежащихъ *PQ*; вслѣдствіе этого всякое движеніе какъ только

оно проникнетъ черезъ отверстіе *BC*, начинаетъ шириться и распространяется поэтому отъ своего начала и центра во всѣ стороны непосредственно.

Предложеніе XLIII. Теорема XXXIV.

Всякое дрожащее тѣло распространяетъ въ упругой средѣ колебательное движеніе расходящееся во всѣ стороны прямолинейно, въ средѣ же неупругой возбуждаетъ замкнутое круговое движеніе.

Случай 1. Вслѣдствіе своихъ попеременныхъ перемѣщеній взадъ и впередъ части дрожащаго тѣла при ходѣ въ одну сторону напираютъ на ближайшія части среды, приводятъ ихъ въ движеніе, сжимаютъ и уплотняютъ; затѣмъ при обратномъ ходѣ предоставляютъ этимъ смѣщеннымъ и сжатымъ частямъ среды свободу возвращаться и расширяться. Слѣдовательно, части среды ближайшія къ дрожащему тѣлу колеблются поочередно взадъ и впередъ подобно частямъ самого тѣла, и, какъ части тѣла возмущали эти части среды, такъ и онѣ, совершая подобныя же дрожанія, возмущаютъ смежныя съ ними части, которыя въ свою очередь возмущаютъ слѣдующія и такъ до безконечности. Подобно тому, какъ первыя части среды при ходѣ впередъ сгущались и при ходѣ назадъ расширялись, такъ и прочія части при ходѣ впередъ будутъ уплотняться, при ходѣ назадъ расширяться. Вслѣдствіе этого не всѣ части среды идутъ совмѣстно впередъ и совмѣстно же возвращаются назадъ (въ такомъ случаѣ онѣ сохраняли бы неизмѣнными взаимныя разстоянія и значитъ не сгущались бы и не расширялись бы по-очередно), а приближаясь взаимно тамъ, гдѣ происходятъ сгущенія и удаляясь тамъ, гдѣ происходятъ расширенія, однѣ изъ нихъ идутъ впередъ, другія назадъ, колеблясь такимъ образомъ до безконечности. Части, идущія впередъ, которыя при этомъ ходѣ сгущены, въ поступательномъ своемъ движеніи ударяютъ о препятствія я образуютъ сотрясенія; поэтому послѣдовательныя сотрясенія распространяются прямолинейно отъ дрожащаго тѣла, сохраняя равныя другъ отъ друга разстоянія, вслѣдствіе равенства тѣхъ промежутковъ времени, черезъ которые дрожащее тѣло каждымъ отдѣльнымъ своимъ размахомъ возбуждаетъ отдѣльное сотрясеніе. Хотя части дрожащаго тѣла совершаютъ свой ходъ взадъ и впередъ по нѣкоторому извѣстному и опредѣленному направленію, тѣмъ не менѣе сотрясенія распространяющіяся въ средѣ расходятся во всѣ стороны согласно предыдущему предложенію и распространяются всюду отъ дрожащаго тѣла какъ общаго центра по концентрическимъ сферическимъ поверхностямъ. Примѣромъ этого можетъ служить распространеніе волнъ по поверхности воды,—если ихъ возбуждать колебаніями пальца онѣ идутъ не только по направленію движенія пальца, но окружаютъ палецъ концентрическими кругами и расходятся во всѣ стороны, ибо сила тяжести замѣняетъ въ этомъ случаѣ силу упругости.

Случай 2. Если же среда не упругая, то ея части не могутъ уплот-

няться отъ давленій производимыхъ на нихъ колеблющимися частями дрожащаго тѣла, движеніе распространяется мгновенно до тѣхъ областей среды, гдѣ она легче всего движенію уступаетъ, т.-е. къ тѣмъ частямъ ея, которыя въ началѣ оставляются дрожащимъ тѣломъ свободными. Таковъ случай паденія тѣла брошеннаго какъ бы то ни было въ средѣ. Среда, уступая брошенному тѣлу, не расходится до безконечности, но круговымъ образомъ переходитъ въ пространство только-что оставленное тѣломъ. Слѣдовательно, всякій разъ какъ дрожащее тѣло идетъ въ какую-либо сторону, среда уступая ему, переходитъ круговымъ движеніемъ туда, откуда тѣло ушло, и когда тѣло возвратится въ свое первоначальное положеніе, то и среда будетъ вновь вытолкнута и вернется въ свое первоначальное мѣсто. Такъ какъ дрожащее тѣло не можетъ быть вполнѣ твердымъ, но должно быть нѣсколько гибкимъ, сохраняя при этомъ свою величину, то оно не иначе можетъ при своихъ дрожаніяхъ напирать гдѣ-либо на среду, какъ одновременно уступая ей въ другомъ мѣстѣ, поэтому и происходитъ, что среда отступая въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ на нее производится напоръ, переходитъ круговымъ образомъ къ тѣмъ мѣстамъ, гдѣ ей уступаютъ.

Слѣдствіе. Слѣдовательно, заблуждаются тѣ, кто полагаетъ, что колебанія частей пламени приводятъ къ заключенію о прямолинейномъ распространеніи давленія въ окружающей средѣ. Заключеніе о такого рода давленіи должно выводить не по колебаніямъ однѣхъ только частей пламени, а по общему расширенію всей среды.

Предложеніе XLIV. Теорема XXXV.

Пусть въ трубѣ съ поднятыми вверхъ колѣнами KL, MN вода поочередно, то поднимается, то опускается; если устроить маятникъ, длина котораго между точкою подвѣса и центромъ качаній равна половинѣ полной длины водяного столба, то я утверждаю, что вода поднимается и опускается въ такіе же промежутки времени, въ какіе маятникъ дѣлаетъ свои размахи.

Полную длину водяного столба я измѣряю по оси трубы и колѣнъ, такъ что она равна суммѣ длинъ осей ихъ, и я здѣсь не разсматриваю сопротивленія воды отъ тренія ея о стѣнки трубы. Пусть AB, CD (фиг. 179) представляютъ средній уровень воды въ обоихъ колѣнахъ; когда вода поднимется въ колѣнѣ KL до уровня EF, она опустится въ колѣнѣ MN до уровня GH. Пусть P есть тѣло маятника, VP нить, V точка подвѣса, $RPQS$ циклоида описываемая маятникомъ, P низшая ея точка, PQ дуга равная высотѣ AE.

Сила, которою поочередно ускоряется и замедляется движеніе воды, равна избытку вѣса воды находящейся въ одномъ колѣнѣ надъ вѣсомъ ея въ другомъ, такъ что, когда вода въ колѣнѣ KL поднялась до EF, въ колѣнѣ же MN опустилась до GH, сила эта равна удвоенному вѣсу объема

воды $EABF$ и, значитъ, относится къ вѣсу всей воды какъ AE къ VP иначе какъ PQ къ PR.

Но сила, которою тѣло P ускоряется или замедляется въ любомъ мѣстѣ Q циклоиды (по сл. пред. LI) относится къ полному вѣсу этого тѣла, какъ разстояніе его PQ до низшей точки P относится къ длинѣ циклоиды PR. Вслѣдствіе этого, когда вода и маятникъ описали равныя пространства AE и PQ, движущія силы на нихъ дѣйствующія пропорціональны вѣсамъ приводимымъ въ движеніе, поэтому, если вода и маятникъ находились въ началѣ въ покоѣ, эти силы будутъ сообщать имъ въ равныя времена, равныя перемѣщенія и будутъ ихъ заставлять двигаться взадъ и впередъ совмѣстно.

Слѣдствіе 1. Слѣдовательно, восходящія и нисходящія колебанія воды имѣютъ одинаковую продолжительность независимо отъ того сильнѣе онп или слабѣе.

Слѣдствіе 2. Если полная длина столба воды составляетъ $6\frac{1}{9}$ парижскаго фута, то вода будетъ опускаться въ продоженіе одной секунды и въ продолженіе второй секунды подниматься, двигаясь такимъ образомъ поочередно до безконечности, ибо маятникъ длиною въ $3\frac{1}{18}$ фута совершаетъ размахи въ одну секунду.

Слѣдствіе 3. При увеличеніи или уменьшеніи длины столба воды, время колебаній ея увеличивается или уменьшается пропорціонально корню квадратному изъ длины столба.

Предложеніе XLV. Теорема XXXVI.

Скорость волнъ пропорціональна корню квадратному изъ длины ихъ.

Явствуетъ изъ построенія слѣдующаго предложенія.

Предложеніе XLVI. Задача X.

Найти скорость волнъ.

Если устроить маятникъ, длина котораго между точкою подвѣса и центромъ качанія равна длинѣ волны, тогда въ то время, какъ маятникъ совершаетъ свой каждый отдѣльный размахъ, волны пробѣгутъ путь приблизительно равный длинѣ ихъ. Длиною волнъ называется поперечное разстояніе между двумя послѣдовательными ихъ подошвами или двумя вершинами [171]). Такъ если $ABCDEF$ (фиг. 180) представляетъ поверхность стоячей воды, по которой бѣгутъ поднимаясь и опускаясь послѣдовательныя волны, то A, C, E, . . . суть вершины волнъ, B, D, F, . . . лежащія между ними подошвы. Движеніе волнъ совершается послѣдователь-

---

[171]) Ньютонъ называетъ это разстояніе «шириною волны», въ переводѣ принятъ теперешній терминъ.

нымъ подъемомъ и опусканіемъ воды, такъ, что тѣ части ея A, C, E, ... которыя въ одно время составляли вершины волнъ въ слѣдующее будутъ подошвами, движущая же сила, вслѣдствіе которой вершины опускаются, а подошвы поднимаются, есть вѣсъ поднятой воды, поэтому, вышеупомянутое послѣдовательное ея поднятіе и опусканіе подобно движенію воды въ колѣнчатой трубѣ и слѣдуетъ тѣмъ же законамъ. Вслѣдствіе этого (по пред. XLIV) если разстояніе между вершинами A, C, E ... или подошвами B, D, F, будутъ равны удвоенной длинѣ маятника, то въ продолженіе одного его размаха вершины станутъ подошвами и въ продолженіе слѣдующаго размаха вновь поднимутся. Слѣдовательно, промежутки времени между прохожденіями отдѣльныхъ волнъ равны времени двухъ размаховъ маятника, т.-е. волна проходитъ путь равный своей длинѣ за время двухъ размаховъ этого маятника, но въ такое время совершаетъ одинъ размахъ маятникъ вчетверо большей длины, т.-е. такой, коего длина равна длинѣ волны.

Слѣдствіе 1. Слѣдовательно, волны длиною по $3\frac{1}{18}$ парижскаго фута проходятъ длину свою въ одну секунду, т.-е. въ одну минуту пробѣгаютъ $183\frac{1}{3}$ фута и около 11000 футъ въ часъ.

Слѣдствіе 2. Скорость волнъ большей или меньшей длины больше или меньше этой въ отношеніи корней квадратныхъ изъ ихъ длины.

Все происходитъ такимъ образомъ при предположеніи, что частицы воды поднимаются и опускаются по отвѣснымъ прямымъ линіямъ, но ихъ движеніе вверхъ и внизъ на самомъ дѣлѣ происходитъ не по прямой, а вѣрнѣе по кругу [172]), поэтому я утверждаю, что время дается этимъ предложеніемъ лишь приближенно.

Предложеніе XLVII. Теорема XXXVII.

Когда по жидкости распространяются сотрясенія, то отдѣльныя ея частицы, совершая взадъ и впередъ весьма малыя колебанія, ускоряются и замедляются по закону каченія маятника.

Пусть AB, BC, CD и т. д. (фиг. 181) представляютъ разстоянія между послѣдовательными трясеніями, ABC направленіе ихъ бѣга при распространеніи отъ A къ B; E, F, G три физическія точки покоющейся среды, расположенныя на прямой AC на равныхъ другъ отъ друга разстояніяхъ: Ee, Ff, Gg равныя между собою весьма малыя пространства, проходимыя этими точками при ихъ колебаніяхъ взадъ и впередъ, ε, φ, γ

---

[172]) Теорію волнъ, предполагая что частицы описываютъ круги, далъ Ранкинъ, изложивъ ее чисто геометрически подобно тому какъ изложены всѣ предложенія въ «Началахъ» Ньютона. Эту теорію можно найти или въ Philosophical Transactions за 1863 годъ, или въ собраніи сочиненій Ранкина, или же въ курсахъ теоріи корабля.

нѣкоторыя промежуточныя между этими точками мѣста, EF, FG физическіе отрѣзочки, т.-е. линейныя части среды, расположенныя между этими точками, перемѣщающіяся послѣдовательно въ мѣста $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ и ef, fg. Проводимъ прямую PS равную Ee, раздѣливъ ее пополамъ въ точкѣ описываемъ радіусомъ OP кругъ $SJPi$. Пусть полною длиною окружности этого круга представляется полное время одного колебанія и частями ея пропорціональныя его доли, тогда по прошествіи времени PH или $PHSh$ положеніе частицы E получится въ ε, если взять $E\varepsilon = PL$ или $E\varepsilon = Pl$, причемъ точки L и l суть основанія перпендикуляровъ опущенныхъ изъ H или h на діаметръ PS. Двигаясь по такому закону, любая точка E, идя изъ E черезъ ε въ e, и возвращаясь затѣмъ изъ e черезъ ε въ E, совершаетъ отдѣльныя свои колебанія, обладая такими же ускореніями и замедленіями, какъ и качающійся маятникъ.

Надо доказать, что всякая отдѣльная физическая точка среды должна колебаться двигаясь вышеуказаннымъ образомъ. Вообразимъ поэтому, что среда вслѣдствіе какой бы то ни было причины обладаетъ такимъ движеніемъ и разсмотримъ, что отсюда слѣдуетъ.

Возьмемъ на окружности $PHSh$ равныя дуги HJ, JK или hi, ik находящіяся къ полной окружности въ томъ же отношеніи, какъ равныя длины EF, FG къ разстоянію между біеніями BC. Опустимъ перпендикуляры JM, KN и im, kn; точки E, F, G начинаютъ свои одинаковыя движенія, послѣдовательно одна за другою, полныя же свои колебанія, состоящія изъ хода впередъ и возвращенія обратно, совершаютъ въ такое время, въ продолженіе котораго біеніе пробѣгаетъ отъ B до C, поэтому, если PH или $PHSh$ представляетъ время, протекшее отъ начала движенія точки E, то PJ или $PHSi$ будетъ представлять время, протекшее отъ начала движенія точки F, и PK или $PHSk$ — время отъ начала движенія точки G, такъ что при ходѣ точекъ впередъ будутъ соотвѣтственно:

$$E\varepsilon = PL; \quad F\varphi = PM; \quad G\gamma = PN$$

и при возвращеніи назадъ будетъ:

$$E\varepsilon = Pl; \quad F\varphi = Pm; \quad G\gamma = Pn.$$

Отсюда слѣдуетъ, что длина $\varepsilon\gamma$ или $EG + G\gamma - E\varepsilon$ при ходѣ точекъ впередъ равна $EG - LN$, при возвращеніи же назадъ равна $EG + ln$. Но $\varepsilon\gamma$ есть длина или протяженіе части среды EG, когда она находится въ положеніи $\varepsilon\gamma$, поэтому длина этой части при ходѣ впередъ относится къ средней ея длинѣ какъ $(EG - LN) : EG$; при возвращеніи же назадъ, какъ $(EG + ln) : EG$ или, что то же, какъ $(EG + LN) : EG$. Но такъ какъ

$$LN : KH = JM : OP$$

и

$$KH : EG = \text{окр.}\, PHShP : BC,$$

то обозначая черезъ V радіусъ круга, длина окружности котораго равна BC, будемъ имѣть:

$$KH:EG=OP:V$$

и слѣдовательно

$$LN:EG=JM:V.$$

Такимъ образомъ, при ходѣ впередъ, протяженіе части EG, когда она находится въ положеніи $\varepsilon\gamma$, относится къ ея среднему протяженію, которое она имѣетъ при своемъ первоначальномъ положеніи, EG какъ $(V-JM):V$ и при ходѣ назадъ какъ $(V+im):V$. Поэтому, сила упругости точки F при положеніи въ φ въ мѣстѣ $\varepsilon\gamma$ при ходѣ впередъ относится къ средней величинѣ этой силы въ мѣстѣ EG какъ $\frac{1}{V-JM}:\frac{1}{V}$ и при возвращеніи назадъ какъ $\frac{1}{V+im}:\frac{1}{V}$. На основаніи такого же разсужденія получимъ, что упругія силы физическихъ точекъ E и G при ходѣ впередъ относятся къ средней своей величинѣ какъ $\frac{1}{V-HL}:\frac{1}{V}$ и какъ $\frac{1}{V-KN}:\frac{1}{V}$; разность этихъ силъ относится къ той же средней величинѣ силы упругости среды какъ:

$$\frac{HL-KN}{(V-HL).(V-KN)}:\frac{1}{V}$$

т.-е. какъ

$$\frac{HL-KN}{V^2}:\frac{1}{V}=\frac{HL-KN}{V}$$

если, вслѣдствіе весьма малыхъ предѣловъ колебаній принять, что HL и KN безконечно малы по сравненію съ V.

Такъ какъ величина V постоянная, то разность силъ пропорціональна $HL-KN$, т.-е. длинѣ OM, ибо:

$$(HL-KN):HK=OM:OJ=OM:OP$$

длины же HK и OP постоянныя, значитъ эта разность пропорціональна также длинъ $\Omega\varphi$, причемъ Ω есть середина Ff. На основаніи такого же разсужденія будемъ имѣть, что и при обратномъ ходѣ разность упругихъ силъ физическихъ точекъ ε и γ, т.-е. сила дѣйствующая на физическій отрѣзочекъ $\varepsilon\gamma$, пропорціональна $\Omega\varphi$. Но эта разность (т.-е. избытокъ упругой силы точки ε надъ упругою силою точки γ) есть та сила, которою физическій отрѣзочекъ $\varepsilon\gamma$ ускоряется при ходѣ впередъ и замедляется при ходѣ назадъ, поэтому ускоряющая сила физическаго отрѣзочка $\varepsilon\gamma$, пропорціональна его разстоянію отъ мѣста середины его колебаній Ω. Вслѣдствіе этого (по предл. XXXVIII, кн. 1ой), время правильно представляется дугою PJ, и линейный отрѣзочекъ среды $\varepsilon\gamma$ будетъ двигаться по указанному

закону, т.-е. по закону колебаній маятника. То же самое относится и до всѣхъ линейныхъ отрѣзочковъ, изъ которыхъ и составляется среда [173]).

[173]) Лагранжъ въ § 5 своей статьи: Sur la manière de rectifier deux endroits des Principes de Newton, изложивъ вольнымъ переводомъ предложенія XLVII и XLIX, говоритъ: «такова данная Ньютономъ теорія распространенія звука, эта теорія одними почиталась за непонятную (inintelligible), другіе находятъ ее противорѣчивой, въ сущности же если она и обладаетъ какимъ недостаткомъ, то тѣмъ, что она слишкомъ частная, но вмѣстѣ съ тѣмъ она содержитъ зачатокъ истинной теоріи, открытой лишь въ послѣднее время при помощи Анализа». Лагранжъ показываетъ далѣе, что разсужденія Ньютона сохраняютъ силу и въ томъ случаѣ, когда кругъ $PHShP$, которымъ Ньютонъ пользуется для представленія закона колебательнаго движенія частицъ, будетъ замѣненъ и какою-угодно другою кривою, иными словами, когда частица совершаетъ не простыя синусоидальныя колебанія, а какія-угодно.

Разсужденіе Ньютона и здѣсь, какъ и въ другихъ мѣстахъ «Началъ», становится гораздо легче прослѣдить, если выразить формулами то, что имъ выражено и представлено геометрически.

Обозначимъ черезъ λ длину $AB=BC=CD$, называемую Ньютономъ «разстояніемъ между послѣдовательными сотрясеніями или біеніями» (pulsuum successivorum distantiae), примемъ какую-либо точку Q прямой AD за начало абсциссъ x, и пусть будетъ $x_0=QF$ абсцисса точки F при покоѣ, разстояніе QE обозначимъ черезъ $x_0=\xi_1$ и разстояніе QG черезъ $x_0+\xi_1$; амплитуду колебаній частицы, т.-е. длину ΩF равную OP обозначимъ черезъ r и фазу ея, т.-е. уголъ POJ въ моментъ времени t черезъ θ.

Прежде всего надо составить аналитическое выраженіе фазы θ въ зависимости отъ времени t и абсциссы x.

Это выраженіе слѣдуетъ изъ начальныхъ словъ Ньютонова доказательства, въ самомъ дѣлѣ длина окружности $PHSh$ равна $2\pi r$, длина дуги HJ опредѣляется пропорціей

$$HJ : 2\pi r = EF : BC = \xi_1 : \lambda$$

значитъ будетъ:

$$HJ = \frac{2\pi r}{\lambda}\xi_1.$$

Но такъ какъ JHO есть приращеніе фазы, соотвѣтствующее приращенію $(-\xi_1)$ абсциссы, то будетъ

$$JOH = -\frac{\partial\theta}{\partial x}\xi_1 = \frac{HJ}{r} = \frac{2\pi}{\lambda}\xi_1$$

и значитъ:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{2\pi}{\lambda}$$

и

$$\theta = T - \frac{2\pi}{\lambda}(x - x_0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

гдѣ T есть функція только времени t.

Обозначая черезъ t_0 моментъ начала движенія точки F, на основаніи оговореннаго условія: «длиною окружности $PHShP$ и частями ея представляется полное время одного колебанія и пропорціональныя части его», видимъ, что

Слѣдствіе. Отсюда слѣдуетъ, что число распространяющихся сотрясеній то же самое, какъ и число колебаній дрожащаго тѣла, ибо они не

$$T = \frac{2\pi}{\tau} : (t - t_0)$$

причемъ черезъ τ обозначено сказанное полное время одного колебанія.

Итакъ:

$$\theta = 2\pi \left[\frac{t - t_0}{\tau} - \frac{x - x_0}{\lambda} \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Какъ уже указано для точки F абсцисса $x = x_0$, для точки E абсцисса $x_1 = x - \xi_1$ и для точки G абсцисса $x_2 = x_0 + \xi_1$, слѣдовательно соотвѣтствующія фазы:

$$\theta_0 = 2\pi \frac{t - t_0}{\tau}, \quad \theta_1 = 2\pi \left[\frac{t - t_0}{\tau} + \frac{\xi_1}{\lambda} \right], \quad \theta_2 = 2\pi \left[\frac{t - t_0}{\tau} - \frac{\xi_1}{\lambda} \right].$$

Перемѣщенія этихъ точекъ суть:

$$F\varphi = u_0 = r(1 - \cos\theta_0); \quad E\varepsilon = u_1 = r(1 - \cos\theta_1); \quad G\gamma = u_2 = r(1 - \cos\theta_2).$$

Такимъ образомъ въ моментъ t протяженіе или длина $\varepsilon\gamma$ частицы коей первоначальная длина была EG, будетъ:

$$\varepsilon\gamma = (x_0 + \xi_1 + u_2) - (x_0 - \xi_1 + u_1) = 2\xi_1 - (u_1 - u_2) = EG - LN.$$

Но

$$LN = u_1 - u_2 = r[\cos\theta_2 - \cos\theta_1] = 2r \,.\, \frac{2\pi\xi_1}{\lambda} \,.\, \sin 2\pi \frac{t - t_0}{\tau}$$

ибо величина ξ_1 предполагается весьма малой по сравненію съ λ; слѣдовательно отношеніе протяженія частицы EG, когда ея середина F занимаетъ положеніе φ къ ея длинѣ EG при покоѣ, обозначая черезъ V длину $\frac{\lambda}{2\pi}$, будетъ:

$$\frac{EG - LN}{EG} = 1 - \frac{2\pi r}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t - t_0}{\tau} = \frac{V - JM}{V} \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Такъ какъ упругость среды предполагается пропорціональной ея плотности ρ_0, плотность же физической частицы EG будетъ обратно пропорціональна ея протяженію, ибо площадь σ поперечнаго сѣченія этой частицы предполагается неизмѣнной; поэтому сила упругости иначе давленія на площадку σ, когда эта площадка, проведенная черезъ точку F, вмѣстѣ съ нею находится въ положеніи φ, будетъ выражаться формулою

$$p_0 \frac{V}{V - JM} \cdot \sigma,$$

гдѣ p_0 есть начальное давленіе при покоѣ среды. Точно также сила упругости, дѣйствующая на такую же площадку σ для точки γ будетъ:

$$p_0 \frac{V}{V - HL} \cdot \sigma,$$

и для точки ε эта сила будетъ:

$$p_0 \frac{V}{V - KN} \sigma.$$

Разность этихъ двухъ послѣднихъ величинъ представитъ полную силу,

умножаются при распространеніи,—физическій отрѣзочекъ $\varepsilon\gamma$ какъ только возвратится въ первоначальное свое положеніе, то и остается въ покоѣ и не иначе придетъ въ движеніе, какъ или отъ натиска дрожащаго тѣла или же отъ натиска распространяемыхъ этимъ тѣломъ сотрясеній. Поэтому онъ будетъ оставаться въ покоѣ, какъ только сотрясенія перестанутъ распространяться дрожащимъ тѣломъ.

Предложеніе XLVIII. Теорема XXXVIII.

Скорости распространяющихся въ упругихъ жидкостяхъ сотрясеній находятся въ прямомъ отношеніи корней квадратныхъ силъ упругости жидкостей и въ обратномъ отношеніи корней квадратныхъ ихъ плотностей, причемъ предполагается, что сила упругости жидкости пропорціональна сгущенію ея.

Случай 1. Если обѣ среды однородныя и разстоянія между трясеніями въ обѣихъ срединахъ одинаковыя, но движеніе въ одной болѣе сильное, нежели въ другой, то сжатія и расширенія подобныхъ частицъ будутъ

дѣйствующую на разсматриваемую частицу по направленію отъ A къ D. Масса частицы получится умноживъ ея начальный объемъ $2\xi_1\sigma$ на плотность ρ_0 и будетъ $2\rho_0\xi_1\sigma$.

По малости величинъ HL и KN по сравненію съ V вышеупомянутую разность, т.-е. дѣйствующую силу можно написать такъ

$$k \,.\, \frac{HL - KN}{V} \,.\, \sigma.$$

Но по малости величины ξ_1 по сравненію съ λ будетъ:

$$HL - KN = r\sin 2\pi\left[\frac{t-t_0}{\tau} + \frac{\xi_1}{\lambda}\right] - r\sin 2\pi\left[\frac{t-t_0}{\tau} - \frac{\xi_1}{\lambda}\right] =$$
$$= 2r \,.\, \frac{2\pi\xi_1}{\lambda} \,.\, \cos 2\pi\,\frac{t-t_0}{\tau}$$

и, слѣдовательно, дѣйствующая сила:

$$p_0\,\frac{HL - KN}{V} \,.\, \sigma = 2\xi_1\sigma \,.\, \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \,.\, p_0 \,.\, r\cos 2\pi\,\frac{t-t_0}{\tau} =$$
$$= 2\xi_1 \,.\, \sigma \,.\, \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \,.\, p_0(r - u_0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

и, слѣдовательно, ускореніе w частицы будетъ:

$$w = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \,.\, \frac{p_0}{\rho_0}\,(r - u_0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

т.-е. это ускореніе пропорціонально разстоянію $r - u_0$ частицы до точки Ω, представляющей центръ ея колебаній и направлено къ этой точкѣ; слѣдовательно частица совершаетъ простыя синусоидальныя колебанія, или по терминологіи Ньютона колеблется по закону циклоидальнаго маятника.

относиться между собою какъ количества движенія ихъ. Это предложеніе не вполнѣ точно, но если сжатія и расширенія не слишкомъ велики, погрѣшность не чувствительна, и значитъ предложеніе можетъ быть принимаемо физически за точное. Движущія упругія силы пропорціональны сжатіямъ и расширеніямъ, скорости же равныхъ частицъ производимыя въ одинаковыя времена пропорціональны силамъ; поэтому равныя и соотвѣтствующія частицы жидкости, по которой распространяются сотрясенія, при своихъ колебаніяхъ взадъ и впередъ проходятъ пропорціональныя сжатіямъ и расширеніямъ пространства со скоростями пропорціональными этимъ пространствамъ, слѣдовательно, въ одинаковое время; поэтому сотрясенія, пробѣгаютъ при своемъ распространеніи въ продолженіе постояннаго времени одного полнаго колебанія частицы путь равный разстоянію между соотвѣтствующими частицами, такъ что каждое сотрясеніе приходитъ на мѣсто, занимавшееся ближайшимъ ему предшествующимъ. Изъ равенства этихъ разстояній слѣдуетъ, что сотрясенія бѣгутъ въ обѣихъ срединахъ съ одинаковыми скоростями.

Случай 2. Если разстоянія между двумя смежными біеніями иначе длины ихъ въ одной средѣ больше, нежели въ другой, то положимъ, что соотвѣтствующія частицы совершаютъ такія колебанія, величины наибольшихъ отклоненій въ которыхъ пропорціональны сказаннымъ длинамъ, тогда сгущенія и разрѣженія въ обѣихъ срединахъ будутъ равны. Слѣдовательно, если средины однородныя, будутъ равны и тѣ движущія упругія силы, подъ дѣйствіемъ которыхъ частицы колеблятся. Массы приводимыя этими силами въ движеніе пропорціональны длинамъ біеній, въ томъ же отношеніи находятся и пространства, проходимыя при каждомъ колебаніи. Но время одного колебанія пропорціонально корню квадратному изъ массы и корню квадратному изъ величины наибольшихъ отклоненій, слѣдовательно это время пропорціонально длинѣ сотрясеній. Сотрясенія пробѣгаютъ за время одного полнаго колебанія частицы пути равные своему притяженію, т.-е. пропорціональные времени, поэтому скорости распространенія ихъ въ обѣихъ срединахъ между собою равны.

Случай 3. Такимъ образомъ, въ срединахъ, у которыхъ плотности и силы упругости одинаковы, скорости распространенія сотрясеній равны. Если же плотность или сила упругости среды будутъ увеличены, то движущая сила возрастетъ въ томъ же отношеніи какъ сила упругости, приводимая же въ движеніе масса—какъ плотность; время, въ теченіе котораго будутъ совершаться тѣ же движенія, какъ и прежде, увеличится какъ корень квадратный изъ отношенія плотностей и уменьшится какъ корень квадратный изъ отношенія силъ упругости. Вслѣдствіе этого, скорость распространенія сотрясеній будетъ прямо пропорціональна корню квадратному изъ плотности и обратно пропорціональна корню квадратному изъ силъ упругости.

Это предложеніе явствуетъ съ еще большею ясностью изъ построенія слѣдующаго предложенія.

Предложеніе XLIX. Задача XI.

Найти скорость распространенія сотрясеній, когда заданы плотность и сила упругости среды.

Вообразимъ среду, находящуюся подъ дѣйствіемъ вѣса, которымъ она подобно нашему воздуху сжимается, пусть A есть высота однородной среды, вѣсъ которой равенъ давящему вѣсу и плотность которой такая же, какъ плотность той сжатой среды, въ которой біенія распространяются.

Представимъ себѣ маятникъ, длина котораго между точкою подвѣса и центромъ качанія равнялась бы A,—въ какое время этотъ маятникъ совершитъ свой полный размахъ состоящій изъ хода впередъ и возвращенія назадъ, въ такое же время біеніе пробѣжитъ путь, равный длинѣ окружности, описанной радіусомъ A.

Сохранимъ обозначенія и построенія предложенія XLVII. Если какой-либо физическій отрѣзочекъ EF, описывающій при своихъ отдѣльныхъ колебаніяхъ пространство PS, подвергается дѣйствію такой силы упругости, которая въ концахъ его хода P и S равна его вѣсу, то онъ будетъ совершать эти колебанія въ такое же время, какъ и колеблясь по циклоидѣ, полный обводъ которой равенъ длинѣ PS, и это потому, что въ обоихъ случаяхъ равныя силы дѣйствуютъ на равныя массы на равныхъ протяженіяхъ. Такъ какъ время размаховъ маятника пропорціонально корню квадратному изъ его длины, длина же маятника равна половинѣ длины полной циклоиды, то отношеніе времени одного колебанія частицы къ времени размаха маятника, длина котораго A, будетъ равно $\sqrt{\frac{\frac{1}{2}PS}{A}}$ т.-е. $\sqrt{\frac{PO}{A}}$. Но величина силы упругости, дѣйствующая на отрѣзочекъ EG, вообще относится (по доказательству пред. XLVII) къ полной его силѣ упругости какъ $(HL-KN):V$, при крайнихъ же положеніяхъ P и S, когда точка K совпадаетъ съ P, это отношеніе будетъ $HK:V$. Но эта полная величина силы упругости, т.-е. тотъ дѣйствующій вѣсъ, которымъ сжимается отрѣзочекъ EG, относится къ вѣсу этого отрѣзочка какъ высота напора A, соотвѣтствующая дѣйствующему вѣсу относится къ длинѣ отрѣзочка EG; слѣдовательно сила дѣйствующая на отрѣзочекъ EG въ крайнихъ его положеніяхъ P и S относится къ вѣсу этого отрѣзочка какъ

$$HK \,.\, A : V \,.\, EG,$$

т.-е. какъ

$$PO \,.\, A : V^2$$

ибо

$$HK : EG = PO : V.$$

Такъ какъ времена, въ продолженіе которыхъ равныя массы прохо-

дятъ равныя пространства, обратно пропорціональны корню изъ силъ, то отношеніе времени одного колебанія подъ дѣйствіемъ сказанной силы упругости ко времени колебанія подъ дѣйствіемъ вѣса равно $\sqrt{\frac{V^2}{PO.A}}$, а значитъ отношеніе его къ времени размаха маятника, длина котораго есть A, равно произведенію отношеній $\sqrt{\frac{V^2}{PO.A}}$ и $\sqrt{\frac{PO}{A}}$, т.-е. равно $\frac{V}{A}$. Но въ продолженіе времени одного полнаго, состоящаго изъ хода впередъ и возвращенія назадъ, колебанія частицы сотрясеніе пробѣгаетъ въ своемъ распространеніи путь равный своей длинѣ BC, поэтому время, въ продолженіе коего сотрясеніе пробѣгаетъ пространство BC, относится ко времени одного полнаго колебанія частицы какъ $V:A$, т.-е. какъ BC относится къ окружности описанной радіусомъ A. Время же, въ продолженіе коего сотрясеніе проходитъ пространство BC, находится въ томъ же отношеніи къ времени, въ теченіе котораго оно проходитъ путь, равный длинѣ сказанной окружности, слѣдовательно, въ указанное время сотрясеніе пробѣгаетъ путь равный этой окружности [174].

---

[174]) Доказательство, изложенное въ текстѣ есть лишь развитіе равенства (5) прим. (173). Въ самомъ дѣлѣ, положивъ $r - u_0 = y$ имѣемъ:

$$y'' + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\frac{p_0}{\rho_0}y = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Отсюда слѣдуетъ, что періодъ τ колебанія частицы опредѣляется уравненіемъ

$$\frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}},$$

изъ котораго слѣдуетъ

$$\frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Но это отношеніе есть не что иное какъ скорость распространенія сотрясеній.

Формула (2) выведена въ томъ предположеніи, что разсматриваемая упругая среда слѣдуетъ закону Марріота Если бы связь между давленіемъ и объемомъ или давленіемъ и плотностью возражалась бы инымъ образомъ, напр. было бы:

$$p = p_0 f\left(\frac{v_0}{v}\right) = p_0 f\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

то вмѣсто разности

$$p_0\sigma \cdot \frac{V}{V-HL} - p_0\sigma\frac{V}{V-KN}$$

выражающей силу, дѣйствующую на частицу, имѣли бы разность:

$$p_0\sigma\left[f\left(\frac{V}{V-HL}\right) - f\left(\frac{V}{V-KN}\right)\right]$$

которая отбрасывая безконечно малыя высшихъ порядковъ равна:

Слѣдствіе 1. Скорость бѣга сотрясеній равна скорости пріобрѣтаемой тяжелымъ тѣломъ при равноускоренномъ паденіи, по прохожденіи имъ высоты $\frac{1}{2}A$. Ибо въ продолженіе времени такого паденія сотрясеніе, двигаясь со скоростью пріобрѣтенной тѣломъ въ концѣ паденія, прошло бы путь равный A; поэтому, въ продолженіе времени полнаго колебанія частицы состоящаго изъ ея хода впередъ и возвращенія обратно, оно пробѣжитъ путь равный окружности описанной радіусомъ A, ибо время паденія относится ко времени одного колебанія какъ радіусъ круга къ его окружности.

Слѣдствіе 2. Такъ какъ высота A прямо пропорціональна силѣ упругости жидкости и обратно пропорціональна ея плотности, то скорость распространенія сотрясеній обратно пропорціональна корню квадратному изъ плотности и прямо пропорціональна корню квадратному изъ силы упругости.

Предложеніе L. Задача XII.

Найти протяженіе и длину сотрясенія.

Опредѣляется число колебаній, совершаемыхъ въ продолженіе заданнаго промежутка времени дрожащимъ тѣломъ, возбуждающимъ сотрясенія; на найденное число раздѣляется пространство, которое сотрясеніе можетъ пробѣгать въ продолженіи этого же времени, полученная величина и представитъ протяженіе или длину одного сотрясенія или біенія.

Поученіе.

Въ этихъ послѣднихъ предложеніяхъ имѣются въ виду распространеніе свѣта и звука. Такъ какъ свѣтъ распространяется по прямымъ линіямъ, то (по предложеніямъ XLI и XLII), онъ не можетъ состоять изъ одного только давленія. Такъ какъ звуки происходятъ отъ дрожащихъ

$$p_0\sigma\left[f\left(1+\frac{HL}{V}\right)-f\left(1+\frac{KN}{V}\right)\right]=p_0\sigma\,.\,\frac{HL-KN}{V}\,.\,f'(1)$$

слѣдовательно въ форм. (1) и (2) вмѣсто отношенія $\frac{p_0}{\rho_0}$ пришлось бы написать величину $\frac{p_0}{\rho_0}f'(1)$. На основаніи равенства (3) эта величина есть не что иное, какъ производная $\frac{dp}{d\rho}$ при $\rho=\rho_0$, обозначая которую черезъ $\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0$ получимъ обобщенную формулу Ньютона

$$c=\sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

приложимую для всякой среды. Формула эта какъ видно непосредственно слѣдуетъ изъ разсужденій Ньютона.

тѣлъ, то они не что иное какъ сотрясенія воздуха, распространяющіяся согласно пред. XLIII. Это подтверждается тѣми дрожаніями, которыя возбуждаются звуками въ встрѣчаемыхъ ими тѣлахъ, когда эти звуки громки и низки, подобно бою барабановъ; быстрыя же, короткія колебанія возбуждаются труднѣе. Однако извѣстно, что и любые звуки, ударяя струны, настроенныя въ созвучіе съ звучащимъ тѣломъ, приводятъ эти струны въ колебательное движеніе. Подтверждается это также и скоростью звука. Такъ какъ удѣльные вѣса дождевой воды и ртути относятся приблизительно какъ 1 къ $13\frac{2}{3}$, то при высотѣ барометра въ 30 англійскихъ дюймовъ, когда удѣльный вѣсъ воздуха относится къ удѣльному вѣсу дождевой воды какъ 1 къ 870, отношеніе удѣльнаго вѣса воздуха къ удѣльному вѣсу ртути составитъ 1 : 11890; слѣдовательно, когда высота ртути равна 30 дюймамъ, высота однородной атмосферы, вѣсъ которой сжалъ бы нашъ воздухъ соотвѣтственно, составитъ 356700 дюймовъ или 29725 футъ. Это и есть та высота, которая въ предыдущей задачѣ обозначена черезъ A. Окружность круга описаннаго радіусомъ въ 29725 футъ равна 186768 футъ. Маятникъ, длина коего 39,2 дюйма совершаетъ, какъ извѣстно, полный размахъ изъ хода впередъ и возвращенія обратно въ двѣ секунды, поэтому маятникъ длиною въ 29725 футъ, т.-е. 356700 дюймовъ долженъ совершать подобный же размахъ въ 190,75 секунды; въ продолженіе этого времени звукъ пробѣгаетъ 186768 футъ, т.-е. 979 футъ въ одну секунду.

Впрочемъ въ этомъ разсчетѣ не принята во вниманіе величина самихъ твердыхъ частицъ воздуха, черезъ которыя звукъ распространяется мгновенно. Такъ какъ вѣсъ воздуха относится къ вѣсу воды какъ 1 къ 870, соли же приблизительно вдвое тяжелѣе воды, то если положить, что сами частицы воздуха приблизительно такой же плотности, какъ частицы воды или солей, рѣдкость же воздуха происходитъ отъ промежутковъ между частицами, то діаметръ частицъ воздуха будетъ относиться къ промежуткамъ между центрами ихъ какъ 1 къ 9 или къ 10, къ промежуткамъ же между частицами какъ 1 къ 8 или 9. Поэтому къ полученнымъ по предыдущему разсчету 979 футамъ, проходимымъ звукомъ въ одну секунду, надо добавить $\frac{979}{9}$, т.-е. около 109 футъ на величину частицъ такъ, что звукъ долженъ проходить около 1088 футъ.

Кромѣ того пары, находящіеся въ воздухѣ, обладаютъ иною упругостью и инымъ тономъ и едва ли сколько нибудь, а можетъ быть и совсѣмъ не участвуютъ въ тѣхъ движеніяхъ самого воздуха, которыми передается звукъ. Если же они покоятся, то это движеніе будетъ распространяться по самому воздуху съ большею, въ отношеніи корня квадратнаго изъ меньшей массы, скоростью. Такъ, если атмосфера состоитъ изъ десяти частей чистаго воздуха и одной части паровъ, то скорость звука будетъ больше въ отношеніи $\sqrt{\frac{11}{10}}$ или кругло $\frac{21}{20}$ нежели скорость его распространенія по 11 частямъ чистаго воздуха, и выше найденная величина

должна быть увеличина въ этомъ отношеніи, послѣ чего получится, что въ одну секунду звукъ пробѣгаетъ 1142 фута [175]).

Такъ, это должно происходить въ весеннее и осеннее время, когда воздухъ разрѣженъ умѣреннымъ тепломъ и его упругая сила немного повышена. Въ зимнее время, когда воздухъ сгущенъ отъ холода и его упругость понижена, скорость звука должна быть медленнѣе въ отношеніи корня квадратнаго изъ плотностей; въ лѣтнее время обратно эта скорость должна быть болѣе.

Изъ опытовъ получено, что звукъ проходитъ въ одну секунду немногимъ болѣе или менѣе 1142 англійскихъ футъ или 1070 парижскихъ. Послѣ того, какъ скорость звука извѣстна, можно найти и промежутки между сотрясеніями. Совёръ (Sauveur) нашелъ изъ произведенныхъ имъ опытовъ, что открытая труба длиною около 5 парижскихъ футъ издаетъ звукъ того же тона, какъ струна, которая дѣлаетъ въ одну секунду 100 колебаній, слѣдовательно, на пространствѣ 1070 парижскихъ футъ, пробѣгаемыхъ звукомъ въ одну секунду укладывается около 100 біеній, значитъ одно біеніе занимаетъ около 10,7 фута, т.-е. приблизительно удвоенную длину трубы. Поэтому вѣроятно, что длины біеній для всѣхъ открытыхъ трубъ равны удвоенной длинѣ трубъ [176]).

---

[175]) Это объясненіе Ньютона оказалось неправильнымъ. Лапласъ (Mécanique Celeste t. V. Livre XIII. Ch. III) показалъ, что сгущенія и разрѣженія воздуха при звуковыхъ колебаніяхъ совершаются не по изотермическому процессу, для котораго имѣетъ мѣсто законъ Маріота, а по адіабатическому, при которомъ связь между давленіемъ и объемомъ и давленіемъ и плотностью выражается уравненіемъ

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{v_0}{v}\right)^k=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

гдѣ $k=1{,}403$ для воздуха есть отношеніе теплоемкости при постоянномъ давленіи къ теплоемкости при постоянномъ объемѣ.

При этомъ законѣ форм. (4) принимаетъ видъ

$$c=\sqrt{k}\,.\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

т.-е. скорость 979 футъ въ секунду разсчитанная по форм. (2) должна быть помножена на $\sqrt{1{,}403}=1{,}184$, такъ что получится 1148 футъ въ секунду въ согласіе съ опытомъ.

Замѣчательно, что какъ Лапласъ, такъ и Пуассонъ получили формулу (6), исходя изъ оставленнаго теперь представленія о теплотѣ какъ невѣсомой жидкости—теплородѣ.

Замѣтимъ еще по этому поводу, что въ статьѣ de Natura Acidorum, написанной въ 1692 году для техническаго словаря Harris'а, Ньютонъ говоритъ. «Calor est agitatio partium quamquaversum» т.-е. «Теплота есть колебаніе частицъ другъ около друга».

[176]) Эта догадка Ньютона подтверждена Д. Бернулли, давшимъ въ 1762 теорію звучащихъ трубъ.

Кромѣ того изъ слѣдствія XLVII предложенія видно, почему при прекращеніи движенія звучащаго тѣла прекращается и звукъ и не слышится болѣе далеко ли мы будемъ отстоять отъ звучащаго тѣла или близко; изъ этихъ же началъ явствуетъ, почему звуки такъ значительно усиливаются переговорными трубами. Всякое колебательное движеніе увеличивается при отдѣльныхъ появленіяхъ вновь производящей его силы, движеніе же въ трубахъ, препятствующихъ распространенію звука въ сторону, утрачивается медленнѣе и повторяется болѣе сильно, и поэтому сильно увеличивается отъ повторныхъ сообщеній новыхъ количествъ движенія. Въ этомъ состоятъ главнѣйшія звуковыя явленія.

ОТДѢЛЪ IX.

О круговомъ движеніи жидкостей.

Предположеніе.

Сопротивленіе, происходящее отъ недостатка скользкости жидкости при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, предполагается пропорціональнымъ скорости, съ которою частицы жидкости разъединяются другъ отъ друга.

Предложеніе LI. Теорема XXXIX.

Если въ однородной и безпредѣльной жидкости вращается равномѣрно около постоянной своей оси твердый безконечно длинный цилиндръ, и жидкость приводится въ движеніе единственно только этимъ натискомъ, причемъ всякая ея частица продолжаетъ сохранять свое равномѣрное движеніе, то я утверждаю, что времена обращеній частицъ жидкости пропорціональны ихъ разстояніямъ до оси цилиндра.

Пусть AFL цилиндръ равномѣрно вращаемый вокругъ оси S; проведя концентрическіе круги BGM, CHN, DJO, EKP и т. д. и построивъ цилиндры, подраздѣлимъ жидкость на безчисленное множество концентрическихъ цилиндрическихъ слоевъ одинаковой толщины.

Такъ какъ жидкость однородна, то взаимодѣйствія слоевъ другъ на друга (по предположенію) будутъ пропорціональны ихъ перемѣщеніямъ другъ по другу и величинѣ тѣхъ поверхностей, по которымъ взаимодѣйствія происходятъ. Если усиліе, приложенное къ выпуклой поверхности слоя, будетъ больше или меньше усилія приложеннаго къ вогнутой, то бо́льшее усиліе будетъ преобладать и движеніе слоя будетъ ускоряться или замедляться, ибо въ каждомъ мѣстѣ оно направлено или въ сторону движенія или же въ сторону противоположную. Такъ какъ всякій слой сохраняетъ свое

равномѣрное движеніе, то оба усилія должны быть между собою равны [177]) и направляться въ противоположныя стороны, но такъ какъ эти усилія пропорціональны поверхностямъ соприкосновенія и ихъ относительнымъ другъ по другу скоростямъ (*умноженнымъ на разстояніе до оси*), то разности

---

[177]) Стоксъ (Sir G. G. Stokes, Math. & Phys. Pap. vol. I, p. 103) обращаетъ вниманіе, что въ это разсужденіе Ньютона вкралась ошибка: подъ словомъ усилія, (impressiones) дѣйствующія на наружную и внутреннюю поверхность каждаго слоя, Ньютонъ разумѣлъ самыя величины силъ тренія, а не ихъ моменты относительно оси цилиндра, какъ бы слѣдовало. Поэтому и заключенія, къ которымъ Ньютонъ пришелъ въ этомъ предложеніи, а также и въ слѣдующемъ, гдѣ повторена та же ошибка, невѣрны.

Обозначая черезъ ω угловую скорость слоя лежащаго въ разстояніи r отъ оси, черезъ k — постоянный множитель, черезъ F силу тренія на единицу поверхности и черезъ $-C$ нѣкоторую постоянную, по Ньютону имѣемъ:

$$F = 2\pi kr \, . \, r\frac{d\omega}{dr} = -C.$$

Откуда слѣдуетъ

$$\omega = \frac{C}{2\pi k} \cdot \frac{1}{r}$$

ибо при $r = \infty$ должно быть $\omega = 0$.

Обозначая черезъ ω_0 угловую скорость и черезъ r_0 радіусъ вращающагося внутренняго цилиндра, будемъ имѣть

$$\frac{C}{2\pi k} = \omega_0 r_0$$

и, слѣдовательно, будетъ

$$\omega = \omega_0 \frac{r_0}{r}.$$

Время оборота τ слоя будетъ

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot \frac{r}{r_0} = \tau_0 \cdot \frac{r}{r_0}$$

гдѣ черезъ τ_0 обозначено время оборота цилиндра, т.-е. для слоя D это время пропорціонально разстоянію SD, какъ и сказано въ предложеніи.

На самомъ же дѣлѣ должно быть:

$$F \, . \, r = 2\pi kr^2 \, . \, r\frac{d\omega}{dr} = -C.$$

Откуда слѣдуетъ:

$$\omega = \omega_0 \cdot \frac{r_0^2}{r^2}$$

и

$$\tau = \tau_0 \cdot \frac{r^2}{r_0^2}$$

т.-е. угловая скорость обратно, время же оборота прямо пропорціональны квадрату разстоянія слоя до оси цилиндра.

Соотвѣтственно этому въ слѣдствіяхъ (1) и (2) въ скобкахъ показаны надлежащія исправленія напечатанныя курсивомъ.

этихъ скоростей должны быть обратно пропорціональны разстояніямъ (*квадратамъ разстояній*) соотвѣтствующихъ слоевъ до оси. Вмѣстѣ съ тѣмъ разности угловыхъ скоростей пропорціональны разностямъ вышеупомянутыхъ линейныхъ скоростей раздѣленнымъ на разстоянія до оси, слѣдовательно онѣ обратно пропорціональны квадратамъ (*кубамъ*) разстояній. Поэтому, если въ точкахъ A, B, C, D ... неограниченной прямой SQ, возставить перпендикуляры и отложить по нимъ длины Aa, Bb, Cc, Dd, Ee и т. д., обратно пропорціональныя квадратамъ (*кубамъ*) абсциссъ SA, SB, SC, SD, и т. д. и вообразить, что черезъ точки a, b, c, d, e ... проведена гиперболическая кривая, то суммы разностей, т.-е. полныя угловыя скорости, при увеличеніи числа слоевъ и уменьшеніи ихъ толщины до безконечности будутъ пропорціональны гиперболическимъ площадямъ AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ и т. д., времена же оборотовъ, которыя обратно пропорціональны угловымъ скоростямъ, будутъ обратно пропорціональны этимъ площадямъ. Слѣдовательно, время оборота какой-либо частицы D обратно пропорціонально площади DdQ, т.-е., по извѣстнымъ квадратурамъ кривыхъ, прямо пропорціонально разстоянію (*квадрату разстоянія*) SD.

Слѣдствіе 1. Такимъ образомъ, угловыя скорости частицъ обратно пропорціональны ихъ разстояніямъ (*квадратамъ ихъ разстояній*) до оси цилиндра и линейныя ихъ скорости равны (*обратно пропорціональны разстояніямъ*).

Слѣдствіе 2. Если жидкость находится въ цилиндрическомъ сосудѣ безконечной длины, содержащемъ другой цилиндръ внутри, и оба цилиндра вращаются около общей оси, причемъ времена оборотовъ пропорціональны ихъ радіусамъ и если всякая частица жидкости сохраняетъ неизмѣнною скорость своего движенія, то времена оборотовъ частицъ жидкости будутъ пропорціональны ихъ разстояніямъ (*квадратамъ ихъ разстояній*) до оси цилиндровъ.

Слѣдствіе 3. Если цилиндрамъ и жидкости движущимся, такимъ образомъ сообщить общее равномѣрное вращеніе, то вслѣдствіе этого новаго движенія треніе частей жидкости другъ по другу не измѣнится, поэтому не измѣнится и относительное движеніе частей жидкости, ибо перемѣщенія частей другъ относительно друга зависятъ лишь отъ тренія. Всякая часть жидкости будетъ попрежнему сохранять такое движеніе, которое треніемъ, совершающимся въ противоположныхъ направленіяхъ, не ускоряется и не замедляется.

Слѣдствіе 4. Поэтому, если сообщенное всей системѣ обоихъ цилиндровъ и жидкости вращеніе таково, что имъ уничтожается вращеніе внѣшняго цилиндра, то получится движеніе жидкости въ покоющемся цилиндрѣ.

Слѣдствіе 5. Слѣдовательно, если при покоющихся жидкости и внѣшнемъ цилиндрѣ начать равномѣрное вращеніе внутренняго цилиндра, то круговое движеніе передастся жидкости и будетъ постепенно распространяться черезъ всю жидкость, и не ранѣе того перестанетъ увеличиваться,

пока движенiе всѣхъ частей жидкости не станетъ такимъ, какъ указано въ слѣдствiи четвертомъ.

Слѣдствiе 6. Такъ какъ жидкость вынуждается при этомъ распространять далѣе свое движенiе, то отъ ея натиска придетъ во вращенiе и наружный цилиндръ, если только его не удерживать насильно; его вращенiе будетъ ускоряться до тѣхъ поръ, пока времена оборотовъ обоихъ цилиндровъ не сравняются. Если же наружный цилиндръ задержать, то онъ будетъ принуждать жидкость замедлять свое движенiе, и если вращенiе внутренняго цилиндра не поддерживается какою-либо внѣшнею силою, то оно постепенно прекратится.

Такой опытъ надо производить въ глубокой стоячей водѣ.

Предложенiе LII. Теорема XL.

Если въ однородной и безпредѣльной жидкости вращается равномѣрно около постоянной оси твердый шаръ, и жидкость приводится въ вращательное движенiе единственно только этимъ натискомъ и всякая ея часть продолжаетъ сохранять свое равномѣрное движенiе, то я утверждаю, что времена оборотовъ частицъ жидкости будутъ пропорцiональны квадратамъ (кубамъ) *ихъ разстоянiй до центра шара.*

Случай 1. Пусть AFL есть шаръ равномѣрно вращающiйся около оси S, проведя круги BGM, CHN, DJO, EKP и т. д., подраздѣлимъ жидкость на безчисленное множество концентрическихъ шаровыхъ слоевъ одинаковой толщины. Вообрази затѣмъ, что эти шары твердые; такъ какъ жидкость однородна, то дѣйствiя смежныхъ слоевъ другъ на друга будутъ пропорцiональны ихъ относительнымъ другъ къ другу скоростямъ и величинамъ поверхностей соприкосновенiя. Если усилiе, приложенное къ которому либо изъ шаровыхъ слоевъ, будетъ больше или меньше по его впалой поверхности, нежели по выпуклой, то большое усилiе будетъ преобладающимъ и скорость слоя будетъ или возрастать или уменьшаться, ибо въ каждомъ мѣстѣ усилiе будетъ направлено или въ сторону движенiя или обратно. Но такъ какъ каждый изъ слоевъ продолжаетъ сохранять свое равномѣрное движенiе, то усилiя [178]) дѣйствующiя на обѣ стороны, должны быть между собою равны и направляться противоположно. Такъ какъ усилiя пропорцiональны величинамъ смежныхъ поверхностей и ихъ относительнымъ другъ по другу скоростямъ скольженiя (*и разстоянiямъ до оси*), то эти скорости должны быть обратно пропорцiональны поверхностямъ (*умножен-*

[178]) Введя поправку, указанную въ примѣчанiи къ предложенiю LI, получимъ, что производная угловой скорости по разстоянiю, или по Ньютоновой терминологiи «разность угловыхъ скоростей» обратно пропорцiональна не кубу, а четвертой степени разстоянiй. Соотвѣтственно этому самыя угловыя скорости будутъ обратно времена же оборотовъ прямо пропорцiональны не квадратамъ, а кубамъ разстоянiй. Въ остальномъ раз-

нымъ на разстоянія до оси), т.-е. обратно пропорціональны квадратамъ (*кубамъ*) разстояній поверхностей до центра. Но разности угловыхъ скоростей пропорціональны сказаннымъ скоростямъ скольженія, раздѣленнымъ на разстоянія, иначе прямо пропорціональны этимъ скоростямъ и обратно пропорціональны разстояніямъ, т.-е. обратно пропорціональны кубамъ (*четвертымъ степенямъ*) разстояній. Поэтому, если въ точкахъ A, B, C, D, E и т. д. неограниченной прямой SQ возставить перпендикуляры и отложить по нимъ длины Aa, Bb, Cc, Dd, Ee и т. д., обратно пропорціональныя кубамъ (*четвертымъ степенямъ*) абсциссъ SA, SB, SC, SD, SE и т. д., то суммы разностей, т.-е. самыя угловыя скорости будутъ пропорціональны (увеличивая число слоевъ и уменьшая ихъ толщину до безконечности, чтобы образовать однородную жидкость) гиперболическимъ площадямъ AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ и т. д. Времена же обращеній, которыя обратно пропорціональны угловымъ скоростямъ, будутъ обратно пропорціональны этимъ площадямъ, слѣдовательно, время оборота какого-либо слоя DJO, обратно пропорціональное площади DdQ, по извѣстнымъ квадратурамъ кривыхъ, прямо пропорціонально квадрату (*кубу*) разстоянія SD. Это я и имѣлъ въ виду прежде всего доказать.

Случай 2. Изъ центра сферы проводится весьма большое число неограниченныхъ прямыхъ, черезъ равные углы, вообрази, что при обращеніи около оси эти прямыя разсѣкаютъ шаровые слои на безчисленное множество колецъ. Каждое кольцо соприкасается съ четырьмя кольцами съ нимъ смежными—внутреннимъ, внѣшнимъ и двумя боковыми. Ни одно кольцо не можетъ подвергаться равнымъ и противоположно направленнымъ усиліямъ, происходящимъ отъ тренія прилегающихъ къ нему колецъ внутренняго и наружнаго, если только движеніе не совершается какъ указано въ случаѣ первомъ, что́ слѣдуетъ изъ доказательства этого случая. Поэтому любой рядъ колецъ расходящихся отъ шара прямолинейно будетъ двигаться, какъ указано въ первомъ случаѣ, поскольку ему не препятствовало бы треніе по боковымъ поверхностямъ его. Но при движеніи, происходящемъ по указанному закону, треніе и на боковыхъ поверхностяхъ равно нулю и, слѣдовательно, нисколько не препятствуетъ такому движенію. Если бы кольца, равноудаленныя отъ центра обращались бы быстрѣе или медленнѣе близъ полюсовъ, нежели близъ эклептики, то болѣе медленные ускорялись бы, болѣе быстрые замедлялись бы отъ тренія ихъ другъ по другу, поэтому времена обращеній будутъ приближаться къ равенству согласно закону случая перваго. Такимъ образомъ, треніе не препятствуетъ

сужденія Ньютона остаются безъ измѣненій; въ слѣдствіяхъ въ скобкахъ напечатаны курсивомъ тѣ исправленія, которыя надо ввести, чтобы устранить вкравшуюся въ разсужденія Ньютона погрѣшность.

Рѣшеніе этой задачи, а также и предыдущей на основаніи общихъ уравненій движенія вязкой жидкости можно найти въ Гидродинамикѣ Ламба (H. Lamb, Hydrodynamics, §§ 291 и 292) и въ Механикѣ Кирхгоффа (Kirchhoff, Mechanik. Vorl. 26).

движенію, совершающемуся по закону случая перваго, поэтому этотъ законъ имѣетъ и здѣсь мѣсто, т.-е. времена обращеній отдѣльныхъ колецъ пропорціональны квадратамъ (*кубамъ*) ихъ разстояній до центра шара. Это я и имѣлъ въ виду доказать во вторыхъ.

Случай 3. Пусть каждое кольцо подраздѣлено поперечными сѣченіями на безчисленное множество частицъ, образующихъ вещество вполнѣ и равномѣрно жидкое; такъ какъ подраздѣленіе такими сѣченіями не вліяетъ на вращательное движеніе, служитъ лишь для образованія жидкости, то вращательное движеніе сохранится такое же, какъ и ранѣе. Отъ такого разсѣченія шероховатость и сила тренія безконечно малыхъ колецъ или совсѣмъ не измѣняется, или измѣнится одинаково для всѣхъ. При сохраненіи же пропорціональности причинъ, сохранится пропорціональность проявленій, т.-е. пропорція угловыхъ скоростей и временъ обращеній. Впрочемъ, такъ какъ движеніе вращательное, и происходящая отъ него центробѣжная сила больше по эклиптикѣ, нежели у полюсовъ, то должна быть какая-нибудь причина, которою отдѣльныя частицы удерживались бы на своихъ круговыхъ путяхъ, иначе вещество, находящееся на эклиптикѣ удалялось бы постоянно отъ центра и внѣ вихря переходило бы къ полюсамъ, откуда по оси возвращалось бы къ эклиптикѣ круговымъ потокомъ.

Слѣдствіе 1. Такимъ образомъ, угловыя скорости частей жидкости обратно пропорціональны квадратамъ (*кубамъ*) разстояній до центра шара, и линейныя скорости частицъ обратно пропорціональны первой (*второй*) степени этихъ разстояній.

Слѣдствіе 2. Если шаръ вращается равномѣрно въ однородной покоющейся безпредѣльной жидкости около постоянной оси, то онъ сообщитъ жидкости движеніе, подобное движенію вихря; это движеніе будетъ постепенно распространяться до безконечности и отдѣльныя частицы жидкости не ранѣе того прекратятъ ускоряться, пока времена ихъ обращеній не станутъ пропорціональными квадратамъ (*кубамъ*) разстояній до центра шара.

Слѣдствіе 3. Такъ какъ внутреннія части вихря вслѣдствіе большей своей скорости трутся о части его, лежащія далѣе отъ центра, увлекаютъ ихъ и этимъ дѣйствіемъ постоянно сообщаютъ имъ нѣкоторое количество движенія, эти части передаютъ въ свою очередь то же самое количество движенія частямъ снаружи ихъ расположеннымъ и такимъ образомъ сохраняютъ свое количество движенія неизмѣннымъ; отсюда слѣдуетъ, что нѣкоторое количество движенія постоянно переносится отъ центра къ окружности вихря и по безконечности ея тамъ поглощается. Вещество, находящееся между двумя какими-либо шаровыми поверхностями концентрическими съ вихремъ, никогда не ускоряется, ибо передаетъ все получаемое изъ нутри вихря количество движенія въ наружу.

Слѣдствіе 4. Поэтому, для постояннаго поддержанія вихря въ томъ же самомъ состояніи движенія требуется какое-нибудь непрестанно дѣйствующее начало, отъ котораго шаръ получалъ бы постоянно то количество дви-

женія, которое онъ сообщаетъ веществу вихря. Безъ такого начала шаръ и внутреннія части вихря, распространяя постоянно свое количество движенія наружу и не получая новаго, должны постепенно замедляться и прекратить свое вращательное движеніе.

Слѣдствіе 5. Если въ этомъ вихрѣ на нѣкоторомъ разстояніи отъ центра будетъ плавать второй шаръ и будетъ постоянно вращаться подъ дѣйствіемъ нѣкоторой силы около оси сохраняющей постоянное наклоненіе, то этимъ вращеніемъ жидкость будетъ также приводиться въ вихревое движеніе. Сперва этотъ новый малый вихрь будетъ обращаться вмѣстѣ съ своимъ шаромъ около центра перваго вихря, но въ то же самое время его собственное движеніе будетъ мало-по-малу расширяться и постепенно распространяться до безконечности подобно какъ и для перваго вихря. По той же самой причинѣ, по которой шаръ второго вихря увлекался движеніемъ перваго, и шаръ этого перваго будетъ увлекаться движеніемъ второго такъ, что оба шара будутъ обращаться около нѣкоторой промежуточной точки и вслѣдствіе такого кругового движенія будутъ стремиться удалиться другъ отъ друга, если только они не будутъ удерживаться какою-либо силою.

Затѣмъ если то дѣйствіе силъ, вслѣдствіе котораго шары сохраняли свое движеніе, прекратилось бы, и все дальнѣйшее совершалось бы по законамъ механики, то движеніе шаровъ постепенно бы замедлялось (по причинамъ, указаннымъ въ слѣдствіяхъ 3 и 4) и вихри бы успокоились.

Слѣдствіе 6. Если бы нѣсколько шаровъ, находящихся въ заданныхъ мѣстахъ, вращались бы все время съ постоянными скоростями около постоянныхъ осей, то образовалось бы столько же вихрей, уходящихъ въ безконечность. Ибо по той же причинѣ, какъ и въ томъ случаѣ, когда онъ одинъ, каждый отдѣльный шаръ распространяетъ свое движеніе до безконечности, вслѣдствіе чего каждая часть безпредѣльной жидкости совершаетъ то движеніе, которое происходитъ отъ совокупнаго дѣйствія всѣхъ шаровъ. Поэтому вихри не будутъ ограничиваться нѣкоторыми извѣстными предѣлами, но постепенно будутъ проникать другъ въ друга, шары же вслѣдствіе дѣйствія вихрей другъ на друга будутъ постоянно перемѣщаться изъ занимаемыхъ ими мѣстъ, какъ это изложено въ предыдущемъ слѣдствіи и не иначе могутъ сохранять нѣкоторое опредѣленное другъ относительно друга положеніе, какъ будучи удерживаемы нѣкоторою силою. По прекращеніи же постояннаго дѣйствія тѣхъ силъ, которымъ сохранялось движеніе шаровъ, вещество, по указаннымъ въ слѣдствіяхъ третьемъ и четвертомъ причинамъ, будетъ постепенно успокаиваться и перестанетъ вращаться въ видѣ вихря.

Слѣдствіе 7. Если подобную жидкость заключить въ сферическій сосудъ и привести равномѣрно вращающимся въ центрѣ его шаромъ въ вихревое движеніе, причемъ шаръ и сосудъ вращаются около одной и той же оси въ одну и ту же сторону и времена ихъ оборотовъ пропорціональны квадратамъ (*кубамъ*) ихъ радіусовъ, то части жидкости лишь тогда

начнутъ сохранять постоянство своего движенія, не ускоряясь и не замедляясь, когда времена ихъ обращеній станутъ пропорціональными квадратамъ (*кубамъ*) ихъ разстояній до центра вихря. Никакое другое строеніе вихря не можетъ оставаться постояннымъ.

Слѣдствіе 8. Если сосудъ, содержащій жидкость и шаръ, сохраняя свое указанное выше движеніе, получитъ еще какое-либо общее вращательное движеніе около нѣкоторой постоянной оси, то это новое движеніе не повліяетъ на треніе частей жидкости другъ по другу, и относительное ихъ движеніе не измѣнится, ибо перемѣщенія частей жидкости другъ относительно друга зависятъ отъ тренія. Всякая часть будетъ пребывать въ такомъ движеніи, при которомъ она треніемъ, дѣйствующимъ на одну ея сторону, замедляется не болѣе того, насколько она ускоряется треніемъ, дѣйствующимъ на другую ея сторону.

Слѣдствіе 9. Поэтому, если сосудъ находится въ покоѣ и движеніе шара будетъ задано, то найдется и движеніе жидкости. Ибо вообрази, что черезъ ось шара проведена плоскость, которая вращается въ обратную сторону и положи, что сумма времени ея оборота и времени оборота шара относится къ времени оборота шара, какъ квадратъ (*кубъ*) радіуса сосуда относится къ квадрату (*кубу*) радіуса шара, тогда времена обращеній частицъ жидкости по отношенію къ этой плоскости будутъ пропорціональны квадратамъ (*кубамъ*) ихъ разстояній до центра шара.

Слѣдствіе 10. Если сосудъ вращается около той же самый оси какъ и шаръ или около какой-либо иной съ какою-либо заданною скоростью, то движеніе жидкости найдется. Ибо если отъ всей системы отнять угловое движеніе сосуда, то всѣ прочія относительныя движенія останутся прежними по слѣд. 8 и найдутся по слѣд. 9.

Слѣдствіе 11. Если сосудъ и жидкость находятся въ покоѣ, шаръ же вращается равномѣрво, то движеніе распространяется постепенно черезъ всю жидкость въ сосудѣ, и сосудъ будетъ вращаться, если только его насильно не удерживать; и жидкость и сосудъ перестанутъ ускоряться лишь послѣ того, какъ времена ихъ обращенія станутъ равны времени обращенія шара. Если же сосудъ будетъ какою-либо внѣшнею силою задерживаться или же будетъ все время вращаемъ равномѣрно, то жидкость постепенно придетъ въ состояніе движенія, указанное въ слѣдствіяхъ 8, 9 и 10. Ни въ какомъ же другомъ состояніи движенія она постоянно пребывать не можетъ. Если же затѣмъ силы, которыми поддерживалось вращеніе шара и сосуда, свое дѣйствіе прекратятъ, и все въ дальнѣйшемъ будетъ совершаться по законамъ механики, то шаръ и сосудъ будутъ дѣйствовать другъ на друга при посредствѣ жидкости и прекратятъ распространять другъ къ другу свое движеніе черезъ жидкость лишь послѣ того, какъ времена ихъ оборотовъ сравняются и вся система станетъ вращаться цѣликомъ, на подобіе одного твердаго тѣла.

Поученіе.

Во всѣхъ этихъ разсужденіяхъ я предполагаю, что жидкость состоитъ изъ вещества однороднаго какъ по плотности, такъ и по текучести. Такова такая жидкость, въ которой тотъ же самый шаръ, обладающій тѣмъ же самымъ количествомъ движеній въ одинаковое время, будучи помѣщенъ гдѣ бы то ни было, можетъ распространять подобныя и равныя движенія къ концу одинаковыхъ промежутковъ времени, въ равныхъ отъ себя разстояніяхъ.

Матерія вслѣдствіе своего кругового движенія вынуждается удаляться отъ оси вихря и поэтому давитъ на всю внѣ лежащую матерію. Отъ этого давленія треніе частей становится сильнѣе и раздѣленіе ихъ другъ отъ друга труднѣе, и, слѣдовательно, текучесть матеріи будетъ уменьшаться. Съ другой стороны, если частица жидкости гдѣ-либо плотнѣе или крупнѣе, то текучесть будетъ тамъ меньше вслѣдствіе меньшаго числа поверхностей, которыми частицы раздѣлены другъ отъ друга. Въ такого рода случаяхъ я предполагаю, что недостатокъ текучести восполняется скользкостью или мягкостью частицъ или какимъ-либо инымъ условіемъ. Если же этого не будетъ, то тамъ, гдѣ текучесть вещества меньше, сцѣпленіе его больше, и вещество не столь подвижно, вслѣдствіе чего оно воспринимаетъ движеніе позже и распространяетъ его медленнѣе, нежели указано выше. Если форма сосуда не сферическая, то частицы будутъ двигаться по линіямъ не круговымъ, а соотвѣтствующимъ формѣ сосуда, и времена обращеній будутъ приблизительно пропорціональны квадратамъ (*кубамъ*) среднихъ разстояній отъ центра. Въ тѣхъ мѣстахъ между центромъ и обводомъ, гдѣ пространство шире, движеніе будетъ медленнѣе, гдѣ уже—быстрѣе; однако болѣе быстро движущіяся частицы не будутъ стремиться къ окружности, ибо онѣ описываютъ дуги меньшей кривизны и ихъ стремленіе къ удаленію отъ центра, настолько же уменьшается вслѣдствіе уменьшенія этой кривизны, насколько оно возрастаетъ отъ увеличенія скорости.

При переходѣ изъ узкихъ мѣстъ въ болѣе широкія частицы нѣсколько удаляются отъ центра, вслѣдствіе чего онѣ замедляютъ свое движеніе, затѣмъ, когда онѣ вновь переходятъ въ узкія мѣста, ихъ движеніе ускоряется, такимъ образомъ, всякая отдѣльная частица во все время по-очередно то ускоряется, но замедляется. Такъ происходитъ движеніе въ твердомъ сосудѣ, въ неограниченной же жидкости строеніе вихрей указано въ шестомъ слѣдствіи этого предложенія.

Я старался изслѣдовать свойства вихрей въ этомъ предложеніи, чтобы испробовать, могутъ ли небесныя явленія быть объяснены вихрями. Ибо существуетъ то явленіе, что времена оборотовъ планетъ, обращающихся вокругъ Юпитера, находятся въ полукубическомъ отношеніи къ ихъ разстояніямъ до его центра; то же самое соотношеніе имѣетъ мѣсто и для планетъ обращающихся вокругъ солнца. Эти отношенія соблюдаются

для тѣхъ и другихъ планетъ съ совершеннѣйшею точностью, какую только могли до сихъ поръ доставить астрономическія наблюденія. Слѣдовательно, если только эти планеты несутся вихрями, вращающимися около Юпитера и около солнца, то и эти вихри должны вращаться по такимъ же законамъ. Но времена обращеній частей вихря оказываются пропорціональными квадратамъ (*кубамъ*) разстояній и это отношеніе не иначе можетъ уменьшиться и привестись къ полукубическому, какъ если вещество вихря, тѣмъ болѣе текуче, чѣмъ оно дальше отъ центра, или же если сопротивленіе, происходящее отъ недостатка скользкости частей жидкости при увеличеніи скорости раздѣленія частей другъ отъ друга, возрастаетъ въ бо́льшемъ отношеніи, нежели эта скорость. Однако, ни то, ни другое разуму не представляется сообразнымъ. Болѣе плотныя и менѣе текучія частицы, если только онѣ не тяготѣютъ къ центру, стремятся къ окружности. Хотя я для проведенія доказательствъ и предположилъ въ началѣ этого отдѣла, что сопротивленіе пропорціонально скорости, однако весьма вѣроятно, что оно находится въ меньшемъ отношеніи, нежели скорость; при такомъ допущеніи времена обращеній частей вихря будутъ въ бо́льшемъ отношеніи, нежели квадраты (*кубы*) ихъ разстояній до центра. Если же вихри, по мнѣнію нѣкоторыхъ, движутся близъ центра скорѣе, затѣмъ до нѣкотораго предѣла медленнѣе, затѣмъ опять быстрѣе до окружности, то не можетъ быть получено ни полукубическое, ни какое иное опредѣленное отношеніе. Пусть философы сами посмотрятъ, при какомъ условіи можетъ быть объяснено вихрями явленіе, заключающееся въ существованіи указаннаго полукубическаго отношенія.

Предложеніе LIII. Теорема XLI.

Тѣла, которыя при переносѣ вихремъ описываютъ постоянно одну и ту же орбиту, должны обладать одинаковою съ вихремъ плотностью и двигаться по тому же закону, что касается скорости и ея направленія, какъ и части самого вихря.

Ибо если предположить, что какая-либо малая часть вихря, частицы которой сохраняютъ постоянное относительное расположеніе, замерзла, то ни въ отношеніи своей скорости, ни въ отношеніи инерціи, ни своей формы она не измѣнилась, поэтому она будетъ продолжать двигаться по тому же закону, какъ и раньше. Обратно, если замерзшая и отвердѣвшая часть вихря будетъ одинаковой плотности съ остальнымъ вихремъ, и вновь обратится въ жидкость, то она будетъ двигаться по тому же закону, какъ и раньше, за исключеніемъ только того, что ея частицы, ставши жидкими, будутъ перемѣщаться другъ относительно друга. Слѣдовательно, если пренебречь относительнымъ движеніемъ частицъ, такъ какъ оно не вліяетъ на поступательное движеніе цѣлаго, то движеніе этого цѣлаго будетъ такое же, какъ и раньше. Движеніе же это будетъ такое же, какъ и про-

чихъ частей вихря одинаково удаленныхъ отъ центра, ибо по раствореніи въ жидкость это твердое тѣло составитъ часть вихря, подобную прочимъ.

Слѣдовательно, твердое тѣло, когда плотность его равна плотности вещества вихря, движется одинаковымъ образомъ съ частями вихря, находясь въ покоѣ по отношенію къ веществу вихря непосредственно окружающему это тѣло. Если же тѣло большей плотности, то оно сильнѣе будетъ вынуждаться удалиться отъ центра, нежели прежде, поэтому превозмогая ту силу вихря, которою оно раньше удерживалось какъ бы въ равновѣсіи на своей орбитѣ, оно удалится отъ центра и при своемъ обращеніи опишетъ спираль, а вновь по своей прежней орбитѣ не пойдетъ. Если же плотность тѣла меньше, то такимъ же разсужденіемъ показывается, что тѣло приблизится къ центру. Такимъ образомъ, тѣло не будетъ двигаться по той же самой замкнутой орбитѣ, если только плотность его не одинакова съ плотностью жидкости; для этого же случая показано, что тѣло обращается по тому же закону, какъ и частицы жидкости одинаково удаленныя отъ центра вихря.

Слѣдствіе 1. Слѣдовательно, тѣло, обращающееся вмѣстѣ съ вихремъ по неизмѣнной орбитѣ, находится въ покоѣ по отношенію къ жидкости, въ которой оно плаваетъ.

Слѣдствіе 2. Если вихрь повсюду одинаковой плотности, то тоже самое тѣло можетъ обращаться въ любомъ разстояніи отъ центра.

Поученіе.

Отсюда слѣдуетъ, что планеты не могутъ быть переносимы матеріальными вихрями. Планеты согласно второй гипотезѣ *Коперниковой* обращаются около солнца по эллипсамъ, фокусъ коихъ находится въ центрѣ солнца и описываютъ радіусами къ нему проведенными площади пропорціональныя временамъ, части же вихря не могутъ обращаться такимъ образомъ. Пусть AD, BE, CF (фиг. 183) представляютъ три орбиты, описанныя вокругъ солнца S, и пусть внѣшняя изъ нихъ CF есть кругъ концентричный съ солнцемъ, для двухъ же внутреннихъ пусть будутъ A и B афеліи, D и E перигеліи. Слѣдовательно, тѣло, обращающееся по орбитѣ CF, описывая проведеннымъ къ центру радіусомъ площади пропорціональныя времени, движется равномѣрно. Тѣло же, обращающееся по орбитѣ BE, движется медленнѣе близъ афелія B и быстрѣе близъ перигелія E, что̀ согласно съ законами астрономіи; по законамъ же механики вещество вихря должно двигаться быстрѣе, въ болѣе узкомъ пространствѣ между A и C, нежели въ болѣе широкомъ между D и F, т.-е. быстрѣе въ афеліи, нежели въ перигеліи. Одно другому противорѣчитъ. Такъ въ началѣ знака Дѣвы, гдѣ теперь находится афелій Марса, разстояніе между орбитою Марса и орбитою Венеры относится къ разстоянію между этими же орбитами, въ началѣ знака Рыбъ, приблизительно, какъ три къ двумъ, поэтому вещество вихря должно бы двигаться въ началѣ знака Рыбъ быстрѣе,

нежели въ началѣ знака Дѣвы въ полтора раза, ибо чѣмъ уже пространство, черезъ которое должно проходить въ продолженіе того же времени одного оборота то же самое количество вещества, тѣмъ больше должна быть его скорость. Слѣдовательно, если бы земля, находящаяся по отношенію къ этому веществу въ относительномъ покоѣ, переносилась бы имъ и обращалась бы вмѣстѣ съ нимъ вокругъ солнца, то ея скорость въ началѣ знака Рыбъ была бы въ полтора раза больше ея скорости въ началѣ знака Дѣвы. Собственное движеніе солнца въ началѣ знака Дѣвы, было бы нѣсколько болѣе семидесяти минутъ въ сутки, а въ началѣ знака Рыбъ нѣсколько менѣе сорока восьми, тогда какъ на самомъ дѣлѣ (по наблюденіямъ) указанное движеніе солнца больше въ началѣ знака Рыбъ, нежели въ началѣ знака Дѣвы, поэтому земля движется быстрѣе въ началѣ знака Дѣвы, нежели въ началѣ знака Рыбъ. Такимъ образомъ, гипотеза вихрей совершенно противорѣчитъ астрономическимъ явленіямъ и приводитъ не столько къ объясненію движеній небесныхъ тѣлъ, сколько къ ихъ запутыванію. Способъ, которымъ эти движенія совершаются на самомъ дѣлѣ въ свободномъ пространствѣ, можно понять по первой книгѣ, подробнѣе же онъ разсматривается въ изложеніи системы міра.

КНИГА ТРЕТЬЯ.

О системѣ міра.

Въ предыдущихъ книгахъ я изложилъ начала философіи, не столько чисто философскія, по скольку математическія, однако такія, что на нихъ могутъ быть обоснованы разсужденія о вопросахъ физическихъ. Таковы законы и условія движеній и силъ, имѣющіе прямое отношеніе къ физикѣ. Чтобы они не казались безплодными, я пояснилъ ихъ нѣкоторыми физическими поученіями, разсматривая тѣ общіе вопросы, на которыхъ физика главнымъ образомъ основывается, какъ-то: о плотности и сопротивленіи тѣлъ, о пространствахъ свободныхъ отъ какихъ-либо тѣлъ, о движеніяхъ свѣта и звука. Остается изложить, исходя изъ тѣхъ же началъ, ученіе о строеніи системы міра. Я составилъ сперва объ этомъ предметѣ третью книгу, придержавшись популярнаго изложенія, такъ чтобы она читалась многими. Но затѣмъ, чтобы тѣ, кто недостаточно понявъ начальныя положенія, а потому совершенно не уяснивъ и силы ихъ слѣдствій и не отбросивъ привычныхъ имъ въ продолженіе многихъ лѣтъ предразсудковъ, не вовлекли бы дѣло въ пререканія, я переложилъ сущность этой книги въ рядъ предложеній, по математическому обычаю, такъ чтобы они читались лишь тѣми, кто сперва овладѣлъ началами. Въ виду же того, что въ началахъ предложеній весьма много и даже читателю знающему математику потребовалось бы слишкомъ много времени, я вовсе не настаиваю, чтобы онъ овладѣлъ ими всѣми. Достаточно, если кто тщательно прочтетъ опредѣленія, законы движенія и первыя три отдѣла первой книги, и затѣмъ перейдетъ къ этой третьей книгѣ о системѣ міра; изъ прочихъ же предложеній предыдущихъ книгъ, если того пожелаетъ, будетъ справляться въ тѣхъ, на которыя есть ссылки.

Правила умозаключеній въ физикѣ [179]).

Правило I.

Не должно принимать въ природѣ иныхъ причинъ сверхъ тѣхъ, которыя истинны и достаточны для объясненія явленій.

По этому поводу философы утверждаютъ, что природа ничего не дѣлаетъ напрасно, а было бы напраснымъ совершать многимъ то, что можетъ быть сдѣлано меньшимъ. Природа проста и не роскошествуетъ излишними причинами вещей.

---

[179]) Заглавіе въ подлинникѣ есть: «Regulae philosophandi», т.-е. «правила философствованія». Уже не разъ приходилось обращать вниманіе на тогдашнюю терминологію, удержавшуюся въ англійскомъ языкѣ и по теперешнее время. По этой терминологіи натуральной философіей называлась наука о природѣ вообще, въ частности физика, а подъ словомъ physics разумѣется медицина.

Въ тѣ времена была гораздо болѣе тѣсная снязь между «философіей» и «физикой» въ теперешнемъ смыслѣ этихъ словъ. Такъ Маклоренъ свой «Отчетъ о философскихъ открытіяхъ Ньютона» начинаетъ словами: «Описывать *явленія* природы, объяснять ихъ причины, намѣчать соотношенія и связи между этими причинами и изслѣдовать все устройство вселенной есть задача натуральной философіи»... «Но натуральная философія подчинена и высшаго рода цѣлямъ и должна главнымъ образомъ цѣниться потому, что она полагаетъ надежное основаніе естественной религіи и нравственной философіи, приводя удовлетворительнымъ образомъ къ познанію Творца и Вседержителя вселенной».

Философскія системы, въ особенности Декартова, тогда еще прочно царили надъ ученіемъ о природѣ и мірозданіи. Ньютоново воззрѣніе, что при изученіи природы надо отъ наблюдаемыхъ явленій восходить къ установленію причинъ, коими они объясняются, шло въ разрѣзъ съ Декартовымъ ученіемъ, согласно которому надо проницательностью ума впередъ установить первопричины и изъ нихъ выводить слѣдствія.

Съ другой стороны философія близко примыкала къ религіи и богословію; связь эта бывала не только свободною, но и насильственною, чему примѣромъ можетъ служить слѣдующее *«заявленіе о. Лесера и Жакье»*, предпосланное третьему тому ихъ изданія Ньютоновыхъ Началъ 1760 года. «Ньютонъ въ этой третьей книгѣ принимаетъ гипотезу о движеніи земли. Предложенія автора не могутъ быть объяснены иначе какъ на основаніи сдѣланной гипотезы. Такимъ образомъ мы вынуждены выступать отъ чужого имени. Сами же мы открыто заявляемъ, что мы слѣдуемъ постановленіямъ, изданнымъ верховными Первосвященниками противъ движенія земли». Это заявленіе не помѣшало однако ученымъ о.о. іезуитамъ къ 140 страницамъ, составляющимъ третью книгу «Началъ» Ньютона, добавить въ своемъ изданіи 540 страницъ толкованій, изъ которыхъ видно, что движеніе земли едва ли разсматривалось ими какъ гипотеза, отринутая постановленіями римскихъ папъ, и уже по одному этому невѣрная.

Правило II.

Поэтому, поскольку возможно должно приписывать тѣ же причины того же рода проявленіямъ природы.

Такъ, напримѣръ, дыханію людей и животныхъ, паденію камней въ *Европѣ* и въ *Америкѣ*, свѣту кухоннаго очага и солнца, отраженію свѣта на землѣ и на планетахъ.

Правило III.

Такія свойства тѣлъ, которыя не могутъ быть ни усиляемы, ни ослабляемы, и которыя оказываются присущими всѣмъ тѣламъ, надъ которыми возможно производить испытанія, должны быть почитаемы за свойства всѣхъ тѣлъ вообще.

Свойства тѣлъ постигаются не иначе какъ испытаніями; слѣдовательно, за общія свойства надо принимать тѣ, которыя постоянно при опытахъ обнаруживаются, и которыя, какъ не подлежащія уменьшенію, устранены быть не могутъ. Понятно, что въ противность ряду опытовъ не слѣдуетъ измышлять на авось какихъ-либо бреденъ, не слѣдуетъ также уклоняться отъ сходственности въ природѣ, ибо природа всегда проста и всегда сама съ собой согласна.

Протяженность тѣлъ распознается не иначе какъ нашими чувствами, тѣла же не всѣ чувствамъ доступны, но такъ какъ это свойство присуще всѣмъ тѣламъ доступнымъ чувствамъ, то оно и приписывается всѣмъ тѣламъ вообще. Опытъ показываетъ, что многія тѣла тверды. Но твердость цѣлаго происходитъ отъ твердости частей его, поэтому мы по справедливости заключаемъ, что не только у тѣхъ тѣлъ, которыя нашимъ чувствамъ представляются твердыми, но и у всѣхъ другихъ недѣлимыя частицы тверды. О томъ, что всѣ тѣла непроницаемы мы заключаемъ не по отвлеченному разсужденію, а по свидѣтельству чувствъ. Всѣ тѣла, съ которыми мы имѣемъ дѣло, оказываются непроницаемыми, отсюда мы заключаемъ, что непроницаемость есть общее свойство всѣхъ тѣлъ вообще. О томъ, что всѣ тѣла подвижны и вслѣдствіе нѣкоторыхъ силъ (которыя мы называемъ силами инерціи), продолжаютъ сохранять свое движеніе или покой, мы заключаемъ по этимъ свойствамъ тѣхъ тѣлъ, которыя мы видимъ. Протяженность, твердость, непроницаемость, подвижность и инертность цѣлаго, происходятъ отъ протяженности, твердости, непроницаемости, подвижности и инерціи частей, отсюда мы заключаемъ, что всѣ малѣйшія частицы всѣхъ тѣлъ протяженны, тверды, непроницаемы, подвижны, и обладаютъ инерціей. Таково основаніе всей физики. Далѣе, мы знаемъ по совершающимся явленіямъ, что дѣлимыя, но смежныя части тѣлъ могутъ быть разлучены другъ отъ друга, изъ математики же слѣдуетъ, что въ нераздѣльныхъ частицахъ могутъ быть мысленно различаемы еще меньшія

части. Однако неизвѣстно, могутъ ли эти различныя частицы, до сихъ поръ не раздѣленныя, быть раздѣлены и разлучены другъ отъ друга силами природы. Но если бы, хотя бы единственнымъ опытомъ, было установлено, что нѣкоторая недѣлимая частица при разломѣ твердаго и крѣпкаго тѣла подвергается дѣленію, то въ силу этого правила мы бы заключили, что не только дѣлимыя части разлучаемы, но что и недѣлимыя могутъ быть дѣлимы до безконечности, и дѣйствительно разлучены другъ отъ друга.

Наконецъ, такъ какъ опытами и астрономическими наблюденіями устанавливается, что всѣ тѣла по сосѣдству съ землею тяготѣютъ къ землѣ, и притомъ пропорціонально количеству матеріи каждаго изъ нихъ; такъ луна тяготѣетъ къ землѣ пропорціонально своей массѣ, и взаимно наши моря тяготѣютъ къ лунѣ, всѣ планеты тяготѣютъ другъ къ другу, подобно этому и тяготѣніе кометъ къ солнцу. На основаніи этого правила надо утверждать, что всѣ тѣла тяготѣютъ другъ къ другу. Всеобщее тяготѣніе подтверждается явленіями даже сильнѣе нежели непроницаемость тѣлъ, для которой по отношенію къ тѣламъ небеснымъ мы не имѣемъ никакого опыта и никакого наблюденія. Однако, я отнюдь не утверждаю, что тяготѣніе существенно для тѣлъ. Подъ врожденною силою я разумѣю единственно только силу инерціи. Она неизмѣнна. Тяжесть при удаленіи отъ земли уменьшается.

Правило IV.

Въ опытной физикѣ предложенія, выведенныя изъ совершающихся явленій помощію наведенія, несмотря на возможность противныхъ имъ предположеній, должны быть почитаемы за вѣрныя или въ точности или приближенно, пока не обнаружатся такія явленія, которыми они еще болѣе уточнятся или же окажутся подверженными исключеніямъ.

Такъ должно поступать, чтобы доводы наведенія не уничтожались предположеніями.

Явленія.

Явленіе I.

Спутники Юпитера описываютъ радіусами проведенными къ его центру площади пропорціональныя временамъ; времена ихъ обращеній по отношенію къ неподвижнымъ звѣздамъ находятся въ полукубическомъ отношеніи ихъ разстояній до того же центра.

Установлено астрономическими наблюденіями. Орбиты этихъ спутниковъ не отличаются чувствительно отъ круговъ одноцентренныхъ съ Юпитеромъ, и движенія ихъ по этимъ кругамъ представляются равномѣрными.

Въ томъ же, что времена обращеній находятся въ полукубическомъ отношеніи полудіаметровъ орбитъ, астрономы между собою согласны, что явствуетъ также изъ слѣдующей таблицы [180]).

Времена обращеній спутниковъ Юпитера.

$1^{c}18^{ч}27^{м}34^{c}$; $3^{c}13^{ч}13^{м}42^{c}$; $7^{c}3^{ч}42^{м}36^{c}$; $16^{c}16^{ч}32^{м}9^{c}$.

Разстоянія спутниковъ отъ центра Юпитера.

По наблюденіямъ.	I	II	III	IV	
Борелли	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	полудіам. Юпитера.
Таунлей микрометромъ . .	5,52	8,78	13,47	24,72	
Кассини телескопомъ . . .	5	8	13	23	
Кассини по зат. спутниковъ	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
По временамъ обращеній. .	5,667	9,017	14,384	25,299	

Г. *Поундъ* опредѣлилъ элонгаціи спутниковъ Юпитера и діаметръ его превосходными микрометрами слѣдующимъ образомъ. Наибольшая геліоцентрическая элонгація четвертаго спутника отъ центра Юпитера была взята микрометромъ телескопа 15-футовой длины, и при среднемъ разстояніи Юпитера до земли, оказалась равной 8′16″. Элонгація третьяго спутника была взята микрометромъ телескопа 123 футовъ длины и при томъ же разстояніи Юпитера до земли оказалась равной 4′42″. Наибольшія элонгаціи двухъ прочихъ спутниковъ при томъ же разстояніи разсчитанныя по временамъ обращенія оказываются 2′56″47‴ и 1′51″6‴.

Діаметръ Юпитера часто брался микрометромъ 123-футоваго телескопа и по приведеніи къ среднему разстоянію Юпитера до земли всегда оказывался меньше 40″, никогда не меньше 38″, чаще всего въ 39″. При наблюденіи болѣе короткими телескопами этотъ діаметръ оказывается въ 40″ или 41″, ибо свѣтъ Юпитера вслѣдствіе неодинаковой преломляемости нѣсколько расширяется, расширеніе же это составляетъ меньшую долю діаметра Юпитера въ болѣе длинныхъ и совершенныхъ телескопахъ нежели въ болѣе короткихъ и менѣе совершенныхъ. Тѣмъ же длиннымъ телескопомъ наблюдались времена прохожденій двухъ спутниковъ, перваго и третьяго, черезъ дискъ Юпитера отъ начала вхожденія до начала выхожденія и отъ полнаго вхожденія до полнаго выхожденія. Діаметръ Юпитера

[180]) Чтобы судить, въ какой мѣрѣ точно были извѣстны главнѣйшіе элементы солнечной системы во времена Ньютона, приводимъ для пла-

при среднемъ его разстоянiи до земли оказывается равнымъ по прохожденiю перваго спутника $37\frac{1}{8}''$ по прохожденiю третьяго $37\frac{3}{8}''$. Наблюдалось также

нетъ элементы, принятые Леверрье въ его Recherches Astronomiques, и для спутниковъ элементы, показанные въ Annuaire du Bureau des Longitudes за 1912 г.

Планеты.	Времена звѣздныхъ оборотовъ.	Большiя полуоси орбитъ.	Массы	
			По Леверрье.	По Bureau des Long.
Меркурiй	87с,9692580	0,3870987	1 : 3000000	1 : 6000000
Венера........	224,7007869	0,7233322	1 : 401847	1 : 408000
Земля	365,2563744	1,0000000	1 : 354936	1 : 333432
Марсъ........	686,9796458	1,523621	1 : 2680337	1 : 3093500
Юпитеръ	4332,5848212	5,202798	1 : 1050	1 : 1047,355
Сатурнъ.......	10759,2198174	9,538852	1 : 3512	1 : 3501,6

Спутники Юпитера.

	I	II	III	IV
Врем. звѣздн. обор.	1с18ч27м33с,5	3с13ч13м42с,0	7с3ч42м33с,4	16с16ч32м11с,2
Средн. разстоянiя .	5,906	9,397	14,989	26,364

Спутники Сатурна.

№№	Кѣмъ и когда открытъ.	Времена звѣздныхъ оборотовъ.	Среднiя разстоянiя.	Приведенныя среднiя разстоянiя.
I	Гершель въ 1789 г.	0с22ч37м5с,3	3,07	1,25
II	Гершель въ 1789 г.	1 8 53 6,8	3,94	1,56
III	Кассини въ 1684 г.	1 21 18 26,2	4,87	1,92
IV	Кассини въ 1684 г.	2 17 41 9,5	6,25	2,47
V	Кассини въ 1672 г.	4 12 25 12,2	8,73	3,45
VI	Гюйгенсъ въ 1655 г. ...	15 22 41 27,0	20,22	8,00
VII	Бондъ въ 1848 г.	21 6 38 23,9	24,49	9,70
VIII	Кассини въ 1671 г.	79 7 56 22,7	58,91	22,90

время прохожденія тѣни перваго спутника по диску Юпитера, получаемый отсюда діаметръ Юпитера при среднемъ его разстояніи отъ земли оказался около 37″. Мы принимаемъ этотъ діаметръ въ $37\frac{1}{4}''$, тогда наибольшія элонгаціи перваго, второго, третьяго и четвертаго спутниковъ составятъ соотвѣтственно: 5,965; 9,494; 15,141 и 26,63 полудіаметра Юпитера.

Явленіе II.

Спутники Сатурна описываютъ радіусами проведенными къ его центру площади пропорціонильныя временамъ, и времена ихъ обращеній по отношенію къ неподвижнымъ звѣздамъ находятся въ полукубическомъ отношеніи ихъ разстояній до того же центра.

Ибо по опредѣленіямъ *Кассини* этихъ разстояній и временъ обращеній они таковы:

Времена обращеній спутниковъ Сатурна.	Разстоянія спутниковъ до центра Сатурна въ полудіаметрахъ кольца.	
	По наблюденіямъ.	По временамъ обращенія.
$1^{с}21^{ч}18^{м}27^{с}$	$1\frac{19}{20}$	1,93
2 17 41 22	$2\frac{1}{2}$	2,47
4 12 25 12	$3\frac{1}{2}$	3,45
15 22 41 14	8	8
79 7 48 00	24	23,35

Наибольшая элонгація четвертаго спутника отъ центра Сатурна, обыкновенно опредѣляемая по наблюденіямъ, оказывается приблизительно равной восьми полудіаметрамъ кольца. При опредѣленіи же этой наибольшей элонгаціи превосходнѣйшимъ микрометрамъ Гюйгенсовскаго телескопа 123 футовой длины она оказалась въ 8,7 полудіаметра. Разсчитанныя по временамъ обращеній и этой элонгаціи величины наибольшихъ элонгацій прочихъ спутниковъ составятъ въ полудіаметрахъ кольца: 2,1; 2,69; 3,75; 8,7 и 25,35. Діаметръ Сатурна при наблюденіяхъ тѣмъ же телескопомъ составлялъ $\frac{3}{7}$ діаметра кольца, который 28 и 29 мая 1719 года оказался равнымъ 43″. Отсюда слѣдуетъ, что діаметръ кольца при среднемъ разстояніи Сатурна отъ земли равенъ 42″ и діаметръ Сатурна 18″. Такъ это представляется при наблюденіи въ наиболѣе длинные и лучшіе телескопы, ибо кажущіяся величины небесныхъ тѣлъ при длинныхъ телескопахъ находятся въ бóльшемъ отношеніи къ расширенію свѣта близъ краевъ этихъ тѣлъ нежели при телескопахъ короткихъ. Если отбросить всѣ свѣтовыя погрѣшности, то діаметръ Сатурна не болѣе 16″.

Явленіе III.

Пять главныхъ планетъ: Меркурій, Венера, Марсъ, Юпитеръ и Сатурнъ охватываютъ своими орбитами солнце.

Что Меркурій и Венера обращаются вокругъ солнца доказывается ихъ фазами подобными луннымъ. Когда они сіяютъ полнымъ дискомъ, они расположены за солнцемъ, когда половиннымъ—въ области солнца, когда серповиднымъ—ближе солнца, иногда они проходятъ и по его диску подобно пятнамъ. Что Марсъ обходитъ вокругъ солнца явствуетъ изъ полноты его диска близъ соединеній съ солнцемъ и по горбатому его виду въ квадратурахъ. То же самое доказывается относительно Юпитера и Сатурна всегда находящихся въ полной фазѣ, а что свѣтъ ихъ сіянія заимствуется отъ солнца слѣдуетъ изъ того, что тѣнь ихъ спутниковъ иногда отбрасывается на диски ихъ.

Явленіе IV.

Звѣздныя времена оборотовъ пяти главныхъ планетъ, а также и солнца вокругъ земли или земли вокругъ солнца находятся въ полукубическомъ отношеніи ихъ среднихъ разстояній отъ солнца.

Это найденное *Кэплеромъ* отношеніе признается всѣми. При этомъ времена оборотовъ и размѣры орбитъ тѣ же самыя, обращается ли солнце вокругъ земли и земля вокругъ солнца. Всѣ астрономы согласны между собою относительно временъ оборотовъ, величины же орбитъ были опредѣлены тщательнѣйшимъ образомъ изъ наблюденій *Кэплеромъ* и *Буллiо* *) — среднія разстоянія соотвѣтствующія временамъ оборотовъ не отличаются чувствительно отъ найденныхъ ими, по большей же части заключаются между ихъ опредѣленіями какъ можно видѣть изъ слѣдующей таблицы.

Планеты.	Времена оборотовъ.	Среднія разстоянія.		
		По Кэплеру.	По Булліо.	По временамъ оборотовъ.
Сатурнъ	10759с,275	951000	954198	954006
Юпитеръ. . . .	4332,514	519650	522520	520096
Марсъ.	686,9785	152350	152350	152369
Земля	365,2565	100000	100000	100000
Венера	224,6176	72400	72398	72333
Меркурій . . .	87,9692	38806	38585	38710

*) Въ текстѣ Bullialdus — олатыненная фамилія французскаго астронома Bouillaud.

О разстояніяхъ Меркурія и Венеры до солнца спора быть не можетъ, ибо они опредѣляются по наибольшимъ элонгаціямъ этихъ планетъ отъ солнца. Всякій же споръ о разстояніяхъ верхнихъ планетъ до солнца устраняется затменіями спутниковъ Юпитера, ибо этими затменіями опредѣляется положеніе тѣни отбрасываемой Юпитеромъ, откуда получается затѣмъ геліоцентрическая долгота Юпитера, по сопоставленіи же долготъ геліоцентрической и геоцентрической опредѣляется разстояніе Юпитера.

Явленіе V.

Главныя планеты радіусами проведенными къ землѣ описываютъ площади совершенно не пропорціональныя времени, радіусы же проведенные къ солнцу пробѣгаютъ площади пропорціональныя времени.

Ибо, по отношенію къ землѣ ихъ движеніе, то прямое, то онѣ находятся въ стояніяхъ, то движутся попятно; по отношенію же къ солнцу ихъ движеніе всегда прямое и притомъ почти равномѣрное, лишь немного быстрѣе въ перигеліяхъ и медленнѣе въ афеліяхъ, такъ что описаніе площадей равномѣрное. Это предложеніе извѣстно астрономамъ и особенно доказательно для Юпитера по затменію его спутниковъ, при помощи каковыхъ затменій, какъ уже сказано, могутъ быть опредѣляемы геліоцентрическія долготы и разстоянія этой планеты.

Явленіе VI.

Луна описываетъ радіусомъ проводимымъ къ центру земли площади пропорціональныя времени.

Это слѣдуетъ изъ сопоставленія видимаго движенія луны съ ея видимымъ діаметромъ. Впрочемъ, движеніе луны нѣсколько возмущается силою солнца, но въ этихъ явленіяхъ я пренебрегаю нечувствительными мелочами погрѣшностей.

Предложенія.

Предложеніе I. Теорема I.

Силы, которыми спутники Юпитера постоянно отклоняются отъ прямолинейнаго движенія и удерживаются на своихъ орбитахъ, направлены къ центру Юпитера и обратно пропорціональны квадратамъ разстояній мѣстъ до этого центра.

Первая часть предложенія слѣдуетъ изъ явленія перваго и предложеній второго или третьяго первой книги; послѣдняя часть изъ явленія перваго и слѣдствія шестого четвертаго предложенія той же книги.

То же самое разумѣй и о спутникахъ Сатурна, на основаніи явленія втораго.

Предложеніе II. Теорема II.

Силы, которыми главныя планеты постоянно отклоняются отъ прямолинейнаго движенія и удерживаются на своихъ орбитахъ, направлены къ солнцу и обратно пропорціональны квадратамъ разстояній до центра его.

Первая часть предложенія слѣдуетъ на основаніи явленія пятаго изъ второго предложенія первой книги, послѣдняя часть на основаніи явленія четвертаго изъ четвертаго предложенія той же книги,

Точнѣйшимъ же образомъ эта часть предложенія доказывается неподвижностью афеліевъ, ибо самое малѣйшее отклоненіе отъ обратной пропорціональности квадратамъ разстояній (по слѣд. 1 предл. XLV кн. 1) должно производить замѣтное перемѣщеніе апсидъ для каждаго отдѣльнаго оборота, и огромное для многихъ.

Предложеніе III. Теорема III.

Сила, которою луна удерживается на своей орбитѣ, направлена къ землѣ и обратно пропорціональна квадратамъ разстояній мѣстъ до центра земли.

Первая часть этого утвержденія слѣдуетъ изъ явленія шестого и предложеній второго или третьяго книги первой, вторая часть изъ весьма медленнаго движенія луннаго апогея, ибо это движеніе, которое за каждый оборотъ составляетъ около $3°3'$ въ попутную сторону, можетъ быть пренебрежено. Изъ слѣдствія же 1 предл. XLV кн. 1 явствуетъ, что если отношеніе разстоянія луны до центра земли къ полудіаметру послѣдней равно $D:1$, то сила, отъ которой происходило бы такое движеніе, была бы обратна пропорціонально $D^{2\frac{4}{243}}$, т.-е. такой степени разстоянія, показатель который равенъ $2\frac{4}{243}$, слѣдовательно, немногимъ болѣе 2, иначе, въ отношеніи, которое въ $59\frac{3}{4}$ раза ближе къ квадратному, нежели къ кубическому. На самомъ же дѣлѣ это движеніе происходитъ отъ дѣйствія солнца (какъ будетъ показано ниже) и поэтому, здѣсь имъ можно пренебречь. Дѣйствіе солнца, поскольку оно оттягиваетъ луну отъ земли, приблизительно, пропорціонально разстоянію луны до земли, и слѣдовательно (по сказанному въ сл. 2 предл. XLV, кн. 1) относится къ центростремительной силѣ луны кругло какъ 2 къ 357,45 или какъ 1 къ 178,725. Если пренебречь такою незначительною силою солнца, то остающаяся сила, которою луна удерживается на своей орбитѣ, будетъ обратно пропорціональна D^2. Это устанавливается еще полнѣе, сопоставляя эту силу съ силою тяжести, какъ это сдѣлано въ слѣдующемъ предложеніи.

Слѣдствіе. Если среднюю центростремительную силу, которою луна удерживается на своей орбитѣ, сперва увеличить въ отношеніи 177,725

къ 178,725, затѣмъ въ отношеніи квадрата средняго разстоянія центра луны до центра земли къ квадрату полудіаметра земли, то получится лунная центростремительная сила у поверхности земли, предполагая, что при приближеніи къ землѣ сила эта увеличивается въ обратномъ отношеніи квадратовъ разстояній.

Предложеніе IV. Теорема IV.

Луна тяготѣетъ къ землѣ, и силою тяготѣнія постоянно отклоняется отъ прямолинейнаго движенія и удерживается на своей орбитѣ.

Среднее разстояніе луны до земли въ сизигіяхъ составляетъ по Птоломею и многимъ астрономамъ 59 полудіаметровъ земли, по Венделину и Гюйгенсу 60, по Копернику $60\frac{1}{3}$, по Стриту $60\frac{2}{5}$, по Тихо $56\frac{1}{2}$. Но Тихо и всѣ тѣ, кто слѣдуютъ его таблицамъ рефракціи, принимая для солнца и луны (въ полную противность природѣ свѣта) рефракцію больше нежели для неподвижныхъ звѣздъ на $4'$ или $5'$, настолько же увеличивали параллаксъ луны, т.-е. почти на двѣнадцатую или пятнадцатую ея часть. Если исправить эту ошибку, то разстояніе получится около $60\frac{1}{2}$ земныхъ полудіаметровъ, т.-е. какъ оно дается и другими астрономами. Примемъ среднее разстояніе въ сизигіяхъ равнымъ 60 полудіаметрамъ; время звѣзднаго оборота луны равно 27 суткамъ, 7 ч. 43 м., какъ это установлено астрономами, наконецъ, окружность земли равна 123249600 парижскихъ фута по опредѣленіямъ основаннымъ на французскихъ измѣреніяхъ. Если бы луна была лишена всякаго движенія и подъ дѣйствіемъ той полной силы, которою (по слѣд. пред. III) она удерживается на своей орбитѣ, стала бы падать на землю, то при такомъ своемъ паденіи она прошла бы въ первую минуту путь равный $15\frac{1}{12}$ париж. фута. Это можно вывести вычисленіемъ или на основаніи XXXVI предл. 1-ой книги, или, что приводитъ къ тому же, по сл. 9 IV предл. той же книги, ибо синусъ верзусъ дуги описываемый луною при среднемъ ея движеніи въ одну минуту, и при разстояніи шестидесяти полудіаметровъ, равенъ приблизительно $15\frac{1}{12}$ париж. фута или точнѣе 15 футъ 1 дюймъ $1\frac{4}{9}$ линіи. Такъ какъ при приближеніи къ землѣ сила эта возрастаетъ въ обратномъ отношеніи квадратовъ разстояній, то у поверхности земли она будетъ 60 . 60 разъ болѣе, нежели на орбитѣ луны; тѣло, падающее подъ дѣйствіемъ такой силы въ нашихъ мѣстахъ, стало бы описывать въ первую минуту 60 . 60 . $15\frac{1}{12}$ пар. футъ, въ первую же секунду $15\frac{1}{12}$ или точнѣе 15 футъ 1 дюймъ $1\frac{4}{9}$ линій. Дѣйствительно, тяжелыя тѣла и падаютъ на землю подъ вліяніемъ такой силы, ибо длина маятника дѣлающаго въ широтѣ Парижа свои размахи въ одну секунду, равна 3 фута $8\frac{1}{2}$ линій париж., какъ это наблюдалъ Гюйгенсъ. Отношеніе же высоты, проходимой тѣломъ при паденіи въ первую секунду, къ длинѣ такого маятника, равно квадрату отношенія окружности къ діаметру (какъ показано также Гюйгенсомъ), слѣдовательно, эта высота равна 15 футъ 1 дюймъ $1\frac{7}{9}$ линіи пар. Итакъ, сила, которою

луна удерживается на своей орбитѣ, если ее опустить до поверхности земли, становится равной силѣ тяжести у насъ, поэтому (по правиламъ I и II) она и есть та самая сила, которую мы называемъ тяжестью или тяготѣніемъ. Ибо если бы тяжесть была бы отличною отъ нея силою, то тѣла, стремясь къ землѣ подъ совокупнымъ дѣйствіемъ обѣихъ силъ, падали бы вдвое скорѣе и описывали бы въ первую секунду своего паденія $30\frac{1}{6}$ пар. фута, что совершенно противорѣчитъ опыту.

Этотъ разсчетъ основанъ на предположеніи, что земля находится въ покоѣ, если же принять, что земля и луна движутся вокругъ солнца и вмѣстѣ съ тѣмъ обращаются около общаго центра тяжести, то при сохраненіи закона тяготѣнія разстояніе центровъ луны и земли будетъ $60\frac{1}{2}$ полудіаметровъ земли, какъ то можно опредѣлить по разсчету основанному на предл. LX, 1-ой книги [181]).

Поученіе.

Доказательство этого предложенія можетъ быть объяснено подробнѣе слѣдующимъ образомъ. Если бы около земли обращалось нѣсколько лунъ, подобно тому, какъ около Юпитера и Сатурна, то времена ихъ обращеній (на основаніи наведенія) слѣдовали бы планетнымъ законамъ открытымъ *Кэплеромъ* и поэтому ихъ центростремительныя силы были бы по пред. I обратно пропорціональны квадратамъ разстояній. Если бы наинизшая изъ этихъ лунъ была малой и почти что касалась бы вершинъ высочайшихъ горъ, то центростремительная сила, которою она удерживалась бы на своей орбитѣ (согласно предыдущему разсчету) равнялась бы приблизительно силѣ тяжести на вершинѣ этихъ горъ; если бы этотъ спутничекъ лишить его поступательнаго движенія по орбитѣ, то вслѣдствіе отсутствія центробѣжной силы, отъ которой онъ продолжаетъ оставаться на своей орбитѣ, онъ подъ дѣйствіемъ предыдущей сталъ бы падать на землю и притомъ съ такою же скоростью, съ какою на вершинахъ этихъ горъ падаютъ тяжелыя тѣла, ибо въ обоихъ случаяхъ дѣйствующія силы равны. Если бы та сила, подъ дѣйствіемъ которой падалъ бы этотъ маленькій низшій спутничекъ, была отличною отъ силы тяжести, спутничекъ же этотъ, подобно всѣмъ тѣламъ тяготѣлъ бы къ землѣ, одинаково съ тѣлами находящимися на вершинахъ горъ, то подъ совокупнымъ дѣйствіемъ обѣихъ

---

[181]) Обозначимъ массу земли черезъ S, массу луны черезъ P, тогда на основаніи указаннаго въ текстѣ предложенія упомянутое разстояніе будетъ $60\sqrt[3]{\frac{S+P}{P}}$. Въ слѣдствіи 4 предложенія XXXVII этой книги Ньютонъ находитъ, что отношеніе $S:P = 39,788:1$. Слѣдовательно будетъ:

$$60\sqrt[3]{\frac{S+P}{S}} = 60\sqrt[3]{\frac{40,788}{39,788}} = 60,5.$$

силъ онъ падалъ бы вдвое быстрѣе. Поэтому, такъ какъ обѣ силы, т.-е. дѣйствующая на тяжелыя тѣла и дѣйствующая на спутничекъ, направлены къ центру земли и между собою подобны и равны, онѣ тѣ же самыя и имѣютъ ту же самую причину (по правиламъ I и II). Слѣдовательно та сила, которою луна удерживается на своей орбитѣ, есть та же самая, которую мы называемъ силою тяжести, ибо въ противномъ случаѣ, или сказанный спутничекъ на вершинахъ горъ не имѣлъ бы тяжести, или же падалъ бы вдвое скорѣе, нежели падаютъ тяжелыя тѣла.

Предложенiе V. Теорема V.

Планеты обращающiяся около Юпитера тяготѣютъ къ Юпитеру, обращающiяся около Сатурна къ Сатурну, обращающiяся около солнца къ солнцу, и силою этого тяготѣнiя постоянно отклоняются отъ прямолинейнаго пути и удерживаются на криволинейныхъ орбитахъ.

Ибо обращенiя спутниковъ вокругъ Юпитера и Сатурна, обращенiя Меркурiя и Венеры, и остальныхъ планетъ около солнца суть явленiя того же рода какъ и обращенiе луны вокругъ земли, поэтому (прав. II) ихъ происхожденiе надо приписывать одинаковаго рода причинамъ, въ особенности послѣ того, какъ доказано, что силы, подъ дѣйствiемъ которыхъ эти обращенiя совершаются, направлены къ центру Юпитера, Сатурна или солнца и при удаленiи отъ Юпитера, Сатурна и солнца убываютъ въ томъ же отношенiи, и по тому же закону, въ какомъ убываетъ сила тяжести при удаленiи отъ земли.

Слѣдствiе 1. Слѣдовательно, тяготѣнiе существуетъ на всѣхъ планетахъ, ибо никто не сомнѣвается, что Венера, Меркурiй и прочiя планеты суть тѣла такого же рода, какъ Юпитеръ и Сатурнъ. А такъ какъ всякое притяженiе, по третьему закону движенiя, всегда взаимное, то Юпитеръ тяготѣетъ ко всѣмъ своимъ спутникамъ, Сатурнъ къ своимъ, земля къ лунѣ, солнце ко всѣмъ главнымъ планетамъ.

Слѣдствiе 2. Тяготѣнiе, направляющееся къ любой изъ планетъ, обратно пропорцiонально квадратамъ разстоянiй мѣстъ до центра ея.

Слѣдствiе 3. Всѣ планеты тяготѣютъ другъ къ другу по слѣд. 1 и 2. Такимъ образомъ, Юпитеръ и Сатурнъ близъ соединенiй притягиваясь другъ къ другу, чувствительно возмущаютъ свои движенiя, солнце возмущаетъ движенiе луны, солнце и луна возмущаютъ наши земныя моря, какъ то будетъ пояснено ниже.

Поученiе.

До сихъ поръ мы называли ту силу, которою небесныя тѣла удерживаются на своихъ орбитахъ центростремительною, но такъ какъ теперь показано, что это есть тяготѣнiе, то ниже мы будемъ ее такъ называть, ибо причина той центростремительной силы, которою луна удерживается на

своей орбитѣ, по прав. I, II и IV, должна быть распространяема и на всѣ прочія планеты.

Предложеніе VI. Теорема VI.

Всѣ тѣла тяготѣютъ къ каждой отдѣльной планетѣ и вѣса тѣлъ на всякой планетѣ при одинаковыхъ разстояніяхъ отъ ея центра пропорціональны массамъ этихъ планетъ.

Паденіе всѣхъ тяжелыхъ тѣлъ на землю съ одинаковой высоты (выключивъ неравное замедленіе, происходящее отъ ничтожнаго сопротивленія воздуха) совершается въ одинаковое время, какъ это уже наблюдено другими, точнѣйшимъ же образомъ это можетъ быть установлено по равенству временъ качаній маятниковъ. Я произвелъ такое испытаніе для золота, серебра, свинца, стекла, песку, обыкновенной соли, дерева, воды, пшеницы. Я заготовилъ двѣ круглыхъ деревянныхъ кадочки, равныя между собою, одну изъ нихъ я заполнилъ деревомъ, въ другой же я помѣстилъ такой же точно грузъ изъ золота (насколько смогъ точно) въ центрѣ качаній. Кадочки подвѣшенныя на равныхъ нитяхъ, одиннадцати футъ длиною образовали два маятника, совершенно одинаковыхъ по вѣсу, формѣ и сопротивленію воздуха; будучи помѣщены рядомъ, они при равныхъ качаніяхъ шли взадъ и впередъ вмѣстѣ, въ продолженіе весьма долгаго времени. Слѣдовательно, количество вещества (масса) въ золотѣ (по слѣд. 1 и 6 предл. XXIV кн. II) относилось къ количеству вещества въ деревѣ, какъ дѣйствіе движущей силы на все золото къ ея дѣйствію на все дерево, т.-е. какъ вѣсъ одного къ вѣсу другого. То же самое было и для прочихъ тѣлъ. Для тѣлъ одинаковаго вѣса разность количествъ вещества (массъ), даже меньшая одной тысячной доли полной массы, могла бы быть съ ясностью обнаружена этими опытами [182]).

Конечно, не можетъ быть сомнѣнія, что природа тяжести на другихъ планетахъ такова же, какъ и на землѣ. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ,

---

[182]) Этотъ основной опытъ Ньютона, которымъ онъ устанавливаетъ пропорціональность между массою и вѣсомъ, причемъ отступленіе въ $\frac{1}{1000}$ отъ этой пропорціональности обнаружилось бы, былъ повторенъ съ особенными предосторожностями и тщательностью Бесселемъ въ 1828 году. Бессель изслѣдовалъ маятники, для груза которыхъ онъ бралъ: три сорта латуни, желѣзо, цинкъ, свинецъ, серебро, золото, два сорта метеорнаго желѣза, мраморъ, глину, кварцъ. Результатъ его тотъ, что длина секунднаго маятника въ Кенигсбергѣ, составляющая 440,8154 линіи при отдѣльныхъ опредѣленіяхъ, отличалась не болѣе 0,01 линіи отъ указанной средней, причемъ эти отклоненія имѣютъ характеръ случайныхъ погрѣшностей, а не систематическихъ и, значитъ, пропорціональность массы вѣсу подтверждается со всею точностью, которая могла быть достигнута. (F. W. Bessel. Versuche über die Kraft mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht. Abhandlungen der Akademie zu Berlin. 1830).

что земныя тѣла подняты до орбиты луны и пущены вмѣстѣ съ луною, также лишенной всякаго движенія, падать на землю; на основаніи уже доказаннаго несомнѣнно, что въ одинаковыя времена они пройдутъ одинаковыя съ луною пространства, ибо ихъ массы такъ относятся къ массѣ луны, какъ ихъ вѣса къ вѣсу ея. Такъ какъ времена обращеній спутниковъ Юпитера находятся въ полукубическомъ отношеніи ихъ разстояній до центра Юпитера, то ускорительныя силы ихъ тяготѣній къ Юпитеру обратно пропорціональны квадратамъ разстояній до центра его, поэтому въ равныхъ отъ Юпитера разстояніяхъ эти ускорительныя силы равны, вслѣдствіе чего тѣла при паденіи съ одинаковыхъ высотъ въ равныя времена будутъ проходить и равные пути, подобно тому, какъ это совершается у насъ на землѣ. На основаніи такого же разсужденія слѣдуетъ, что планеты, обращающіяся вокругъ солнца, будучи пущены въ равныхъ отъ солнца разстояніяхъ, описывали бы при своемъ паденіи на солнце въ равныя времена равныя пространства. Но силы, которыми неравныя массы ускоряются одинаково, пропорціональны массамъ, т.-е. тяготѣнія пропорціональны массамъ планетъ. Что тяготѣніе Юпитера и его спутниковъ къ солнцу пропорціонально ихъ массамъ, слѣдуетъ (по слѣд. 3, пред. LXV, кн. 1) кромѣ этого и изъ высшей степени правильнаго движенія этихъ спутниковъ, ибо, если бы которые нибудь изъ нихъ притягивались бы къ солнцу сильнѣе, нежели прочіе по пропорціи массъ ихъ, то (по слѣд. 2, пр. LXV, кн. 1) движеніе спутниковъ вслѣдствіе неодинаковости притяженій было бы возмущено. Такъ, если бы при одинаковыхъ отъ солнца разстояніяхъ который нибудь изъ спутниковъ тяготѣлъ бы къ солнцу сильнѣе, нежели бы слѣдовало по массѣ его, чѣмъ Юпитеръ соотвѣтственно своей массѣ въ какомъ-либо заданномъ отношеніи, положимъ $d:e$, то разстояніе между центромъ солнца и центромъ орбиты спутника было бы постоянно больше, нежели разстояніе между центромъ солнца и центромъ Юпитера въ отношеніи приблизительно равномъ $\sqrt{d}:\sqrt{e}$, какъ найдено мною при помощи нѣкотораго разсчета [183]).

[183]) Это соотношеніе получается, если уравнять среднюю величину силы притяженія солнцемъ единицы массы спутника таковой же притяженія солнцемъ Юпитера. За первую изъ этихъ силъ принимается приближенно величина притяженія солнцемъ спутника въ разстояніи, равномъ разстоянію центра описываемой имъ орбиты до солнца. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая разстояніе Юпитера до солнца черезъ a, разстояніе центра орбиты спутника до солнца черезъ $a+\varepsilon$ и черезъ μ силу притяженія солнцемъ единицы массы Юпитера при разстояніи равномъ единицѣ, будемъ имѣть, что притяженіе для Юпитера будетъ $\frac{\mu}{a^2}$, притяженіе для спутника $\frac{d}{e}\cdot\frac{\mu}{(a+\varepsilon)^2}$, значитъ по условію должно быть

$$\frac{1}{(d+\varepsilon)^2}\cdot\frac{d}{e}=\frac{1}{a^2}.$$

Откуда

$$(a+\varepsilon):a=\sqrt{a}:\sqrt{e}.$$

Если же тяготѣніе спутника къ солнцу было бы меньше въ указанномъ отношеніи $d:e$, то разстояніе центра орбиты спутника до солнца было бы меньше, нежели разстояніе центра Юпитера до солнца въ отношеніи $\sqrt{d}:\sqrt{e}$. Поэтому, если въ равныхъ разстояніяхъ отъ солнца тяготѣніе котораго нибудь изъ спутниковъ къ солнцу было бы больше или меньше ускоряющей силы тяготѣнія Юпитера къ солнцу хотя бы на одну тысячную долю полной величины ея, то разстояніе центра орбиты спутника отъ солнца было бы больше или меньше разстоянія центра Юпитера отъ солнца на $\frac{1}{2000}$ полнаго разстоянія, т.-е. на одну пятую разстоянія крайняго спутника отъ центра Юпитера, что составило бы весьма замѣтный эксцентриситетъ орбиты. Но орбиты спутниковъ концентричны съ Юпитеромъ, поэтому ускорительныя силы притяженія Юпитера и спутниковъ къ солнцу равны между собою. На основаніи такого же разсужденія слѣдуетъ, что притяженія Сатурна и его спутниковъ къ солнцу, при равныхъ отъ солнца разстояніяхъ пропорціональны массамъ ихъ, также и притяженія луны и земли къ солнцу или равны нулю, или же въ точности пропорціональны массамъ ихъ, а что онѣ таковы слѣдуетъ изъ предл. V, слѣд. 1 и 3.

Далѣе тяготѣніе отдѣльныхъ частей каждой планеты къ какой-либо другой пропорціональны массамъ этихъ частей, ибо, если бы нѣкоторыя части тяготѣли болѣе, другія менѣе, нежели соотвѣтствуетъ ихъ массамъ, то вся планета, сообразно роду преобладающихъ частицъ тяготѣла бы болѣе или менѣе, нежели соотвѣтственно полной массѣ своей. При этомъ безразлично, наружныя ли это части или внутреннія. Если бы, напримѣръ, вообразить, что наши земныя тѣла подняты до орбиты луны и сравниваются съ ея массою, то если бы вѣса этихъ тѣлъ находились къ вѣсамъ наружныхъ частей луны въ отношеніи массъ, къ вѣсамъ же внутреннихъ частей въ бо̀льшемъ или меньшемъ отношеніи, то они были бы и въ большемъ или меньшемъ отношеніи и къ массѣ всей луны, что противно доказанному выше.

Слѣдствіе 1. Слѣдовательно вѣсъ тѣлъ не зависитъ отъ формы ихъ или строенія ихъ, ибо, если бы онъ могъ измѣняться вмѣстѣ съ формою, то онъ былъ бы больше или меньше при разной формѣ и равной массѣ, что совершенно противорѣчитъ опыту.

Слѣдствіе 2. Всѣ тѣла вообще, находящіяся около земли, тяготѣютъ къ землѣ и вѣса всѣхъ тѣлъ равноудаленныхъ отъ центра земли пропорціональны ихъ массамъ. Это свойство принадлежитъ всѣмъ тѣламъ, надъ которыми можно производить испытанія, поэтому по прав. III его должно приписать всѣмъ тѣламъ вообще. Если бы эфиръ или какое-либо иное тѣло или совершенно былъ бы лишенъ тяжести, или же тяготѣлъ бы менѣе, нежели соотвѣтственно массѣ его, тогда (согласно *Аристотелю*, *Декарту* и другимъ), не отличаясь отъ другихъ тѣлъ ничѣмъ, развѣ только формою матеріи, онъ могъ бы измѣненіемъ формы быть постепенно переведенъ въ тѣло такихъ же свойствъ, какъ и тѣ, которыя

тяготѣютъ въ точности пропорціонально своимъ массамъ, и наоборотъ, вполнѣ тяжелыя тѣла при постепенномъ измѣненіи формы тогда могли бы постепенно утрачивать свой вѣсъ, и слѣдовательно вѣса тѣлъ зависѣли бы отъ формы ихъ, въ противность доказанному въ предыдущемъ слѣдствіи.

Слѣдствіе 3. Не всѣ пространства заполнены въ равной мѣрѣ. Ибо, если бы всѣ пространства были бы равно заполнены, то удѣльный вѣсъ жидкости заполняющей область воздуха, вслѣдствіе весьма большей плотности матеріи, не уступалъ бы удѣльному вѣсу ртути или золота, или же какого иного самаго плотнаго тѣла, и поэтому, ни золото, ни какое-либо иное тѣло не могло бы падать въ воздухѣ, такъ какъ тѣла совершенно не опускаются внизъ въ жидкости, если только они не бо̀льшаго удѣльнаго вѣса. Если же количество вещества заключающееся въ данномъ пространствѣ можетъ быть уменьшаемо помощію какого-либо разрѣженія, то почему бы оно не могло быть уменьшаемо и до безконечности.

Слѣдствіе 4. Если всѣ прочныя частицы всѣхъ тѣлъ одной и той же плотности и, какъ не обладающія порами, не могутъ разрѣжаться, то пустота существуетъ. Я называю одинаковой плотности такія тѣла, для коихъ силы инерціи пропорціональны объему.

Слѣдствіе 5. Сила тяжести иного рода, нежели сила магнитная, ибо магнитное притяженіе не пропорціонально притягиваемой массѣ: одни тѣла притягиваются сильнѣе, другія—слабѣе, большая часть совсѣмъ не притягивается. Магнитная сила въ томъ же самомъ одномъ тѣлѣ можетъ быть увеличиваема и уменьшаема, иногда она даже гораздо больше, относя къ массѣ, нежели сила тяжести; при удаленіи отъ магнита она убываетъ не обратно пропорціонально квадратамъ разстояній, а ближе къ кубамъ, поскольку я могъ судить по нѣкоторымъ грубымъ опытамъ.

Предложеніе VII. Теорема VII.

Тяготѣніе существуетъ ко всѣмъ тѣламъ вообще и пропорціонально массѣ каждаго изъ нихъ.

Выше доказано, что всѣ планеты тяготѣютъ другъ къ другу, а также, что тяготѣніе къ каждой изъ нихъ въ отдѣльности обратно пропорціонально квадратамъ разстояній мѣста до центра этой планеты. Отсюда слѣдуетъ (по предл. LXIX 1-ой книги и его слѣдствій), что тяготѣніе ко всѣмъ планетамъ пропорціонально количеству матеріи въ нихъ.

Сверхъ того, такъ какъ всѣ части какой-либо планеты A тяготѣютъ къ какой-либо другой планетѣ B, и тяготѣніе каждой части относится къ тяготѣнію цѣлаго, какъ масса этой части къ массѣ цѣлаго, всякому же дѣйствію (по 3-му закону движенія) есть равное противодѣйствіе, то и обратно, планета B притягивается ко всѣмъ частямъ планеты A, и притяженіе ея къ какой-либо части относится къ притяженію къ цѣлому, какъ масса этой части къ массѣ цѣлаго.

Слѣдствіе 1. Слѣдовательно, тяготѣніе ко всей планетѣ происходитъ и слагается изъ тяготѣній къ отдѣльнымъ частямъ ея. Подобнаго рода примѣръ имѣется въ притяженіяхъ магнитныхъ и электрическихъ,—притяженіе цѣлаго происходитъ отъ притяженій къ отдѣльнымъ частямъ. Дѣло становится по отношенію къ тяготѣнію понятнѣе, если вообразить, что нѣсколько меньшихъ планетъ соединяются въ одинъ шаръ и образуютъ одну большую планету, ибо сила цѣлаго должна образоваться изъ силъ составляющихъ его частей. Если кто возразитъ, что всѣ тѣла, находящіяся у насъ, по этому закону должны бы тяготѣть другъ къ другу, тогда какъ такого рода тяготѣніе совершенно не ощущается, то я на это отвѣчу, что тяготѣніе къ этимъ тѣламъ, будучи во столько же разъ меньше тяготѣнія къ землѣ во сколько разъ масса тѣла меньше массы всей земли, окажется гораздо меньше такого, которое могло бы быть ощущаемо.

Слѣдствіе 2. Тяготѣніе къ отдѣльнымъ равнымъ частицамъ тѣлъ, обратно пропорціонально квадратамъ разстояній мѣстъ до частицъ. (Слѣдуетъ изъ предл. LXXIV сл. 3 кн. 1).

Предложеніе VIII. Теорема VII.

Если вещество двухъ шаровъ, тяготѣющихъ другъ къ другу въ равныхъ удаленіяхъ отъ ихъ центровъ, однородно, то притяженіе каждаго шара другимъ обратно пропорціонально квадрату разстоянія между центрами ихъ.

Послѣ того какъ я нашелъ, что тяготѣніе ко всей планетѣ происходитъ и слагается изъ тяготѣній къ частицамъ ея и для каждой изъ нихъ обратно пропорціонально квадрату разстоянія до этой частицы, у меня возникло сомнѣніе, будетъ ли эта обратная пропорціональность квадратамъ разстояній для всей силы притяженія, слагающейся изъ частныхъ, имѣть мѣсто въ точности или лишь приближенно. Ибо могло бы быть, что пропорція, которая имѣетъ мѣсто для большихъ разстояній, достаточно точна, близь же поверхности планеты, вслѣдствіе неравенства разстояній между частицами и различнаго ихъ расположенія, можетъ оказаться замѣтно невѣрной. Однако, впослѣдствіи по предл. LXXV и LXXVI 1-ой книги я убѣдился въ справедливости высказаннаго здѣсь предложенія.

Слѣдствіе 1. На основаніи этого могутъ быть найдены и сравниваемы между собою вѣса тѣлъ на различныхъ планетахъ. Ибо вѣса тѣлъ равныхъ массъ обращающихся вокругъ планетъ по кругамъ (сл. 2 пр. IV кн. 1-ой) прямо пропорціональны діаметрамъ круговъ и обратно—квадратамъ временъ обращеній, вѣса же на поверхностяхъ планетъ или въ какихъ-либо иныхъ отъ центра удаленіяхъ (по этому предложенію) больше или меньше въ обратномъ отношеніи квадратовъ разстояній.

Такъ сопоставляя: времена обращенія Венеры около солнца 224 сутокъ $16\frac{3}{4}$ часа, крайняго спутника вокругъ Юпитера 16 сут. $16\frac{8}{15}$ часа, Гюйгенсова спутника вокругъ Сатурна въ 15 сут. $22\frac{2}{3}$ часа и луны вокругъ

земли въ 27 с. 7 ч. 43 м. среднее разстояніе Венеры отъ солнца и наибольшія геліоцентрическія элонгаціи крайняго спутника Юпитера отъ центра его равную 8′16″, Гюйгенсова спутника Сатурна до центра Сатурна въ 3′4″, луны до центра земли 10′33″, помощью разсчета [184]) я нашелъ, что вѣса равныхъ тѣлъ, находящихся въ равныхъ удаленіяхъ отъ центра солнца, Юпитера, Сатурна, и земли, относятся между собою соотвѣтственно какъ числа: 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$ и $\frac{1}{169282}$. При увеличеніи или уменьшеніи разстояній вѣса эти уменьшатся или увеличатся въ отношеніи квадратовъ разстояній, такъ вѣса равныхъ массъ на солнцѣ, Юпитерѣ, Сатурнѣ и землѣ въ разстояніяхъ, 10000, 997, 791 и 109 отъ центровъ этихъ тѣлъ, т.-е. на поверхности ихъ, будутъ относиться соотвѣтственно какъ 10000, 943, 529 и 435. Каковъ же вѣсъ на поверхности луны будетъ сказано въ послѣдующемъ.

---

[184]) Разсчетъ массъ планетъ имѣющихъ спутниковъ произведенъ Ньютономъ въ предположеніи, что всѣ орбиты круговыя и всѣ тѣла сферической формы.

Обозначивъ черезъ: M массу солнца, m_1 массу планеты, a_1 ея разстояніе до солнца, T_1 время ея оборота, r радіусъ орбиты ея спутника, λ_1 наибольшую его геліоцентрическую элонгацію, τ время его оборота, a радіусъ орбиты Венеры, T время ея оборота и черезъ k коэффиціентъ притяженія, будемъ имѣть слѣдующія соотношенія:

Сила притяженія спутника планетою: $f = \frac{km}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{\tau^2}$

Сила притяженія Венеры солнцемъ: $F = \frac{kM}{a^2} = \frac{4\pi^2 . a}{T^2}$

причемъ обѣ силы относятся къ единицѣ массы этихъ тѣлъ.

Отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{m}{M} = \frac{T^2}{\tau^2} \cdot \frac{r^3}{a^3}$$

но

$$r = a_1 \sin\lambda_1,$$

значитъ будетъ

$$\frac{m}{M} = \frac{T^2}{\tau^2} \cdot \frac{a_1^3}{a^3} . \sin^3\lambda_1 .$$

По закону Кеплера $a_1^3 : a^3 = T_1^2 : T^2$, слѣдовательно

$$\frac{m}{M} = \frac{T_1^2}{\tau^2} \sin^3\lambda_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Для Юпитера: $T_1 = 4332,584$; $\tau = 16,689$; $\lambda_1 = 8'16''$
Для Сатурна: $T_1 = 10759,2$; $\tau = 15,944$; $\lambda_1 = 3'4''$
Для Земли: $T_1 = 365,2564$; $\tau = 27,322$; $\lambda_1 = 10'33''$

По этимъ даннымъ по форм. (1) для Юпитера и Сатурна получаются числа Ньютона, для Земли же получается $\frac{1}{193600}$, а не $\frac{1}{169282}$, какъ показано у Ньютона. Причину этой разности уяснить не удается.

Слѣдствіе 2. Отсюда также опредѣляется количество матеріи (масса) каждой отдѣльной планеты, ибо массы планетъ пропорціональны силамъ ихъ притяженій, въ равныхъ разстояніяхъ отъ центра, т.-е. составляютъ для солнца, Юпитера, Сатурна и земли соотвѣтственно: $1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3021}, \frac{1}{169282}$. Если паралаксъ солнца окажется меньше или больше, нежели $10''30'''$, то массу земли надо соотвѣтственно увеличить или уменьшить въ отношеніи кубовъ паралаксовъ.

Слѣдствіе 3. Опредѣляются такъ же и плотности планетъ. Ибо вѣса равныхъ и однородныхъ тѣлъ на поверхностяхъ однородныхъ шаровъ пропорціональны діаметрамъ шаровъ по предл. LXXII кн. 1. Слѣдовательно, неодинаковыя плотности этихъ шаровъ относятся, какъ эти вѣса раздѣленные на діаметры шаровъ. Діаметры же солнца, Юпитера, Сатурна и земли относятся между собою какъ 10000, 997, 791 и 109, вѣса же на нихъ, какъ 10000, 943, 529 и 435, поэтому, плотности относятся какъ: 100, $94\frac{1}{2}$, 67 и 400. Плотность земли получаемая по этому разсчету не зависитъ отъ паралакса солнца, а опредѣляется лишь по паралаксу луны и значитъ опредѣляется правильно. Итакъ, солнце немного плотнѣе Юпитера, Юпитеръ плотнѣе Сатурна, земля же вчетверо плотнѣе солнца, ибо вслѣдствіе огромнаго своего жара солнца разрѣжено. Луна же плотнѣе земли, какъ то явствуетъ изъ послѣдующаго [185]).

Слѣдствіе 4. Слѣдовательно болѣе плотны, при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, тѣ планеты, которыя меньше, и такимъ образомъ сила тяжести на поверхностяхъ планетъ приближается къ равенству. Плотнѣе также, при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ, планеты ближайшія къ солнцу: такъ Юпитеръ плотнѣе Сатурна и земля—Юпитера. Во всякомъ случаѣ, планеты должны были быть размѣщены въ различныхъ отъ солнца разстояніяхъ, чтобы каждая изъ нихъ пользовалась теплотою солнца въ бо́льшей или меньшей мѣрѣ, сообразно своей плотности. Наша вода, если бы землю расположить въ области Сатурна, затвердѣла бы, если бы въ области Меркурія, немедленно обратилась бы въ паръ. Ибо свѣтъ солнца, которому его тепло пропорціонально, въ шесть разъ плотнѣе въ области Меркурія нежели у насъ, я же испыталъ при помощи термометра, что при теплотѣ въ шесть разъ большей лѣтней теплоты солнца вода закипаетъ [186]). Нѣтъ сомнѣнія,

---

[185]) Это утвержденіе основано на разсчетѣ, приведенномъ въ слѣд. 3-мъ предл. XXXVII, изъ котораго получается, что отношеніе массы луны къ массѣ земли равно 1 : 39,788. По новѣйшимъ даннымъ и способамъ получено, что это отношеніе составляетъ лишь 1 : 81,45; поэтому плотность луны равна 0,604 плотности земли, а не 1,22, какъ найдено Ньютономъ на основаніи имѣвшихся въ его время данныхъ.

[186]) Въ текстѣ сказано: «et thermometro expertus sum quod sextupio solis aestivi calore aqua ebullit».

Во времена Ньютона ученіе о тэплотѣ далеко еще не было установлено и самаго слова «температура» у него не встрѣчается и не дѣлается

что вещество Меркурія приспособлено къ теплотѣ и поэтому плотнѣе нашего, ибо всякое вещество болѣе плотное требуетъ бо́льшаго тепла для того, чтобы надъ ними протекали физическіе процессы.

различія между calor—теплота и gradus caloris—степень нагрѣванія или теплоты. Смыслъ, который Ньютонъ придавалъ приведеннымъ словамъ, становится яснымъ, если эти слова сопоставить съ замѣткою Ньютона, помѣщенной въ Philosoph. Transactions за 1701 годъ подъ заглавіемъ: «Scala graduum caloris et frigoris». Объ этой «шкалѣ степеней теплоты и холода» или по теперешней терминологіи «шкалѣ температуръ» можно судить по слѣдующей выдержкѣ, въ которой сохранена Ньютонова терминологія.

Равныя степени теплоты.		Постоянныя степени теплоты.
0	0	Теплота воздуха зимою, при которой вода начинаетъ замерзать. Эта степень теплоты опредѣляется точно, помѣстивъ термометръ въ сжатый снѣгъ, когда онъ таетъ.
0, 1, 2	—	Теплоты воздуха зимою.
2, 3, 4	—	„ „ весною и осенью.
4, 5, 6	—	„ „ лѣтомъ.
6	—	Полуденная теплота воздуха въ іюлѣ мѣсяцѣ.
12	1	Наибольшая теплота, которую принимаетъ термометръ при соприкосновеніи съ тѣломъ человѣка. Такова же приблизительно и теплота птицы, высиживающей яйца.
17	$1\frac{1}{2}$	Наибольшая теплота ванны, которую можетъ долго переносить рука, оставаясь неподвижной.
24	2	Теплота ванны, въ которой плавающій воскъ нагрѣваясь растопляется и остается жидкимъ не закипая.
34	$2\frac{1}{2}$	Теплота, при которой вода сильно кипитъ и при которой сплавъ изъ двухъ частей свинца, трехъ частей олова и пяти частей висмута остывая затвердѣваетъ. Вода начинаетъ пузыриться при теплотѣ въ 33 части, при теплотѣ свыше $34\frac{1}{2}$ едва вмѣщаетъ въ себѣ пузыри. Охлаждающееся желѣзо при теплотѣ въ 35 или 36 частей перестаетъ вызывать вскипаніе теплой воды, падающей на него по каплямъ и при 37 частяхъ, когда вода холодная.
48	3	Наименьшая теплота, при которой сплавъ изъ одинаковаго числа частей олова и висмута плавится. Этотъ сплавъ при теплотѣ въ 47 частей, охлаждаясь, ссѣдается.
68	$3\frac{1}{2}$	Наименьшая теплота, при которой плавится сплавъ изъ одной части висмута и восьми частей олова. Олово само по себѣ плавится при теплотѣ въ 72 и остывая затвердѣваетъ при 70.

Предложеніе IX. Теорема IX.

Тяготѣніе, идя отъ поверхностей планетъ внизъ, убываетъ приблизительно пропорціонально разстояніямъ до центра.

Если бы вещество планеты было однороднымъ по плотности, эта пропорція имѣла бы мѣсто въ точности по предл. LXXIII кн. 1. Слѣдовательно, ошибка такова, поскольку она вызывается неравномѣрностью плотности.

Равныя степени теплоты.		Постоянныя степени теплоты.
96	4	Наименьшая теплота, при которой плавится свинецъ. При нагрѣваніи свинецъ плавится при теплотѣ въ 96 или 97 частей, при остываніи затвердѣваетъ при теплотѣ въ 95 частей.
136	$4\frac{1}{2}$	Теплота, при которой накаленныя тѣла свѣтятся въ ночной темнотѣ, въ сумерки же нѣтъ. При этой же теплотѣ сплавъ изъ двухъ частей сурьмы и одной части висмута, а также сплавъ изъ пяти частей сурьмы и одной части олова, остывая затвердѣваетъ. Сурьма сама по себѣ застываетъ при теплотѣ въ 146 частей.
195	5	Теплота раскаленнаго каменнаго угля, горящаго въ маломъ кухонномъ очагѣ безъ раздуванія мѣхами. Такова же теплота желѣза, накаливаемаго насколько можно въ такомъ очагѣ. Жаръ малаго кухоннаго очага при дровахъ нѣсколько больше и составляетъ около 200 или 210. Жаръ же въ большомъ очагѣ гораздо больше этого, въ особенности если огонь раздувается мѣхами.

Въ объясненіи къ таблицѣ, изъ которой здѣсь приведены лишь главнѣйшія данныя, Ньютонъ говоритъ: «Въ первомъ столбцѣ показаны степени теплоты (нагрѣванія), слѣдующія въ ариѳметической прогрессіи, ведя счетъ отъ той теплоты, при которой вода начинаетъ отъ мороза затвердѣвать, т.-е. отъ низшей степени теплоты, иначе отъ общей границы между тепломъ и холодомъ и принимая, что теплота человѣческаго тѣла равна 12 частямъ. Во второмъ столбцѣ показаны степени теплоты, слѣдующія въ геометрической прогрессіи, такъ что вторая степень вдвое больше первой, третья вдвое больше второй, четвертая вдвое больше третьей и т. д., причемъ первая принимается равной теплотѣ человѣческаго тѣла».

Отсюда ясно, что подъ словомъ calor—теплота Ньютонъ разумѣлъ температуру, отсчитанную по термометру, коего ноль соотвѣтствовалъ таянію льда и 12 градусовъ температурѣ человѣческаго тѣла.

Затѣмъ онъ продолжаетъ: «Изъ этой таблицы видно, что теплота кипящей воды почти въ три раза больше теплоты человѣческаго тѣла,

Предложеніе X. Теорема X.

Движеніе планетъ можетъ сохранятъся въ небесныхъ пространствахъ весьма долгое время.

Въ поученіи къ XL предложенію 2-ой книги доказано, что шаръ замерзшей воды, свободно движущійся въ нашемъ воздухѣ, при проходѣ пути

теплота плавящагося олова въ шесть разъ больше, плавящагося свинца въ восемь разъ, плавящейся сюрьмы въ двѣнадцать разъ, обыкновенный жаръ кухоннаго очага въ 16 или 17 разъ больше теплоты человѣческаго тѣла.

Эта таблица была составлена при помощи термометра и раскаленнаго желѣза. Термометромъ я нашелъ всѣ теплоты до теплоты плавящагося олова, раскаленнымъ желѣзомъ — мѣры всѣхъ остальныхъ. Ибо теплота, которую нагрѣтое желѣзо сообщаетъ въ заданное время смежнымъ съ нимъ холоднымъ тѣломъ, т.-е. теплота, которую желѣзо утрачиваетъ въ продолженіе заданнаго времени пропорціональна всей теплотѣ желѣза; поэтому если времена охлажденія принимать равными, то теплоты будутъ въ геометрической прогрессіи, и могутъ легко быть найдены по таблицѣ логариѳмовъ».

Здѣсь, какъ видно, слово «теплота» употреблено въ двухъ смыслахъ— какъ «количество тепла» и какъ «температура» и если бы пользоваться теперешней терминологіей, то это мѣсто можно было бы выразить такъ: ибо количество тепла, которое нагрѣтое желѣзо сообщаетъ въ заданное время смежнымъ съ нимъ холоднымъ тѣламъ, т.-е. которое желѣзо утрачиваетъ въ продолженіе заданнаго времени пропорціонально температурѣ желѣза, поэтому если времена охлажденія принимать равными, то температуры будутъ въ геометрической прогрессіи». Здѣсь надо еще замѣтить, что холоднымъ тѣломъ Ньютонъ называетъ такое, температура котораго около нуля.

Дальше въ его замѣткѣ говорится: «Итакъ, я сперва нашелъ, что въ термометрѣ, сдѣланномъ изъ льняного масла, когда онъ былъ погруженъ въ тающій снѣгъ, масло занимало объемъ, равный 10000 частей, то же количество масла при первой степени тепла, т.-е. теплотѣ человѣческаго тѣла, будучи разрѣжено, занимало объемъ въ 10256 частей, при теплотѣ воды едва-едва начинающей кипѣть объемъ въ 10705; при теплотѣ воды сильно кипящей объемъ въ 10725; при теплотѣ остывающаго расплавленнаго олова, когда оно начинало затвердѣвать и приняло строеніе амальгамы объемъ масла былъ въ 11516, когда же олово совсѣмъ затвердѣло—11496. Итакъ, при теплотѣ человѣческаго тѣла масло расширено въ отношеніи 40 къ 39, при теплотѣ кипящей воды въ отношеніи 15 къ 14, при теплотѣ охлаждающагося олова, когда оно начинаетъ ссѣдаться и затвердѣвать въ отношеніи 15 къ 13, и въ отношеніи 23 къ 20, когда оно совсѣмъ затвердѣетъ. Расширеніе воздуха при одинаковой степени теплоты было въ десять разъ больше нежели масла; расширеніе же масла въ свою очередь приблизительно въ 15 разъ больше расширенія виннаго спирта. Послѣ того, какъ это было найдено, оказалось, что если положить, что теплоты самого масла пропорціональны его расширенію и принять теплоту человѣческаго тѣла за 12 частей. то теплота воды, когда она начинаетъ кипѣть, составляетъ 33 части, когда она сильно кипитъ—34, для олова когда оно или

равнаго своему полудіаметру утрачиваетъ отъ сопротивленія воздуха $\frac{1}{4586}$ своего количества движенія. Эта пропорція имѣетъ мѣсто приблизительно для сколь угодно большихъ шаровъ, движущихся сколь угодно быстро. Что нашъ земной шаръ плотнѣе того, какъ если бы онъ весь состоялъ изъ воды, я заключаю изъ слѣдующаго. Если бы весь этотъ шаръ былъ водяной, то все, что менѣе плотно, нежели вода, вслѣдствіе меньшаго удѣльнаго вѣса поднялось бы и плавало бы на поверхности.

По этой причинѣ, когда земляной шаръ повсюду покрытъ водою, если бы его плотность была меньше плотности воды, онъ гдѣ-нибудь выплылъ бы изъ воды и вся вода съ него стекшая сосредоточилась бы въ противоположной сторонѣ. Въ такихъ условіяхъ находится наша земля, окруженная по бо́льшей части морями. Поэтому если бы она не была плотнѣе воды, то она выплыла бы изъ воды и, соотвѣтственно степени своей легкости, возвышалась бы надъ водою, всѣ же моря стекли бы въ противоположную сторону. На основаніи этого разсужденія солнечныя пятна легче, нежели свѣтящееся вещество солнца, на которомъ они плаваютъ. Каково бы ни было образованіе планетъ, все вещество болѣе тяжелое, нежели вода, пока масса была еще жидкою, стремилось къ центру.

Такъ какъ обыкновенныя верхнія части земли примѣрно вдвое плотнѣе воды, немного же ниже въ рудникахъ оказываются примѣрно втрое, вчетверо и даже въ пять разъ болѣе тяжелыя, правдоподобно, что все количество вещества земли приблизительно въ пять или въ

плавится или же при остываніи начинаетъ застывать и принимать видъ амальгамы, теплота составляетъ 72 части, а когда оно при охлажденіи совсѣмъ становится твердымъ—70. Послѣ того какъ это было установлено, чтобы опредѣлить все остальное, я раскалилъ до красна достаточно толстый чугунъ и, вынувъ его клещами еще раскаленнымъ изъ огня, помѣстилъ его тотчасъ же въ холодное мѣсто, гдѣ постоянно продувалъ вѣтеръ. Въ этотъ чугунъ я клалъ кусочки различныхъ металловъ и другихъ плавящихся тѣлъ и замѣчалъ времена, пока при охлажденіи чугуна эти кусочки, утративъ совершенно жидкій видъ, отвердѣвали, а также время, по истеченіи котораго теплота чугуна становилась одинаковой съ теплотою человѣческаго тѣла.

Положивъ затѣмъ, что избытки теплоты (температуры при теперешней терминологіи) чугуна и затвердѣвающихъ кусочковъ надъ теплотою (температурой) воздуха, даваемой термометромъ, составляютъ геометрическую прогрессію, когда времена составляютъ прогрессію ариѳметическую, я опредѣлилъ всѣ теплоты (температуры).

Чугунъ же я помѣстилъ не въ спокойномъ воздухѣ, а на равномѣрно дующемъ вѣтру, чтобы воздухъ, нагрѣваемый чугуномъ, постоянно уносился вѣтромъ и равномѣрно замѣнялся бы холоднымъ воздухомъ.

Такимъ образомъ въ равныя времена нагрѣваются равныя количества воздуха и вбираютъ въ себя тепло (количество тепла) пропорціональное теплотѣ (температурѣ) желѣза. Теплоты (температуры), найденныя такимъ образомъ, оказались между собою въ томъ же отношеніи, какъ и найденныя термометромъ, поэтому допущеніе, что расширеніе масла пропорціонально его теплотѣ (температурѣ), правильно.

шесть [187]) разъ больше того, какъ если бы оно все состояло изъ воды; въ особенности обративъ вниманіе, что земля примѣрно въ четыре раза плотнѣе Юпитера какъ показано выше. Вслѣдствіе этого, если Юпитеръ немного плотнѣе воды, то въ продолженіе 30 сутокъ, въ которыя онъ проходитъ путь, равный 459 своимъ полудіаметрамъ, онъ утратилъ бы $\frac{1}{10}$ своего количества движенія въ средѣ, плотность которой равнялась бы плотности нашего воздуха. Но въ дѣйствительности сопротивленіе среды уменьшается пропорціонально ея вѣсу или плотности; такъ вода, которая въ $13\frac{2}{3}$ раза легче ртути, оказываетъ и во столько же разъ меньшее сопротивленіе, воздухъ, который въ 860 разъ легче воды, сопротивляется во столько же разъ менѣе. Если же подняться въ небесныя пространства, гдѣ вѣсъ среды, въ которой движутся планеты, уменьшенъ въ огромное число разъ, сопротивленіе почти не существуетъ. Въ поученіи къ предл. XXII книги 2-ой показано, что при поднятіи на двѣсти миль надъ землею воздухъ рѣже, нежели у поверхности земли въ отношеніи 30 къ 0,0000000000003998, иначе кругло въ отношеніи 75.000.000.000.000 къ 1, поэтому Юпитеръ при обращеніи въ средѣ такой плотности, какъ этотъ разрѣженный воздухъ въ продолженіе 1.000.000 лѣтъ не утратилъ бы одной милліонной доли своего количества движенія. Во всякомъ случаѣ, въ пространствахъ близкихъ къ землѣ ничего не находится, что могло бы оказывать сопротивленія, кромѣ воздуха, выдѣленій и паровъ. Если ихъ тщательно выкачать изъ цилиндрическаго полаго стекла, то тяжелыя тѣла падаютъ внутри его совершенно свободно, не испытывая чувствительнаго сопротивленія; даже золото и тончайшее перышко, пущенныя совмѣстно падаютъ съ одинаковою скоростью и описавъ при своемъ паденіи высоту въ 4, 6 и 8 футъ, совмѣстно ударяются въ дно, какъ показываетъ опытъ. Поэтому, если подняться въ небесныя пространства, свободныя отъ воздуха и испареній, то планеты и кометы, не испытывая чувствительнаго сопротивленія, будутъ двигаться въ этихъ пространствахъ весьма продолжительное время.

Предположеніе 1.

Центръ системы міра находится въ покоѣ.

Это признается всѣми, ибо одни принимаютъ находящимися въ этомъ центрѣ и покоющимися землю, другіе солнце. Посмотримъ же, что изъ этого слѣдуетъ.

---

[187]) Сводка результатовъ опредѣленія средней плотности земли разными способами привела Поинтинга (Poynting, Mean Density of the Earth, London, 1894) къ заключенію, что средняя плотность земли равна 5,52 относительно воды. Такимъ образомъ догадка Ньютона оправдалась вполнѣ, и считается однимъ изъ наиболѣе поразительныхъ проявленій его геніальной проницательности.

Предложеніе XI. Теорема XI.

Общій центръ тяжести земли, солнца и всѣхъ планетъ находится въ покоѣ.

Ибо этотъ центръ (по слѣд. 4 законовъ движенія) или находится въ покоѣ, или же движется равномѣрно и прямолинейно. Но при движеніи этого центра двигался бы и центръ міра, что противно предположенію.

Предложеніе XII. Теорема XII.

Солнце находится въ постоянномъ движеніи, но никогда не удаляется значительно отъ общаго съ планетами центра тяжести.

Такъ какъ, по слѣд. 2 пред. VIII, масса солнца относится къ массѣ Юпитера, какъ 1067 къ 1, разстояніе же Юпитера до солнца находится въ немного большемъ отношеніи къ полудіаметру солнца, то общій центръ тяжести солнца и Юпитера лежитъ въ точкѣ, находящейся немного внѣ поверхности солнца. На основаніи такого же разсужденія, такъ какъ масса солнца относится къ массѣ Сатурна, какъ 3021 къ 1, разстояніе же Сатурна до солнца находится въ нѣсколько меньшемъ отношеніи къ его полудіаметру, то общій центръ тяжести Сатурна и солнца приходится въ точкѣ лежащей немного внутри поверхности солнца. Продолжая производить разсчетъ на такихъ же основаніяхъ, увидимъ, что если земля и всѣ планеты находились бы по одну сторону отъ солнца, то общій центръ тяжести удалился бы отъ центра солнца не болѣе какъ на величину діаметра солнца. Во всѣхъ же прочихъ случаяхъ разстояніе этихъ центровъ меньше, поэтому, такъ какъ сказанный центръ тяжести постоянно находится въ покоѣ, то солнце въ зависимости отъ положенія планетъ движется по всѣмъ направленіямъ, но никогда не удаляется значительно отъ этого центра.

Слѣдствіе. Такимъ образомъ общій центръ тяжести земли, солнца и планетъ долженъ быть принятъ за центръ міра. Такъ какъ земля, солнце и планеты тяготѣютъ другъ къ другу и вслѣдствіе этого соотвѣтственно силѣ тяготѣнія постоянно находятся въ движеніи, очевидно, что ихъ подвижные центры не могутъ быть приняты за находящійся въ покоѣ центръ міра. Если бы въ этомъ центрѣ помѣщалось то тѣло, къ которому всѣ тѣла наиболѣе тяготѣютъ (согласно обыкновенному о томъ мнѣнію), то такое преимущество должно бы предоставить солнцу. Но такъ какъ солнце само движется, то надо бы избрать такую покоющуюся точку, отъ которой центръ солнца менѣе всего отходитъ и отъ которой онъ еще менѣе отходилъ бы, если бы солнце было еще плотнѣе и еще больше, такъ что оно и двигалось бы еще менѣе.

Предложеніе XIII. Теорема XIII.

Планеты движутся по эллипсамъ имѣющимъ свой фокусъ въ центрѣ солнца и радіусами, проводимыми къ этому центру, описываютъ площади пропорціональныя временамъ.

Объ этихъ движеніяхъ сказано выше при разсмотрѣніи явленій. Но послѣ того, какъ начальныя причины движеній извѣстны, мы можемъ вывести движенія небесныхъ тѣлъ непосредственно.

Такъ какъ притяженія планетъ къ солнцу обратно пропорціональны квадратамъ разстояній до центра солнца, то если бы солнце находилось въ покоѣ и планеты другъ на друга не дѣйствовали бы, то ихъ орбиты были бы эллипсами, имѣющими свой общій фокусъ въ центрѣ солнца и описывали бы площади пропорціональныя временамъ (по пред. I и XI и сл. 1 пред. XIII, кн. 1-ой). Дѣйствія планетъ другъ на друга весьма малы (такъ что ими можно пренебречь) и по пред. LXVI 1-ой книги эти взаимодѣйствія менѣе возмущаютъ эллиптическія движенія планетъ вокругъ подвижного солнца, нежели когда эти движенія совершались бы около солнца неподвижнаго.

Однако дѣйствіе Юпитера на Сатурнъ не должно быть пренебрегаемо, ибо тяготѣніе къ Юпитеру относится (при равныхъ разстояніяхъ) къ тяготѣнію къ солнцу, какъ 1 къ 1067, слѣдовательно, при соединеніяхъ Юпитера и Сатурна, когда разстояніе его до Юпитера относится къ разстоянію до солнца какъ 4 къ 9, то притяженіе Сатурна къ Юпитеру будетъ относиться къ притяженію его къ солнцу какъ $81 : 1067 . 16$ или кругло какъ 1 къ 211. Отъ этого происходитъ возмущеніе орбиты Сатурна при каждомъ его соединеніи съ Юпитеромъ настолько значительное, что оно приводитъ въ недоумѣніе астрономовъ. Смотря по положенію планеты при этихъ соединеніяхъ, ея эксцентриситетъ то увеличивается, то уменьшается, афелій то перемѣщается впередъ, то сильно отступаетъ назадъ, среднее движеніе поочередно, то ускоряется, то замедляется. Однако погрѣшность въ движеніи этой планеты вокругъ солнца происходящая отъ такой силы (кромѣ погрѣшности средняго движенія) можетъ быть почти цѣликомъ избѣгнута, помѣстивъ нижній фокусъ орбиты въ центрѣ тяжести Юпитера и солнца (по пред. LXVII кн. 1-ой), и тогда наибольшая ея величина немногимъ превосходить двѣ минуты. Погрѣшность средняго движенія будетъ также немногимъ превосходить двѣ минуты въ годъ. Въ соединеніяхъ Юпитера и Сатурна ускорительныя силы тяготѣнія солнца къ Сатурну, Юпитера къ Сатурну и Юпитера къ солнцу, относятся почти какъ 16, 81 и $\frac{16 . 81 . 3021}{25}$, т.-е. 156609, поэтому разность притяженій солнца къ Сатурну и Юпитера къ Сатурну относится къ тяготѣнію Юпитера къ солнцу, какъ 65 къ 156609, т.-е. какъ 1 къ 2409. Этой разности пропорціонально наибольшее возмущающее вліяніе Сатурна на движенія Юпитера, поэтому и

возмущенія орбиты Юпитера гораздо меньше, нежели орбиты Сатурна [188]). Возмущенія орбитъ прочихъ планетъ еще гораздо меньше этого, кромѣ орбиты земли, чувствительно возмущаемой луною. Общій центръ тяжести земли и луны движется по эллипсу вокругъ солнца, находящагося въ фокусѣ его, и описываетъ проводимымъ къ нему радіусомъ площади пропорціональныя времени, земля же обращается вокругъ этого центра тяжести мѣсячнымъ движеніемъ.

Предложеніе XIV. Теорема XIV.

Афеліи и узлы орбитъ неподвижны.

Афеліи неподвижны по предл. XI книги 1-ой, плоскости же орбитъ по предл. I, вслѣдствіе же неподвижности плоскостей неподвижны и узлы. Однако отъ взаимодѣйствія обращающихся планетъ и кометъ происходятъ нѣкоторыя неравенства, но по ихъ малости ими можно здѣсь пренебречь.

Слѣдствіе 1. Неподвижныя звѣзды также находятся въ покоѣ, ибо онѣ сохраняютъ постоянныя положенія относительно афеліевъ и узловъ.

Слѣдствіе 2. Такъ какъ для этихъ звѣздъ нѣтъ чувствительнаго паралакса, происходящаго отъ годового движенія земли, то вслѣдствіе громадности разстоянія этихъ тѣлъ силы ихъ не оказываютъ никакихъ чувствительныхъ проявленій въ области нашей системы, не говоря уже о томъ, что неподвижныя звѣзды, разсѣянныя одинаково во всѣхъ частяхъ неба, вслѣдствіе противоположности ихъ дѣйствій уничтожаютъ взаимно свои силы, по предл. LXX кн. 1-ой.

Поученіе.

Такъ какъ планеты ближайшія къ солнцу (именно Меркурій, Венера, Земля и Марсъ) по малости ихъ массъ оказываютъ лишь малое взаимодѣйствіе другъ на друга, то ихъ афеліи и узлы находятся въ покоѣ, за исключеніемъ лишь того, насколько они возмущаются Юпитеромъ, Сатурномъ и высшими тѣлами. Отсюда на основаніи теоріи тяготѣнія можно заключить, что ихъ афеліи должны немного продвигаться въ попутномъ

[188]) По этому поводу Лапласъ (Laplace, Mecanique Celeste t. V, livre XV, chap. I) говоритъ: «аналитическая теорія движенія обѣихъ планетъ, въ точности представляющая всѣ наблюденія, показываетъ, что возмущеніе Сатурна при его соединеніяхъ съ Юпитеромъ почти нечувствительно. Соотвѣтствующее возмущеніе Юпитера почти въ шесть разъ больше, хотя на Юпитеръ дѣйствіе Сатурна относится къ дѣйствію солнца какъ 1 къ 500. Это замѣчаніе, сдѣланное еще Эйлеромъ, показываетъ, что надо принимать съ большою осторожностью кажущіяся наиболѣе правдоподобными общія соображенія, пока они не подтверждены самыми рѣшительными доказательствами».

направленіи по отношенію къ неподвижнымъ звѣздамъ и притомъ въ полукубическомъ отношеніи разстояній этихъ планетъ до солнца. Такъ, если афелій Марса продвигается относительно звѣздъ попутно на 33′20″ въ столѣтіе, то афеліи земли, Венеры, Меркурія должны продвигаться попутно же на 17′40″, 10′53″ и 4′16″. Этими движеніями по ихъ малости въ этомъ предложеніи пренебрегается.

Предложеніе XV. Задача I.

Найти большія оси орбитъ.

Ихъ надо брать такъ, чтобы кубы ихъ были пропорціональны квадратамъ временъ обращеній (по предл. XV кн. 1), затѣмъ соотвѣтственно увеличить въ отношеніи суммы массъ солнца и каждой изъ планетъ къ первому изъ двухъ среднихъ пропорціональныхъ между этою суммою и массою солнца по пред. LX кн. 1-ой.

Предложеніе XVI. Задача II.

Найти эксцентриситеты и афеліи орбитъ.

Задача рѣшается по предл. XVIII кн. 1.

Предложеніе XVII. Теорема XV.

Суточныя движенія планетъ равномѣрны, либрація луны происходитъ отъ суточнаго ея движенія.

Слѣдуетъ изъ перваго закона движенія и слѣдствія 22 предл. LXVI кн. 1ой. Юпитеръ обращается по отношенію къ неподвижнымъ звѣздамъ въ $9^ч\ 56^м$, Марсъ въ $24^ч\ 39^м$, Венера около $23^ч$, земля въ $23^ч\ 56^м$, солнце въ $25\frac{1}{2}$ сутокъ, и луна въ 27 сутокъ $7^ч\ 43^м$. Что все это происходитъ такъ, показываютъ явленія. Пятна на солнцѣ возвращаются къ тому же положенію на его дискѣ, относительно земли, приблизительно черезъ $27\frac{1}{2}$ сутокъ, слѣдовательно по отношенію къ неподвижнымъ звѣздамъ солнце обращается въ $25\frac{1}{2}$ сутокъ. Такъ какъ для луны при равномѣрномъ ея обращеніи около оси ея, сутки равны нашему мѣсяцу, то къ нижнему фокусу ея орбиты будетъ всегда обращена почти постоянно одна и та же ея сторона и поэтому, сообразно положенію этого фокуса, будетъ нѣсколько уклоняться въ ту или другую сторону по отношенію къ землѣ— это и есть либрація по долготѣ. Либрація же по широтѣ происходитъ отъ широты луны и наклонности ея оси къ плоскости эклиптики. Такую теорію либраціи луны изложилъ подробнѣе въ своей астрономіи *Н. Меркаторъ* въ началѣ 1676 года на основаніи моихъ писемъ. Подобнымъ образомъ, какъ кажется, вращается вокругъ своей оси и крайній спутникъ Сатурна, всегда будучи обращенъ тою же своею стороною къ Сатурну, ибо всякій разъ, какъ при своемъ обращеніи вокругъ Сатурна онъ приходитъ въ восточную часть своей орбиты, онъ становится едва видимымъ, обыкновенно же совершенно пропадаетъ, что можетъ происходить отъ

пятенъ на той его поверхности, которая тогда обращена къ землѣ, какъ это замѣтилъ *Кассини*. Подобнымъ же движеніемъ обладаетъ, какъ кажется, и крайній спутникъ Юпитера, ибо на той части его поверхности, которая противоположна Юпитеру, у него есть пятно, которое и появляется всегда на поверхности Юпитера всякій разъ, когда этотъ спутникъ проходитъ между нашимъ глазомъ и Юпитеромъ.

Предложеніе XVIII. Теорема XVI.

Оси планетъ меньше діаметровъ, проведенныхъ нормально къ этимъ осямъ.

Если бы у планеты было устранено суточное вращеніе, то вслѣдствіе одинаковаго отовсюду тяготѣнія частей ея она должна бы принять форму шара. Вслѣдствіе же вращенія части близъ экватора стремятся удалиться отъ оси; слѣдовательно, если бы вещество было жидкимъ, то оно своимъ подъемомъ увеличило бы діаметръ по экватору, и своимъ опусканіемъ уменьшило бы ось у полюсовъ. Такъ діаметръ Юпитера (согласно наблюденіямъ астрономовъ), оказывается меньшимъ между полюсами, нежели между востокомъ и западомъ. На основаніи этого разсужденія, если бы наша земля близь экватора не была бы немного выше, нежели у полюсовъ, то моря, понижаясь у полюсовъ и поднимаясь у экватора, все бы затопили.

Предложеніе XIX. Задача III.

Опредѣлить отношеніе длины оси планеты къ длинѣ діаметровъ этой оси перпендикулярныхъ.

Нашъ соотечественникъ *Нордвудъ*, измѣривъ разстояніе 905751 англ. футъ между *Лондономъ* и *Іоркомъ* и опредѣливъ разность широтъ въ $2^\circ 28'$, вывелъ, что длина одного градуса равна 367196 англ. футъ, т.-е. 57300 парижскихъ шестифутовыхъ туазовъ.

Пикаръ измѣривъ дугу меридіана въ $1^\circ 22' 55''$ между *Аміеномъ* и *Мальвуазеномъ*, нашелъ, что длина одного градуса составляетъ 57060 туазовъ. *Кассини* старшій измѣрилъ разстоянія отъ города *Колліуръ* въ Руссильонѣ до Парижской обсерваторіи, сынъ же его присоединилъ еще дугу отъ обсерваторіи до башни города *Дюнкирка*. Полное разстояніе равнялось $486156\frac{1}{2}$ туазовъ, разность же широтъ *Колліура* и *Дюнкирка* составляла $8^\circ 31' 11\frac{5}{6}''$, отсюда длина одного градуса 57061 туазовъ. Изъ этихъ измѣреній слѣдуетъ, что окружность земли равна 123.249.600 и ея полудіаметръ 19.615.800 парижскихъ фута, если принять землю за шаръ. Въ широтѣ *Парижа* тяжелое тѣло описываетъ при своемъ паденіи въ первую секунду 15 пар. футъ 1 дюймъ $1\frac{7}{9}$ линіи, т.-е. $2173\frac{7}{9}$ линіи, какъ сказано выше. Вѣсъ тѣла уменьшенъ на вѣсъ вытѣсненнаго воздуха. Примемъ, что потеря въ вѣсѣ составляетъ $\frac{1}{11000}$ полнаго вѣса, тогда падающее тѣло въ пустотѣ проходитъ путь 2174 линіи въ первую секунду.

Тѣло обращающееся равномѣрно по кругу въ разстояніи 19.615.800 футъ отъ центра и дѣлая въ звѣздныя сутки, т.-е. $23^ч\ 56^м\ 4^с$ одинъ оборотъ, проходитъ въ одну секунду дугу длиною 1433,46 футъ, синусъ верзусъ которой равенъ 0,0523656 футъ, т.-е. 7,54064 линій; поэтому отношеніе силы, подъ дѣйствіемъ которой тяжелыя тѣла падаютъ въ Парижѣ, къ центробѣжной силѣ тѣлъ на экваторѣ, происходящей отъ суточнаго вращенія земли, равно 2174 къ 7,54064. Центробѣжная сила тѣлъ на экваторѣ относится къ центробѣжной силѣ, съ которою тѣла стремятся удалиться прямо вверхъ отъ земли для широты Парижа 48°50′10″, какъ квадратъ радіуса къ квадрату синуса дополненія этой широты, т.-е. какъ 7,54064 къ 3,267. Придавъ эту силу къ той силѣ, подъ дѣйствіемъ которой тѣла падаютъ въ указанной широтѣ Парижа, получимъ, что тѣло, падая тамъ подъ дѣйствіемъ полной силы тяготѣнія, прошло бы въ первую секунду 2177,267 линій, т.-е. 15 футъ 1 дюймъ 5,267 линій парижскихъ. Эта полная сила тяготѣнія подъ этой широтой относится къ центробѣжной силѣ на экваторѣ, какъ 2177,267 къ 7,54064, т.-е. какъ 289 къ 1.

Пусть $APBQ$ (фиг. 184) представляетъ сѣченіе фигуры земли не вполнѣ сферической, а образуемой вращеніемъ эллипса около его малой оси PQ, и пусть $ACQqca$ заполненный водою каналъ, простирающійся отъ полюса Qq до центра Cc, и затѣмъ до экватора Aa, тогда необходимо, чтобы вѣсъ воды въ колѣнѣ $ACca$ канала относился къ вѣсу воды въ другомъ колѣнѣ $QCcq$, какъ 289 къ 288, ибо центробѣжная сила происходящая отъ вращенія земли, поддерживаетъ и уничтожаетъ одну часть изъ 289 составляющихъ полный вѣсъ, 288 остальныхъ частей поддерживаются вѣсомъ воды въ другомъ колѣнѣ. Далѣе, выполнивъ разсчетъ [189]) (по

---

[189]) Въ примѣчаніи 125 приведена общая формула

$$F = 2k\pi \int_{l-a}^{l+a} \left(1 - \frac{x}{X}\right) dx$$

для вычисленія притяженія эллипсоидомъ вращенія точки, лежащей на оси вращенія въ разстояніи l отъ центра. Въ этой формулѣ: k есть постоянная притяженія; x разстояніе какой-либо параллели до притягиваемой точки; a длина той полуоси, вращеніемъ около которой произведенъ эллипсоидъ; b длина другой полуоси, и

$$X^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 + 2\frac{b^2 l}{a^2} x - \frac{b^2}{a^2}(l^2 - a^2) = Ax^2 + 2Bx + C.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ $l = a$ и $C = 0$ и, слѣдовательно, все привелось къ вычисленію интеграла

$$\int_0^{2a} \frac{x dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx}}.$$

Хотя этотъ интегралъ выражается въ конечномъ видѣ, но въ виду того, что разность $a - b$ весьма мала по сравненію съ величиною этихъ

предл. XCI сл. 2 кн. 1^ой^), я нашелъ, что если бы земля состояла изъ однороднаго вещества, не обладала бы никакимъ движеніемъ и отношеніе ея

длинъ, для численныхъ разсчетовъ проще разложить этотъ интегралъ въ рядъ, къ каковымъ разложеніямъ постоянно прибѣгалъ Ньютонъ.

Итакъ, пусть будетъ:

$$\frac{A}{2B}=\frac{a^2-b^2}{2ab^2}=\varepsilon \quad \text{и} \quad 2\varepsilon\,.\,a=\eta=\frac{a^2-b^2}{b^2}$$

тогда

$$\int_0^{2a}\frac{xdx}{\sqrt{Ax^2+2Bx}}=\frac{1}{\sqrt{2B}}\int_0^{2a}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\varepsilon x}}\,.\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2B}}\,.\int_0^{2a}\sqrt{x}\left[1-\frac{1}{2}\varepsilon x+\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3x^3+\ldots\right]dx=$$

$$=2a\,.\,\frac{a}{b}\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\eta+\frac{1.3}{2.4}\,.\,\frac{2}{7}\,.\,\eta^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}\,.\,\frac{2}{9}\eta^3+\ldots\right]=\frac{2a^2}{b}\,.\,H\,.\quad .\quad (1)$$

Такимъ образомъ притяженіе эллипсоида на конецъ оси вращенія будетъ:

$$F=4k\pi a\left[1-\frac{a}{b}H\right].$$

Чтобы получить притяженіе шара, стоитъ только положить $b=a$, тогда $\eta=0$, $H=\frac{2}{3}$ и будетъ:

$$F_0=\frac{4}{3}k\pi a.$$

Такимъ образомъ отношеніе:

$$\frac{F}{F_0}=3\left(1-\frac{a}{b}H\right)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (2)$$

Для перваго случая:

$$a=100;\quad b=101;\quad \eta=-\frac{201}{10201}=-0{,}0197$$

$$H=\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\,.\,0{,}0197+\frac{3}{28}\,.\,(0{,}0197)^2=\frac{2}{3}+0{,}00394+0{,}00004=$$

$$=\frac{2}{3}+0{,}00398$$

$$\frac{F}{F_0}=3\left[1-\frac{100}{101}\,.\left(\frac{2}{3}+0{,}00398\right)\right]=\frac{303-201{,}194}{101}=\frac{101{,}806}{101}=$$

$$=1{,}008=\frac{126}{125}.$$

Во второмъ случаѣ:

$$a=101;\quad b=100;\quad \eta=\frac{201}{10000}=0{,}0201$$

$$H=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\,.\,0{,}0201+\frac{3}{28}\,.\,(0{,}0201)^2=\frac{2}{3}-0{,}0402+0{,}00004=$$

$$=\frac{2}{3}-0{,}00398$$

$$\frac{F}{F_0}=3\left[1-\frac{101}{100}\left(\frac{2}{3}-0{,}00398\right)\right]=\frac{300-200{,}794}{100}=1-0{,}00794=\frac{125}{126}$$

какъ и показано въ текстѣ.

оси PQ къ діаметру AB было бы равно 100 къ 101, то сила тяготѣнія къ землѣ въ точкѣ Q относилась бы къ силѣ тяготѣнія въ той же точкѣ къ шару, описанному радіусомъ CQ или CP, какъ 126 къ 125. На томъ же основаніи тяготѣніе въ точкѣ A къ сфероиду, описанному обращеніемъ эллипса около оси AB, относится къ силѣ тяготѣнія въ той же точкѣ къ шару, описанному изъ центра C радіусомъ AC, какъ 125 къ 126. Но тяготѣніе въ точкѣ A къ землѣ есть среднее пропорціональное между тяготѣніемъ къ сказанному сфероиду и тяготѣніемъ къ шару, потому что шаръ при уменьшеніи діаметра PQ въ отношеніи 101 къ 100 обращается въ фигуру земли, эта же фигура обратится въ сказанный сфероидъ, если уменьшить въ указанномъ выше отношеніи третій діаметръ, перпендикулярный къ діаметрамъ AB и PQ. Сила же тяготѣнія въ точкѣ A въ обоихъ случаяхъ уменьшается приблизительно въ одинаковомъ отношеніи [190]). Слѣдовательно тяготѣніе въ точкѣ A къ шару, описанному изъ центра C радіусомъ AC, относится къ тяготѣнію въ точкѣ A къ землѣ, какъ 126 къ $125\frac{1}{2}$, и тяготѣніе въ точкѣ Q къ шару, описанному изъ центра C радіусомъ CQ относится къ тяготѣнію въ точкѣ A къ шару, описанному

---

[190]) Это мѣсто, высказанное весьма кратко, можетъ быть пояснено такъ: Ньютонъ имѣлъ выраженія притяженія на любую точку поверхности шара и на точку, лежащую на концѣ оси для эллипсоида вращенія около этой оси, ему же нужно было получить притяженіе на точку экватора. Для своего разсчета онъ воспользовался тѣмъ обстоятельствомъ, что его эллипсоидъ имѣетъ весьма малое сжатіе и ограничился первымъ приближеніемъ.

Условимся обозначать, вообще, длину оси AB черезъ α, оси PQ черезъ β и оси, имъ перпендикулярной, черезъ γ; притяженіе точки A эллипсоидомъ, описаннымъ на этихъ осяхъ, будетъ нѣкоторой функціей отъ α, β и γ, которую обозначимъ черезъ $F(\alpha, \beta, \gamma)$.

Когда эллипсоидъ есть эллипсоидъ вращенія, напримѣръ, около оси AB, то $\beta = \gamma$ и очевидно, что функція F при этомъ такова, что и значенія ея частныхъ производныхъ по β и по γ одинаковы, т.-е.

$$F_\beta'(\alpha, \beta, \gamma) = F_\gamma'(\alpha, \beta, \gamma) \text{ при } \beta = \gamma,$$

будемъ обозначать это значеніе черезъ B, значеніе же $F_\alpha'(\alpha, \beta, \gamma)$ будетъ иное, его обозначимъ черезъ A.

Положимъ теперь, что эллипсоидъ весьма близокъ къ шару и заключается между двумя шарами, описанными какъ указано; радіусъ одного изъ нихъ обозначимъ черезъ a_0, другого черезъ $a_1 = a_0 + \delta$, причемъ δ весьма малая величина, квадратами и высшими степенями которой пренебрегаемъ.

Требуется найти значеніе $F(a_1, a_0, a_1)$, т.-е. притяженіе точки A конца экваторіальной оси эллипсоида вращенія около оси PQ, у котораго длина оси

$$PQ = a_0 = 1{,}00 \quad \text{и} \quad AB = a_1 = 1{,}01.$$

При сдѣланныхъ обозначеніяхъ притяженіе точки поверхности шаромъ радіуса a_0 будетъ $F(a_0, a_0, a_0)$, эту величину примемъ равной 1,00;

центромъ C и радіусомъ AC, какъ діаметры шаровъ (по пред. LXXII кн. 1-я), т.-е. какъ 100 къ 101.

Перемноживъ эти три отношенія, т.-е. 126 : 125; 126 : $125\frac{1}{2}$ и 100 : 101, получимъ, что сила тяготѣнія къ землѣ въ точкѣ Q относится къ силѣ тяготѣнія къ землѣ въ точкѣ A какъ 126 . 126 . 100 къ 125 . $125\frac{1}{2}$. 101, т.-е. какъ 501 къ 500.

Такъ какъ (по сл. 3 пр. XCI кн. 1) тяготѣніе въ обоихъ колѣнахъ $ACca$ и $QCcq$ пропорціонально разстояніямъ мѣстъ до центра, то если оба колѣна подраздѣлить поперечными равноотстоящими поверхностями на одинаковое число пропорціональныхъ частей, вѣсъ частей колѣна $ACca$ будетъ находиться къ вѣсу такого же числа частей другого колѣна въ отношеніи ихъ величинъ и силъ тяготѣнія, т.-е. въ отношеніи $\frac{101}{100} \cdot \frac{500}{501}$ иначе 505 къ 501. Поэтому, если центробѣжная сила всякой части въ колѣнѣ $ACca$, происходящая отъ суточнаго вращенія, будетъ относиться къ вѣсу этой части какъ 4 къ 505, такъ что отъ вѣса равнаго 505 отнимается 4, то вѣса въ обоихъ колѣнахъ станутъ равными и жидкость будетъ въ равновѣсіи. Въ дѣйствительности центробѣжная сила каждой части относится къ ея вѣсу какъ 1 къ 289, такъ что центробѣжная сила, которая должна бы составлять $\frac{4}{505}$ вѣса составляетъ всего $\frac{1}{289}$, поэтому слѣдуя «золотому правилу», говорю: если при дѣйствіи центробѣжной силы въ $\frac{4}{505}$ вѣса, высота воды въ колѣнѣ $ACca$ превосходила высоту воды въ колѣнѣ $QCcq$ на одну сотую всей высоты, то, подъ дѣйствіемъ центростремительной силы въ $\frac{1}{289}$ вѣса, избытокъ высоты воды въ колѣнѣ $ACca$ составитъ

притяженіе точки поверхности шаромъ радіуса a_1 будетъ $F(a_1, a_1, a_1) = 1{,}01$; притяженіе точки A эллипсоидомъ вращенія около оси AB будетъ $F(a_1, a_0, a_0)$, величина же этого притяженія равна $\frac{125}{126} \cdot 1{,}01$.

Такимъ образомъ имѣемъ равенства:

$$F(a_1, a_0, a_0) = F(a_0, a_0, a_0) + A \,.\, \delta = \frac{125}{126} \cdot 1{,}01$$
$$F(a_1, a_0, a_1) = F(a_0, a_0, a_0) + A\delta + B\delta$$
$$F(a_1, a_1, a_1) = F(a_0, a_0, a_0) + A\delta + 2B\delta = 1{,}01.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$F(a_1, a_0, a_1) = \frac{125{,}5}{126} \cdot 1{,}01,$$

а такъ какъ притяженіе того же эллипсоида на точку Q равно $\frac{125}{126}$, то отношеніе этой силы къ предыдущей силѣ равно

$$\frac{126 \,.\, 126 \,.\, 100}{125 \,.\, 125{,}5 \,.\, 101} = \frac{501}{500}$$

какъ указано въ текстѣ.

$\frac{1}{229}$ отъ высоты воды въ колѣнѣ *QCcq*. Слѣдовательно діаметръ земли по экватору относится къ ея діаметру, проходящему черезъ полюсы какъ 230 къ 229, а такъ какъ на основаніи измѣреній *Пикара* среднiй діаметръ земли равенъ 19.615.800 пар. фута, т.-е. 3923,16 миль (принимая милю въ 5000 футъ), то земля по экватору выше нежели по полюсамъ на 85.472 фута, т.-е. 17,1 мили, и ея высота на экваторѣ составляетъ кругло 19.658.600 футъ и на полюсахъ 19.573.000.

Если планета будетъ при одинаковой плотности и времени оборота больше или меньше земли, то отношеніе центростремительной силы къ силѣ тяготѣнія сохранится, а значитъ, сохранится и отношеніе полярнаго и экваторіальнаго діаметровъ. Если же суточное вращеніе будетъ въ какомъ-либо отношеніи ускорено или замедлено, то центробѣжная сила увеличится или уменьшится въ отношеніи равномъ квадрату предыдущаго, вслѣдствіе чего и разность діаметровъ увеличится или уменьшится приблизительно въ такомъ же отношеніи, какъ центробѣжная сила. Если плотность планеты увеличится или уменьшится въ какомъ-либо отношеніи, то и тяготѣніе къ ней увеличится или уменьшится въ такомъ же отношеніи и разность діаметровъ соотвѣтственно этому уменьшится въ томъ отношеніи, въ какомъ плотность увеличивается и увеличится, въ какомъ плотность уменьшается. Такъ земля дѣлаетъ свой оборотъ относительно неподвижныхъ звѣздъ въ 23 ч. 56 м. Юпитеръ же въ 9 ч. 56 м., отношеніе квадратовъ этихъ временъ равно 29 къ 5, отношеніе же плотностей этихъ тѣлъ равно 400 къ $94\frac{1}{2}$, слѣдовательно разность діаметровъ Юпитера должна приблизительно составлять отъ меньшаго его діаметра $\frac{29}{5} \cdot \frac{400}{94\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{229}$, т.-е. $\frac{1}{9\frac{1}{3}}$, такъ что діаметръ Юпитера, проходящій черезъ полюсы, долженъ относиться къ діаметру по экватору какъ $9\frac{1}{3}$ къ $10\frac{1}{3}$; большій его діаметръ равенъ 37″, поэтому полярный его діаметръ долженъ составлять 33″25‴; придавая кругло 3″ на свѣтовую погрѣшность, получимъ видимые діаметры планеты: 40″ и 36″25‴, отношеніе которыхъ составляетъ приблизительно $11\frac{1}{6}$ къ $10\frac{1}{6}$. Такъ это бы было при предположеніи, что плотность Юпитера равномѣрная, но если бы плотность по плоскости экватора была больше нежели по полярной оси, то отношеніе діаметровъ могло бы составить и 12 къ 11 или 13 къ 12 или даже 14 къ 13.

Кассини уже въ 1691 году наблюдалъ, что экваторіальный діаметръ Юпитера превосходитъ другой діаметръ приблизительно на $\frac{1}{15}$ часть своей величины. *Поундъ*, пользуясь телескопомъ 123 футовой длины и превосходнымъ микрометромъ, произвелъ въ 1719 году слѣдующія измѣренія діаметровъ Юпитера (см. таблицу на стр. 483).

Слѣдовательно теорія согласуется съ явленіями; къ тому же планеты болѣе нагрѣваются свѣтомъ солнца у своихъ экваторовъ и поэтому тамъ нѣсколько болѣе пропекаются, нежели у полюсовъ.

Что сила тяжести вслѣдствіе суточнаго вращенія земли у экватора меньше и значитъ земля тамъ болѣе возвышается нежели у полюсовъ,

Время наблюденій.	Наибольшій діаметръ.	Наименьшій діаметръ.	Отношеніе діаметровъ.
Января 28 6 ч.	13,40 частей	12,28 частей	12 : 11
Марта 6 7	13,12	12,20	$13\frac{3}{4} : 12\frac{3}{4}$
Марта 9 7	13,12	12,08	$12\frac{2}{3} : 11\frac{2}{3}$
Апрѣля 9 9	12,32	11,48	$14\frac{1}{2} : 13\frac{1}{2}$

слѣдуетъ также изъ наблюденій надъ маятниками, обозрѣніе которыхъ дается въ слѣдующемъ предложеніи.

Предложеніе XX. Задача IV.

Найти и сравнить между собою вѣса тѣлъ въ разныхъ областяхъ земли.

Такъ какъ вѣса воды неравныхъ колѣнъ канала $ACQqca$ между собою равны и вѣса частей пропорціональныхъ всей длинѣ колѣнъ и сходственно въ нихъ расположенныхъ относятся между собою какъ вѣса самихъ колѣнъ, т.-е. также между собою равны, то вѣса равныхъ частей сходственно расположенныхъ въ этихъ колѣнахъ будутъ относиться какъ 230 къ 229. Это относится и до всякихъ однородныхъ, равныхъ и сходственно въ этихъ каналахъ расположенныхъ массъ—вѣса ихъ обратно пропорціональны длинѣ колѣнъ, т.-е. обратно пропорціональны разстояніямъ до центра земли. Слѣдовательно, если массы находятся въ верхнихъ частяхъ канала, т.-е. на поверхности земли, то этихъ массъ вѣса будутъ обратно пропорціональны разстояніямъ ихъ до центра.

На основаніи такого же разсужденія, вѣса въ какихъ угодно иныхъ областяхъ земли обратно пропорціональны разстояніямъ этихъ мѣстъ до центра, поэтому если предположить, что земля есть сфероидъ, отношеніе вѣсовъ находится.

Отсюда слѣдуетъ теорема, что приращеніе вѣса при переходѣ отъ экватора къ полюсамъ приблизительно пропорціонально синусу верзусу удвоенной широты или, что то же самое, квадрату синуса широты [191]). Прибли-

---

[191]) Обозначая геоцентрическую широту мѣста черезъ φ, радіусъ экватора черезъ a, полярную полуось черезъ b и черезъ r разстояніе мѣста до центра, имѣемъ:

$$r = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = a(1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = a\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\varphi\right)$$

если положить $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2$ и пренебрегать всѣми высшими степенями этой малой величины.

зительно въ томъ же отношеніи будутъ возрастать и длины одного градуса меридіана съ широтою. Такъ какъ широта *Парижа* 48°50′, широта мѣстъ подъ экваторомъ 0°0′, широта полюсовъ 90° синусы; верзусы двойной широты суть: 11334, 00000 и 20000, принимая радіусъ за 10000; отношеніе силы тяжести при полюсѣ къ силѣ тяжести у экватора 230 къ 229, избытокъ тяжести при полюсѣ къ тяжести подъ экваторомъ 1 къ 229, то избытокъ силы тяжести подъ широтою *Парижа* будетъ относиться къ силѣ тяжести подъ экваторомъ какъ $1 . \frac{11334}{20000}$ къ 229, иначе какъ 5667 къ 2290000, поэтому силы тяжести въ этихъ мѣстахъ будутъ находиться въ отношеніи 2295667 къ 2290000.

Вслѣдствіе этого, такъ какъ длины маятниковъ, совершающихъ размахи въ одинаковое время, пропорціональны величинѣ силы тяжести, въ широтѣ же *Парижа* длина маятника, дѣлающаго размахъ въ одну секунду равна 3 фута $8\frac{1}{2}$ линій парижскихъ или, точнѣе, $8\frac{5}{9}$ линіи, принимая поправку на вѣсъ воздуха, то длина маятника подъ экваторомъ будетъ меньше маятника Парижскаго на 1,087 линіи. На основаніи такого разсчета составлена слѣдующая таблица:

Широта.	Длина маятника.	Длина 1° дуги меридіана.
0°	3 ф. 7,468 лин.	56637 туаз.
5	7,482	642
10	7,526	659
15	7,596	687
20	7,692	724
25	7,812	769
30	7,948	823
35	8,099	882
40	8,261	945
1	8,294	958
2	8,327	971
3	8,361	984
4	8,394	56997
45	8,428	57010
6	8,461	022
7	8,494	035
8	8,528	048
9	8,561	061
50	8,594	074
55	8,756	137
60	8,907	196
65	9,044	250

Изъ этой таблицы видно, что неравенство градусовъ настолько мало, что для географіи землю можно принимать за шаръ, въ особенности если она нѣсколько плотнѣе близъ плоскости экватора, нежели у полюсовъ.

На самомъ дѣлѣ нѣкоторые астрономы, посланные для наблюденій въ отдаленныя области, замѣтили, что маятники ихъ часовъ колебались медленнѣе близъ экватора, нежели въ нашихъ мѣстахъ. Первый это замѣтилъ *Г. Рише* въ 1672 году на островѣ *Кайенѣ*, а именно, наблюдая прохожденія неподвижныхъ звѣздъ черезъ меридіанъ въ *августѣ* мѣсяцѣ того года, онъ увидалъ, что его часы отставали противъ средняго движенія солнца, причемъ суточная разность достигала 2 м. 28 с. Онъ сдѣлалъ затѣмъ такой простой маятникъ, который совершалъ каждый свой размахъ въ одну секунду, замѣчаемую по превосходнымъ часамъ, и измѣрялъ его длину. Онъ повторялъ эти наблюденія еженедѣльно въ продолженіе десяти мѣсяцевъ. По возвращеніи во Францію онъ сличилъ длину этого маятника съ длиною маятника Парижскаго (которая равнялась 3 фута $8\frac{3}{5}$ линіи парижскихъ) причемъ оказалось, что его маятникъ короче на $1\frac{1}{4}$ линіи.

Затѣмъ нашъ соотечественникъ *Галлей* при плаваніи около 1677 года на о. *Св. Елены* замѣтилъ, что его часы шли тамъ медленнѣе нежели въ *Лондонѣ*, но онъ не пронаблюдалъ точно разницы, а укоротилъ маятникъ болѣе чѣмъ на $\frac{1}{8}$ дюйма, т.-е. болѣе чѣмъ на полторы линіи; чтобы этого достигнуть, такъ какъ длина винта въ нижней части маятника была недостаточна, онъ проложилъ между гайкою винта и грузомъ маятника деревянный кружочекъ.

Затѣмъ въ 1682 г. Гг. *Варэнъ* и *Де-Гайсъ* нашли, что длина маятника, дѣлающаго свои размахи въ 1 секунду въ королевской Парижской обсерваторіи равна 3 фут. $8\frac{5}{9}$ линіи, на островѣ же *Горе* опредѣленная ими по тому же способу длина секунднаго маятника оказалась въ 3 фут. $6\frac{5}{9}$ линіи, т.-е. разность составляла 2 линіи. Въ томъ же году перейдя на о. *Мартинику* и *Гваделупу*, они нашли, что длина секунднаго маятника тамъ равна 3 фут. $6\frac{1}{2}$ линіямъ.

Послѣ того г. *Купле*, сынъ въ *іюлѣ* 1697 года вывѣрилъ свои часы въ Парижской обсерваторіи такъ, что ихъ ходъ долгое время совпадалъ съ среднимъ движеніемъ солнца. Сдѣлавъ затѣмъ переходъ въ *Лиссабонъ* онъ нашелъ, что въ *ноябрѣ* мѣсяцѣ его часы отставали на 2 мин. 13 сек. въ сутки. Въ *мартѣ* слѣдующаго года придя въ *Параибо* онъ нашелъ, что его часы отставали противъ *Парижа* на 4 мин. 12 сек. въ сутки. На основаніи этихъ наблюденій онъ утверждалъ, что въ *Лиссабонѣ* маятникъ короче на $2\frac{1}{2}$ линіи и въ *Параибо* на $3\frac{2}{3}$ линіи нежели въ *Парижѣ*. Было бы правильнѣе если бы онъ принялъ эти разности въ $1\frac{1}{3}$ и $2\frac{5}{9}$ линіи ибо эти послѣднія величины соотвѣтствуютъ разностямъ временъ качаній въ 2 мин. 13 сек. и 4 мин. 12 сек. Эти грубыя наблюденія заслуживаютъ малаго довѣрія.

Въ ближайшіе годы (1699 и 1700) г. *Де-Гайсъ* при новомъ плаваніи въ Америку опредѣлилъ, что на островахъ *Кайенѣ* и *Гренадѣ* длина се-

кунднаго маятника немного менѣе 3 фут. $6\frac{1}{2}$ линій, что на о. *Св. Христофора* эта длина равна 3 фут. $6\frac{3}{4}$ линій и на о. *Св. Доминика* она равна 3 фут. 7 линій.

Въ 1704 году г. *Фёллье* нашелъ, что въ *Портобелло* въ Америкѣ длина секунднаго маятника равна лишь 3 фут. $5\frac{7}{12}$ линіи, т.-е. почти на три линіи короче нежели въ *Парижѣ*, однако въ его наблюденіи есть ошибка, ибо придя на *Мартинику* онъ нашелъ, что длина маятника равна лишь 3 фут. $5\frac{10}{12}$ линіи.

Широта *Параибо* 6°38′ южная *Портобелло* 9°33′ сѣв., широты острововъ *Кайены, Гореи, Гвадалупы, Мартиники, Гранады. Св. Христофора* и *Св. Доминика* соотвѣтственно: 4°55′; 14°40′; 14°00′; 14°44′; 12°06′; 17°19′ и 19°48′ сѣв. Избытокъ длины Парижскаго секунднаго маятника надъ длинами такихъ же маятниковъ наблюденными въ этихъ широтахъ немного болѣе нежели показанъ въ предыдущей таблицѣ на основаніи вычисленій. Поэтому, земля на экваторѣ немного выше нежели по этому разсчету и къ центру болѣе плотна нежели въ шахтахъ близъ поверхности, если только вслѣдствіе высокой теплоты, длины маятниковъ нѣсколько не увеличивались.

Въ самомъ дѣлѣ, г. *Пикаръ* замѣтилъ, что желѣзная линейка, которая зимою на морозѣ была длиною въ одинъ футъ, при нагрѣваніи на огнѣ становилась равной одному футу и $\frac{1}{4}$ линіи. Затѣмъ, г. *де-ля-Гиръ* наблюдалъ, что желѣзная полоса, которой длина въ зимнее время была шесть футъ, будучи выставленной лѣтомъ на солнцѣ, оказывалась длиною въ шесть футъ и $\frac{2}{3}$ линіи. Въ первомъ случаѣ теплота была больше нежели во второмъ, въ этомъ же послѣднемъ случаѣ была болѣе нежели наружныхъ частей человѣческаго тѣла, ибо металлы сильно накаливаются лѣтнимъ солнцемъ. Стержень маятника часовъ никогда лѣтомъ не выставляется на солнце и никогда не достигаетъ теплоты наружной поверхности человѣческаго тѣла, поэтому, въ часахъ стержень маятника длиною въ три фута будетъ немногимъ длиннѣе лѣтомъ нежели зимою, но разность этихъ длинъ не превзойдетъ $\frac{1}{4}$ линіи, вслѣдствіе этого, полная разность длинъ секундныхъ маятниковъ подъ разными широтами не можетъ быть приписываема различной теплотѣ. Нельзя также приписать эту разность ошибкамъ въ наблюденіяхъ астрономовъ посланныхъ изъ *Франціи*, ибо, хотя ихъ наблюденія и не вполнѣ между собою совпадаютъ, но разницы на столько малы, что ими можно пренебречь, всѣ же они согласуются въ томъ, что секундные маятники на экваторѣ короче нежели въ королевской Парижской обсерваторіи, причемъ разность не меньше $1\frac{1}{4}$ линіи и не больше $2\frac{2}{3}$ линіи. По наблюденіямъ г. *Рише* въ *Кайенѣ* разность была $1\frac{1}{4}$ линіи, по наблюденіямъ *Де-Гайса* эта исправленная разность составляла отъ $1\frac{1}{2}$ до $1\frac{3}{4}$ линій. По другимъ, менѣе точнымъ наблюденіямъ, получалось даже до 2-хъ линій. Эти несогласія могутъ частію происходить отъ погрѣшности наблюденій, отъ неоднородности внутреннихъ частей земли, отъ высоты горъ и отъ разной теплоты воздуха.

Желѣзная полоса трехъ футовой длины въ зимнее время въ *Англіи* короче нежели въ лѣтнее на $\frac{1}{6}$ линіи, какъ мнѣ кажется. Если отнять такую величину, какъ происходящую отъ теплоты подъ экваторомъ, изъ полученной по наблюденіямъ разности въ $1\frac{1}{4}$ линіи, то останется $1\frac{1}{12}$ линіи, что весьма точно совпадаетъ съ полученной по теоріи величиною въ 1,087 линіи. Наблюденія *Рише* въ *Кайеннѣ* производились еженедѣльно въ продолженіе десяти мѣсяцевъ, и длины маятника отмѣченныя имъ тамъ на желѣзномъ стержнѣ, были сличены съ длиною его во Франціи, отмѣченной на томъ же стержнѣ. Такой тщательности и предосторожности не было въ другихъ наблюденіяхъ. Если довѣриться этимъ наблюденіямъ, то земля при экваторѣ выше, нежели при полюсахъ, примѣрно на 17 миль, какъ то и получено по изложенной теоріи.

Предложеніе XXI. Теорема XVII.

Точки равноденствій отступаютъ и земная ось при каждомъ годовомъ обращеніи земли совершаетъ колебанія дважды наклоняясь къ эклиптикѣ и затѣмъ дважды отходя въ первоначальное свое положеніе.

Слѣдуетъ изъ предл. LXVI сл. 20 кн. 1-й. Но указанное колебательное движеніе должно быть весьма мало и едва-едва замѣтно.

Предложеніе XXII. Теорема XVIII.

Всѣ движенія луны и всѣ неравенства этихъ движеній слѣдуютъ изъ вышеизложенныхъ началъ.

Изъ предл. LXV, кн. 1 слѣдуетъ, что главныя большія планеты при своемъ обращеніи вокругъ солнца, могутъ переносить другія малыя планеты обращающіяся около нихъ. Эти малыя планеты должны обращаться по эллипсамъ, имѣющимъ своимъ фокусомъ центры большихъ. Вслѣдствіе дѣйствія солнца ихъ движенія испытываютъ весьма многочисленныя возмущенія, и подвержены неравенствамъ подобнымъ замѣчаемымъ въ движеніи луны. Эта послѣдняя (по сл. 2, 3, 4, 5 предл. LXVI) въ сизигіяхъ движется быстрѣе, описывая радіусомъ проведеннымъ къ землѣ площадь большую нежели слѣдовало бы по пропорціональности времени и ея скорости; въ квадратурахъ, кривизна ея орбиты меньше и она болѣе приближается къ землѣ, поскольку тому не препятствуютъ измѣненія эксцентриситета. Эксцентриситетъ же наибольшій (по слѣд. 9 предл. LXVI) когда апогей луны находится въ сизигіяхъ и наименьшій, когда онъ приходится въ квадратурахъ, поэтому луна въ перигеѣ быстрѣе и ближе къ намъ, въ апогеѣ медленнѣе и дальше отъ насъ будучи въ сизигіяхъ нежели въ квадратурахъ. Сверхъ того, апогей перемѣщается впередъ, узлы же—назадъ, но движенія ихъ неравномѣрны. Апогей (по сл. 7 и 8 пр. LXVI) перемѣщается впередъ быстрѣе въ своихъ сизигіяхъ и отступаетъ назадъ медленнѣе въ квадра-

турахъ, и вслѣдствіе избытка перемѣщеній впередъ надъ отступаніями назадъ, ежегодно перемѣщается движеніемъ попутнымъ. Узлы же (по сл. 2 пр. LXVI) находятся въ покоѣ въ своихъ сизигіяхъ и быстрѣе всего отступаютъ въ квадратурахъ. Наибольшая широта луны больше въ ея квадратурахъ (по слѣд. 10 пр. LXVI) нежели въ сизигіяхъ, и среднее ея движеніе медленнѣе, когда земля въ перигеліи (по сл. 6 пр. LXVI) нежели когда она въ афеліи. Это и суть главнѣйшія неравенства луны замѣченныя астрономами. Но кромѣ того, есть еще нѣкоторыя неравенства возмущающія движенія луны и не наблюденныя прежними астрономами, такъ что до сихъ поръ они не могли быть приведены ни къ какому закону или правилу. Таковы скорости или часовыя движенія апогея и узловъ луны и уравненія ихъ, разность между наибольшимъ эксцентриситетомъ въ сизигіяхъ и наименьшимъ въ квадратурахъ и неравенство называемое варіацiей; всѣ эти неравенства увеличиваются и уменьшаются въ продолженіе года (по сл. 14 пр. LXVI) въ отношеніи кубовъ видимаго діаметра солнца. Кромѣ того, варіація увеличивается или уменьшается приблизительно пропорціонально квадрату времени между квадратурами (по сл. 1 и 2 лем. X и сл. 16 пред. LXVI, кн. 1-й). Въ астрономическихъ вычисленіяхъ эти неравенства относились къ уравненію центра и смѣшивались съ нимъ.

Предложеніе XXIII. Задача V.

Неравенства движенія спутниковъ Юпитера и Сатурна могутъ быть выведены изъ движеній луны.

Движенія лунъ или спутниковъ Юпитера выводятся изъ движенія нашей луны слѣдующимъ образомъ. Среднее движеніе узловъ крайняго спутника Юпитера находится къ среднему движенію узловъ луны въ отношеніи равномъ произведенію квадрата отношенія времени оборота земли вокругъ солнца къ времени оборота Юпитера на отношеніе времени оборота спутника вокругъ Юпитера ко времени оборота луны вокругъ земли (по слѣд. 16 пр. LXVI), поэтому, этотъ узелъ въ столѣтіе проходитъ впередъ 8°24′. Среднія движенія внутреннихъ спутниковъ относятся къ вышеуказанному какъ времена ихъ обращеній ко времени обращенія крайняго (по тому же слѣдствію), слѣдовательно, опредѣляются.

Прямое или попутное движеніе вершины орбиты каждаго спутника, относится къ попятному движенію его узловъ какъ движеніе апогея луны къ движенію ея узловъ, слѣдовательно, находится. Однако, найденное такимъ образомъ движеніе вершины должно быть уменьшено, приблизительно, въ отношеніи 5 къ 9 или кругло 1 къ 2 по причинѣ, изложенію которой здѣсь не мѣсто. Наибольшія уравненія узловъ и вершинъ для каждаго спутника, относятся соотвѣтственно къ наибольшимъ уравненіямъ узловъ и вершинъ луны какъ перемѣщеніе узловъ и вершинъ спутниковъ за время, равное полному періоду этихъ уравненій къ перемѣщенію узловъ и апогея луны за время полнаго періода ихъ уравненій. Варіація спутника

усматриваемая съ Юпитера, относится къ варіаціи луны какъ полныя перемѣщенія узловъ въ продолженіе времени въ которое спутникъ и луна обращаются относителтно солнца (по тому же слѣдствію), слѣдовательно, для крайняго спутника не превосходитъ $5''12'''$.

Предложеніе XXIV. Теорема XIX.

Приливъ и отливъ моря происходитъ отъ дѣйствія луны и солнца.

Изъ слѣдствій 19 и 20 пред. LXVI, книги 1-й явствуетъ, что море должно дважды повышаться и дважды понижаться въ продолженіе каждыхъ, какъ лунныхъ, такъ и солнечныхъ сутокъ, и что наибольшая высота воды (полная вода) въ моряхъ свободныхъ и глубокихъ должна слѣдовать менѣе нежели черезъ шесть часовъ послѣ прохожденія свѣтила черезъ меридіанъ мѣста. Такъ оно и происходитъ на всемъ восточномъ побережьѣ сѣверной и южной части *Атлантическаго* океана между *Франціей* и мысомъ *Доброй Надежды*, а также на *Чилійскомъ* и *Перувіанскомъ* берегу *Тихаго* океана. На всѣхъ этихъ берегахъ приливъ бываетъ во второмъ, третьемъ или четвертомъ часу, за исключеніемъ такихъ мѣстъ, гдѣ движеніе, распространнясь изъ глубокаго океана черезъ мелководія, запаздываетъ до пятаго, шестого, седьмого или даже еще болѣе поздняго часа. Я считаю здѣсь часы отъ обоихъ прохожденій свѣтила черезъ меридіанъ мѣста какъ надъ, такъ и подъ горизонтомъ, подъ часомъ же луннымъ я разумѣю одну двадцатьчетвертую часть промежутка времени между двумя послѣдовательными видимыми верхними прохожденіями луны черезъ меридіанъ. Сила солнца или луны, поднимающая море, наибольшая при самомъ прохожденіи свѣтила черезъ меридіанъ мѣста. Но дѣйствіе силы на море продолжается и послѣ этого и слѣдовательно возрастаетъ, пока море не достигнетъ наибольшей высоты, что бываетъ черезъ одинъ или два часа, а у береговъ чаще черезъ три часа или даже болѣе, если море мелководно.

Оба движеніи, производимыя обоими этими свѣтилами, не распредѣляются порознь, а слагаются въ нѣкоторое среднее движеніе. При соединеніяхъ и при противостояніяхъ свѣтилъ ихъ дѣйствія слагаются и производятъ наибольшій приливъ и отливъ. Въ квадратурахъ солнце повышаетъ воду тамъ, гдѣ луна ее понижаетъ, и понижаетъ тамъ, гдѣ луна ее повышаетъ, и вслѣдствіе разности дѣйствій происходитъ наименьшій приливъ. А такъ какъ наблюденіе показываетъ, что дѣйствіе луны сильнѣе дѣйствія солнца, то наибольшая высота воды и бываетъ приблизительно въ третьемъ лунномъ часу. Внѣ сизигій и квадратуръ наибольшая высота воды, которая должна бы имѣть всегда мѣсто въ третьемъ лунномъ часу при дѣйствіи только одной силы луны и въ третьемъ часу солнечнаго времени при дѣйствіи одной только силы солнца, при совокупномъ дѣйствіи обѣихъ силъ приходится въ нѣкоторое промежуточное время ближе къ третьему лунному часу.

Слѣдовательно, при переходѣ луны отъ сизигій къ квадратурамъ, когда третій часъ солнечнаго времени предшествуетъ третьему часу лунному, наибольшая высота воды также предшествуетъ третьему лунному часу и притомъ на наибольшій промежутокъ немного послѣ октантовъ. На такіе же промежутки наибольшая высота воды опаздываетъ послѣ третьяго луннаго часа при переходѣ луны отъ квадратуры къ сизигіямъ. Такъ это происходитъ въ открытыхъ моряхъ. Въ устьяхъ же рѣкъ наибольшіе приливы при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ наступаютъ позже.

Дѣйствія свѣтилъ зависятъ отъ ихъ разстояній до земли, при меньшихъ разстояніяхъ они сильнѣе, при бо̀льшихъ слабѣе и притомъ въ отношеніи кубовъ видимыхъ діаметровъ. Слѣдовательно, зимою солнце, будучи въ перигеѣ, производитъ бо̀льшее дѣйствіе, вслѣдствіе котораго сизигійные приливы нѣсколько больше и квадратурные (при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ) нѣсколько менѣе, нежели лѣтомъ; также и луна каждый мѣсяцъ, будучи въ перигеѣ производитъ болѣе высокіе приливы, нежели черезъ пятнадцать дней, когда она приходитъ въ апогей. Отсюда происходитъ, что два самыхъ наибольшихъ сизигійныхъ прилива не слѣдуютъ одинъ за другимъ.

Дѣйствіе каждаго свѣтила зависитъ и отъ его склоненія иначе разстоянія отъ экватора. Ибо если бы свѣтило находилось въ полюсѣ, то оно притягивало бы частицы воды постоянно безъ усиленія и ослабленія дѣйствія и, слѣдовательно, не могло бы производить поперемѣннаго движенія. Поэтому при переходѣ свѣтилъ отъ экватора къ полюсамъ дѣйствіе ихъ постепенно ослабѣваетъ, и они производятъ меньшіе приливы въ сизигіяхъ сольстиціальныхъ нежели при равноденственныхъ. Въ квадратурахъ же сольстиціальныхъ происходятъ бо̀льшіе приливы, нежели въ квадратурахъ равноденственныхъ, ибо дѣйствіе луны, находящейся на экваторѣ, въ наибольшей степени превосходитъ дѣйствіе солнца. Такимъ образомъ наибольшіе приливы происходятъ въ сизигіяхъ и наименьшія въ квадратурахъ близъ времени равноденствій для обоихъ свѣтилъ вмѣстѣ. Наибольшій сизигійный приливъ всегда долженъ сопровождаться наименьшимъ квадратурнымъ, что согласно съ наблюденіями. Вслѣдствіе меньшаго разстоянія солнца до земли въ зимнее время нежели въ лѣтнее происходитъ то, что наибольшіе и наименьшіе приливы чаще предшествуютъ весеннему равноденствію, нежели послѣдуютъ за нимъ и чаще послѣдуютъ за осеннимъ равноденствіемъ, нежели предшествуютъ ему.

Дѣйствія свѣтилъ зависятъ также отъ широты мѣста. Пусть $ApEP$ представляетъ (фиг. 185) землю, покрытую повсюду глубокою водой, C ея центръ, P, p полюсы, AE экваторъ, F какое-либо мѣсто внѣ экватора, Ff параллель этого мѣста, Dd соотвѣтствующую ей параллель по другую сторону экватора, L мѣсто, занимаемое луной за три часа передъ тѣмъ, H мѣсто земли перпендикулярно подъ нимъ лежащее, h мѣсто ему противоположное, K, k мѣста отстоящія отъ нихъ на 90°, CH, Ch наибольшія высоты моря, измѣряемыя отъ центра земли, CK, Ck наименьшія высоты.

Если на осяхъ *Hh* и *Kk* описать эллипсъ и затѣмъ обращеніемъ его около большей оси *Hh* произвести сфероидъ *HPKhpk*, то этотъ сфероидъ представитъ приблизительно форму, принимаемую моремъ, *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* и будутъ для мѣстъ *F*, *f*, *D*, *d* высотами воды, считаемыми отъ центра земли *C*. Если при обращеніи этого эллипса какая-либо его точка *N* описываетъ кругъ *NM*, пересѣкающій параллели *Ff*, *Dd* въ точкахъ *R* и *T* и экваторъ *AE* въ точкѣ *S*, то *CN* представитъ общую высоту воды для всѣхъ точекъ этого круга. Отсюда видно, что при суточномъ обращеніи земли, будетъ полная вода въ данномъ мѣстѣ *F* въ третьемъ часу послѣ верхняго прохожденія луны черезъ меридіанъ, затѣмъ малая вода въ *Q* въ третьемъ часу послѣ захожденія луны, затѣмъ полная вода въ *f* въ третьемъ часу послѣ нижняго прохожденія луны и, наконецъ, опять малая вода въ *Q* въ третьемъ часу послѣ восхода луны. Вторая полная вода въ *f* будетъ ниже нежели первая въ *F*. Итакъ, море подраздѣляется на два отдѣльныхъ приливныхъ полушарія *KHk*—сѣверное и противоположное ему *Khk*—южное, которое и будемъ такъ называть. Эти другъ другу противоположные приливы приходятъ по очереди на меридіанъ мѣста, черезъ промежутки въ двѣнадцать лунныхъ часовъ. Такъ какъ области, широта коихъ сѣверная, болѣе подвержены сѣверному приливу, а южныя—южному, то поочередно и происходятъ большой и малый приливъ для всѣхъ лежащихъ внѣ экватора мѣстъ, гдѣ солнце и луна восходятъ и заходятъ. Когда при склоненіи одноименномъ съ широтою мѣстъ луна ближе всего проходитъ къ его зениту, наступаетъ наибольшій приливъ, бывающій въ третьемъ часу по прохожденіи луны черезъ меридіанъ; при измѣненіи склоненія луны высота полной воды уменьшается. Наибольшая разность высотъ двухъ послѣдовательныхъ большихъ водъ происходитъ во времена равноденствій въ особенности, если восходящій узелъ луны приходится въ началѣ знака Овна. Такъ оказывается, что зимою утренніе приливы въ *Плимутѣ* выше вечернихъ, лѣтомъ же вечерніе выше утреннихъ почти на одинъ футъ, въ *Бристолѣ* даже на 15 дюймовъ, какъ то наблюдали *Кальпрессъ и Штурми*.

Описанныя до сихъ поръ движенія нѣсколько измѣняются упомянутой выше силою воздѣйствія водъ, вслѣдствіе которой приливъ можетъ сохраняться нѣкоторое время и послѣ того какъ прекратилось дѣйствіе свѣтилъ. Это сохраненіе сообщеннаго движенія уменьшаетъ разность чередующихся приливовъ, увеличиваетъ ближайшіе приливы послѣ сизигій и уменьшаетъ ближайшіе приливы, слѣдующіе за квадратурами. Поэтому и происходитъ, что въ *Плимутѣ* и *Бристолѣ* разность высотъ послѣдовательныхъ большихъ водъ не больше одного фута или 15-ти дюймовъ, и что наибольшій приливъ не первый послѣ сизигій, а третій. Всѣ движенія вмѣстѣ съ тѣмъ замедляются при переходѣ черезъ мелководія, такъ что въ нѣкоторыхъ проливахъ и устьяхъ рѣкъ наибольшіе приливы суть четвертые или даже пятые послѣ сизигій.

Кромѣ того можетъ случиться, что къ тому же порту приливъ дохо-

дитъ черезъ различные проливы и притомъ черезъ одни скорѣе, нежели черезъ другіе, тогда тотъ же самый приливъ, подраздѣленный на два или на нѣсколько происходящихъ послѣдовательно, можетъ слагаться въ новыя движенія разнаго рода. Вообразимъ, что къ тому же порту приходятъ два равныхъ прилива отъ двухъ различныхъ мѣстъ, причемъ первый предшествуетъ второму на шесть часовъ и происходитъ въ третьемъ часу по прохожденіи луны черезъ меридіанъ этого порта. Если бы луна при этомъ своемъ прохожденіи черезъ меридіанъ находилась на экваторѣ, то черезъ каждые шесть часовъ происходилъ бы равный приливу отливъ, которые, совпадая между собою, взаимно бы уничтожались, такимъ образомъ въ тѣ сутки вода оставалась бы спокойною. Если же луна сойдетъ съ экватора, то океанскіе приливы будутъ поочередно большими и малыми, какъ уже сказано и, такимъ образомъ, въ этотъ портъ придутъ поочередно обѣ большихъ и обѣ малыхъ воды. Но двѣ большихъ воды даютъ при своемъ соединеніи высокую воду въ нѣкоторое промежуточное время, высокая и малая вода производятъ нѣкоторую среднюю высоту воды въ промежуткѣ между ними и, наконецъ, между двумя малыми водами, вода имѣетъ наименьшую высоту.

Такимъ образомъ въ продолженіе 24-хъ часовъ будетъ не двѣ высокихъ и двѣ малыхъ воды, а лишь по одной, и высокая вода, когда склоненіе луны одноименно съ широтою мѣста, придется или въ шестомъ или въ 30-мъ часу послѣ прохожденія луны черезъ меридіанъ, при измѣненіяхъ же склоненія луны на противоположное эта высокая вода смѣнится малою. Такого рода примѣръ имѣемъ въ *Тонкингскомъ* портѣ *Батшамъ* въ широтѣ 20°50′ сѣв., какъ о томъ сообщаетъ *Галлей* на основаніи наблюденій мореплавателей. Въ этомъ портѣ на слѣдующій день послѣ прохода луны черезъ экваторъ вода остается спокойной, когда же склоненіе луны становится сѣвернымъ, то въ сутки бываетъ не два прилива и два отлива, а всего лишь по одному, причемъ высокая вода бываетъ при заходѣ луны, низкая при восходѣ ея. Приливъ увеличивается вмѣстѣ съ склоненіемъ луны до 7-го или 8-го дня, затѣмъ въ продолженіе слѣдующихъ 7 или 8 дней приливъ уменьшается въ той же постепенности, въ какой онъ нарасталъ и прекращается, когда луна мѣняетъ свое склоненіе съ сѣвернаго на южное, переходя вновь черезъ экваторъ. Послѣ этого приливъ замѣняется отливомъ, такъ что малая вода имѣетъ мѣсто при заходѣ луны и высокая при восходѣ ея, пока луна, измѣняя свое склоненіе, не пройдетъ вновь черезъ экваторъ.

Къ этому порту подходъ двоякій, одинъ отъ *Сѣвернаго Китайскаго моря* черезъ проливъ между материкомъ и островомъ *Люцономъ*, другой со стороны *Индійскаго моря* (Южно-Китайскаго) между материкомъ и островомъ *Борнео*. Такъ какъ приливъ изъ Индійскаго моря идетъ черезъ указанный проливъ двѣнадцать часовъ, а изъ Китайскаго моря шесть часовъ, то приходясь на третій и девятый лунные часы, эти два прилива и слагаются въ описанное выше движеніе; нѣтъ ли тамъ и еще какихъ

иныхъ условій, я предоставляю опредѣлить наблюденіями на близлежащихъ побережьяхъ.

До сихъ поръ я объяснялъ причины движеній луны и морей. О количествѣ же этихъ движеній остается кое-что дополнить.

Предложеніе XXV. Задача VI [192]).

Найти силу солнца, возмущающую движенія луны.

Пусть S представляетъ солнце, T землю, P луну (фиг. 186), $CADB$ орбиту луны. Отложивъ по SP длину SK, равную ST, возьменъ SL такъ, чтобы было:

$$SL : SK = SK^2 : SP^2$$

и проведемъ LM параллельно PT, тогда если ускорительную силу тяготѣнія земли къ солнцу представить длиною ST или SK, то SL представитъ ускорительную силу тяготѣнія луны къ солнцу.

Эта сила слагается изъ двухъ силъ SM и LM, изъ коихъ LM и часть TM силы SM возмущаютъ движеніе луны, какъ изложено въ предл. LXVI и его слѣдствіяхъ. Если разсматривать, что земля и луна обращаются около общаго ихъ центра тяжести, то и движеніе земли возмущается подобными же силами; но можно относить къ лунѣ какъ суммы силъ, такъ и движеній, и изображать суммы силъ пропорціональными имъ линіями TM и ML. Среднее значеніе силы ML находится къ центростремительной силѣ, подъ дѣйствіемъ которой луна могла бы обращаться по своей орбитѣ вокругъ покоющейся земли, въ отношеніи равномъ квадрату отношенія временъ обращеній луны вокругъ земли и земли вокругъ солнца (по слѣд. 17 пред. LXVI), т.-е. квадрату отношенія 27 дн. 7 ч. 43 мин. къ 365 дн. 6 ч. 9 мин., т.-е. въ отношеніи какъ 1000 къ 178725 или 1 къ $178\frac{29}{40}$.

---

[192]) Въ предложеніяхъ отъ XXV до XXXVI Ньютонъ излагаетъ теорію движенія луны. Эта теорія Ньютона разобрана въ Небесной Механикѣ какъ Лапласа (Laplace Mécanique Celeste t. V, livre XVI, ch. II) такъ и Тиссерана (F. Tisserand, Traité de Mécanique Celeste, t. III, ch. III). Разборъ Лапласа изложенъ настолько сжато, что требовалъ бы въ свою очередь поясненій, поэтому въ прибавленіи помѣщенъ переводъ упомянутой главы Небесной Механики Тиссерана. Я предпочелъ привести этотъ полный разборъ, исполненный знаменитымъ ученымъ вмѣсто примѣчаній къ каждому предложенію въ отдѣльности, тѣмъ болѣе, что теорія движенія луны представляетъ не столько общій, сколько спеціальный интересъ. Основываясь на разборѣ Тиссерана нетрудно представить всѣ результаты Ньютона аналитически, пользуясь его же геометрическими выводами. Кромѣ сочиненій, указанныхъ Тиссераномъ, въ которыхъ развивается теорія Ньютона, слѣдуетъ еще отмѣтить Курсъ Астрономіи Боненбергера (J. Bohnenberger. Astronomie. 1811), въ которомъ авторъ придерживается весьма близко изложенія Ньютона, дополняя и поясняя его геометрическія соображенія и представленія равносильными имъ формулами и разсчетами.

Въ предложеніи 4-мъ этой книги показано, что если бы земля и луна обращались около общаго ихъ центра тяжести, то среднее разстояніе между ними было приблизительно въ $60\frac{1}{2}$ среднихъ полудіаметровъ земли. Сила, подъ дѣйствіемъ которой луна могла бы обращаться около покоющейся земли въ разстояніи PT, равномъ $60\frac{1}{2}$ земныхъ полудіаметровъ, относится къ силѣ, подъ дѣйствіемъ которой она могла бы обращаться въ такое же время въ разстояніи 60 полудіаметровъ, какъ $60\frac{1}{2}$ къ 60. Слѣдовательно, средняя величина силы ML относится къ силѣ тяжести на поверхности земли, какъ $1 . 60\frac{1}{2} : 60 . 60 . 60 . 178\frac{29}{40}$, т.-е. какъ 1 къ 638092,6. На основаніи этого и отношенія линій TM и ML найдется и сила TM, это и суть силы солнца, возмущающія движенія луны.

Предложеніе XXVI. Задача VII.

Найти часовое приращеніе площади описываемой радіусомъ, проведеннымъ къ землѣ при движеніи луны по круговой орбитѣ.

Уже сказано, что площадь, описываемая радіусомъ, проведеннымъ отъ луны къ землѣ, пропорціональна времени, за выключеніемъ того, насколько движеніе луны возмущается дѣйствіемъ солнца. Здѣсь и предлагается изслѣдовать неравенство часового приращенія этой площади. Чтобы сдѣлать вычисленіе проще, вообразимъ, что орбита луны круговая и отбросимъ всѣ неравенства, кромѣ разсматриваемаго. Въ виду весьма большого разстоянія до солнца, примемъ также линіи SP и ST (фиг. 187) за параллельныя. При такомъ условіи сила LM сведется къ средней своей величинѣ TP, а также и сила TM къ средней своей величинѣ $3PK$. Эти двѣ силы (по сл. 2 зак.) слагаются въ силу TL; эта же послѣдняя сила, опуская на радіусъ TP перпендикуляръ LE, разлагается на силы TE и EL, изъ коихъ TE дѣйствуя постоянно по направленію радіуса TP, не ускоряетъ и не замедляетъ описанія площади TPC этимъ радіусомъ TP, сила же EL, дѣйствуя перпендикулярно радіусу, ускоряетъ или замедляетъ описаніе площади, поскольку она ускоряетъ или замедляетъ движеніе луны.

Это ускореніе луны при переходѣ ея отъ квадратуры C къ соединенію A въ каждый отдѣльный моментъ пропорціонально ускоряющей силѣ EL, т.-е. $\frac{3PK . TK}{TP}$. Представимъ время среднимъ движеніемъ луны, или, что сводится къ тому же самому, угломъ CTP, или же дугою CP. По перпендикуляру CG къ радіусу CT откладывается длина CG, равная CT.

Четверть окружности AC раздѣляется на безчисленное множество равныхъ частей Pp, которыми можно представить таковое же число равныхъ, весьма малыхъ промежутковъ времени; проведя pk перпендикулярно къ CT, проводимъ TG пересѣкающую продолженія KP и kp въ точкахъ F и f, тогда будетъ:

$$FK = TK$$
$$Kk : PK = Pp : Tp$$

т.-е. отношеніе $Kk : PK$ постоянное, поэтому $FK . Kk$, иначе площадь $FKkf$ будетъ пропорціональна $\frac{3PK . TK}{TP}$, т.-е. пропорціональна EL. Слагая получимъ, что полная площадь $GCKF$ будетъ пропорціональна суммѣ всѣхъ силъ EL, дѣйствовавшихъ на луну въ продолженіе всего времени CP, а значитъ и пропорціональна скорости, этою суммою произведенной, т.-е. ускоренію описанія площади CTP, иначе приращенію *секторіальной скорости.* Сила, подъ дѣйствіемъ которой луна можетъ обращаться въ 27 дн. 7 ч. 43 м. представляемыхъ кругомъ $CADB$, заставила бы тѣло въ продолженіе времени CT описать при своемъ паденіи путь $\frac{1}{2}$ CT и пріобрѣсти такую же скорость, съ какою луна движется по своей орбитѣ. Это явствуетъ изъ слѣд. 9 предл. IV кн. 1-ой. Но такъ какъ перпендикуляръ Kd, опущенный на TP, равенъ $\frac{1}{3}$ EL, и $\frac{1}{2}$ TP или $\frac{1}{2}$ ML, когда P въ октантахъ, то сила EL въ октантахъ, гдѣ она наибольшая, превосходитъ силу ML въ отношеніи 3 къ 2 и, слѣдовательно, относится къ той силѣ, подъ дѣйствіемъ которой луна могла бы обращаться вокругъ покоющейся земли въ продолженіе своего періода, какъ $100 : \frac{2}{3} . 17872\frac{1}{2}$, т.-е. какъ 100 къ 11915, и скорость, сообщаемая ею лунѣ въ продолженіе времени CT составитъ $\frac{100}{11915}$ скорости луны. Въ продолженіе же времени CPA эта сила сообщила бы скорость, бо́льшую найденной въ отношеніи CA къ CT или къ TP. Представимъ наибольшую силу EL въ октантахъ площадью $FK . Kk$, равною площади $\frac{1}{2}$ $TP . Pp$. Скорость, которую эта наибольшая сила можетъ произвести въ продолженіе времени CP, относится къ скорости, которую можетъ произвести всякая меньшая сила EL въ то же самое время, какъ площадь $\frac{1}{2}$ $TP . CP$ къ площади $KCFG$. Скорости же, производимыя въ продолженіе всего времени CPA будутъ относиться между собою, какъ площадь $\frac{1}{2}$ $TP . CA$ къ площади треугольника TCG иначе, какъ дуга AC къ радіусу TP.

Слѣдовательно (по предл. IX, 5 кн. элементовъ) скорость, производимая въ продолженіе всего времени CPA составитъ $\frac{100}{11915}$ скорости луны.

Такимъ образомъ къ средней скорости луны, пропорціональной средней величинѣ приращенія площадей прибавляется или же отъ нея отнимается половина исчисленной выше, поэтому если среднюю величину приращенія площади представить числомъ 11915, то сумма $11915 + 50$ или 11965 представитъ наибольшую секторіальную скорость въ сизигіи A, и разность $11915 - 50$, т.-е. 11865 наименьшую секторіальную скорость въ квадратурахъ.

Слѣдовательно площади, описываемыя въ равные промежутки времени въ сизигіяхъ и въ квадратурахъ, относятся другъ къ другу какъ 11965 къ 11865. Къ наименьшей секторіальной скорости надо прибавлять такое ея приращеніе, которое относится къ разности этихъ приращеній 100, какъ площадь трапеціи $FKCG$ къ площади треугольника TCG (или, что то же, какъ $PK^2 : TP^2$ или какъ $Pd : TP$), сумма представитъ секторіальную скорость для промежуточнаго положенія P луны.

Все это происходитъ такъ при предположенiи, что солнце и земля находятся въ покоѣ и луна совершаетъ свой синодическiй оборотъ въ 27 сутокъ 7 ч. 43 м. Но такъ какъ на самомъ дѣлѣ перiодъ синодическаго оборота луны составляетъ 29 сут. 12 ч. 44 м., то приращенiя секторiальныхъ скоростей должны быть увеличены пропорцiонально времени, т.-е. въ отношенiя 1080853 къ 1000000. Если это выполнить, то полное приращенiе, составлявшее $\frac{100}{11915}$ средней секторiальной скорости, составитъ отъ нея $\frac{100}{11023}$.

Слѣдовательно, секторiальная скорость въ квадратурахъ луны будетъ относиться къ таковой же въ сизигiяхъ, какъ 11023 — 50 къ 11023 + 50, т.-е. какъ 10973 къ 11073 и къ скорости при прохожденiи черезъ какое-либо промежуточное мѣсто ея орбиты P, какъ 10973 къ 10973 + Pd, причемъ TP принимается равной 100.

Слѣдовательно площадь, описываемая радiусомъ, проведеннымъ отъ луны къ землѣ въ равные, весьма малые, промежутки времени, приблизительно пропорцiональна суммѣ числа 219,46 и синусъ верзуса разстоянiя луны до ближайшей квадратуры, для круга коего радiусъ равенъ 1. Все это имѣетъ мѣсто, когда варiацiя въ октантахъ имѣетъ среднюю величину. Если же варiацiя больше или меньше, то вышеупомянутый синусъ-верзусъ долженъ быть увеличенъ или уменьшенъ въ томъ же отношенiи.

Предложенiе XXVII. Задача VIII.

По часовому движенiю луны найти ея разстоянiе до земли.

Площадь, описываемая радiусомъ, проведеннымъ отъ луны къ землѣ въ отдѣльные, весьма малые, равные промежутки времени, пропорцiональна произведенiю часового движенiя луны и квадрату разстоянiя луны до земли, слѣдовательно разстоянiе луны до земли прямо пропорцiонально корню квадратному изъ сказанной площади, и обратно пропорцiонально корню квадратному изъ часового движенiя.

Слѣдствiе 1. Такимъ образомъ можетъ быть найденъ видимый дiаметръ луны, ибо онъ обратно пропорцiоналенъ ея разстоянiю до земли. Пусть астрономы попробуютъ, въ какой мѣрѣ точно это правило совпадаетъ съ явленiями.

Слѣдствiе 2. Такимъ образомъ можетъ быть также опредѣленъ, пользуясь явленiями, болѣе точно, нежели до сихъ поръ, видъ орбиты луны.

Предложенiе XXVIII. Задача IX.

Найти дiаметры орбиты, по которой луна должна бы двигаться безъ эксцентриситета.

Кривизна траекторiи, описываемой движущимся тѣломъ, притягиваемымъ перпендикулярно къ этой траекторiи, прямо пропорцiональна силѣ этого притяженiя и обратно пропорцiональна квадрату скорости. Я считаю,

что кривизны линій находятся между собою въ предѣльномъ отношеніи синусовъ или тангенсовъ угловъ касанія при равныхъ радіусахъ, когда эти радіусы безконечно уменьшаются. Притяженіе луны къ землѣ въ сизигіяхъ равно избытку ея тяготѣнія къ землѣ надъ происходящею отъ солнца силою $2PK$, на которую ускорительная сила тяготѣнія луна къ солнцу превосходитъ или не достигаетъ величины ускорительной силы тяготѣнія земли къ солнцу. Въ квадратурахъ это притяженіе равно суммѣ тяготѣнія луны къ землѣ и солнечной силы KT, которая также направлена тогда къ землѣ. Эти притяженія, полагая

$$\frac{AT+CT}{2}=N,$$

приблизительно пропорціональны величинамъ:

$$\frac{178725}{AT^2}-\frac{2000}{CT.N}$$

и

$$\frac{178725}{CT^2}+\frac{1000}{AT.N}$$

или

$$178725N.CT^2-2000AT^2.CT$$

и

$$178725N.AT^2+1000CT^2.AT$$

ибо, если выразить ускорительную силу тяготѣнія луны къ землѣ числомъ 178725, то средняя величина силы ML, которая въ квадратурахъ равна PT или TK и направлена къ землѣ, есть 1000, и среднее значеніе силы TM въ сизигіяхъ есть 3000, откуда, если вычесть среднее значеніе силы ML, то и останется сила 2000, которою въ сизигіяхъ луна оттягивается отъ земли, и которая выше обозначена черезъ $2\ PK$.

Отношеніе же скорости луны въ сизигіяхъ A и B къ ея скорости въ квадратурахъ C и D, равно произведенію отношенія $CT:AT$ на отношеніе секторіальной скорости въ сизигіяхъ къ секторіальной скорости въ квадратурахъ, т.-е. оно равно $11073\,CT:10973\,AT$.

Раздѣливъ отношеніе приведенныхъ выше величинъ на квадратъ предыдущаго отношенія, получимъ отношеніе кривизны лунной орбиты въ сизигіяхъ къ кривизнѣ ея въ квадратурахъ, равнымъ:

$$\frac{120406729(178425AT^2.CT^2.N-2000AT^4.CT)}{122611329[178725AT^2.CT^2.N+1000CT^4.AT]},$$

т.-е.

$$\frac{2151969AT.CT.N-24081AT^3}{2191371AT.CT.N+12261CT^3}.$$

Такъ какъ видъ орбиты луны неизвѣстенъ, то возьмемъ вмѣсто нея эллипсъ $DBCA$ (фиг. 188), въ центрѣ котораго находится земля T, и у

котораго большая ось CD расположена между квадратурами, малая—между сизигіями. Но такъ какъ этотъ эллипсъ имѣетъ угловое движеніе, вращаясь около земли въ своей плоскости, та же траекторія, кривизна которой ищется, должна описываться въ плоскости, не имѣющей никакого углового движенія, то надо разсматривать фигуру, описываемую луною на неподвижной плоскости, при обращеніи этого эллипса, т.-е. фигуру Cpa. Отдѣльныя точки p этой фигуры находятся, беря на эллипсѣ какую-либо точку P, представляющую мѣсто луны и проводя $Tp = TP$ такъ, чтобы уголъ PTp былъ равенъ видимому движенію солнца за время послѣ квадратуры C, или, что сводится къ тому же, такъ чтобы уголъ CTp относился къ углу CTP, какъ время синодическаго оборота луны ко времени звѣзднаго ея оборота, т.-е. какъ 29 с. 12 ч. 44 м. къ 27 с. 7 ч. 43 м.

Взявъ уголъ CTa въ этомъ отношеніи къ прямому углу CTA и отложивъ длину $Ta = TA$, получимъ въ точкѣ a ближнюю вершину, въ точкѣ же C будетъ расположена дальняя вершина орбиты Cpa. Произведя вычисленія, я нашелъ, что разность кривизнъ орбиты Cpa въ вершинѣ a и круга, описаннаго изъ центра T радіусомъ TA, находится къ разности кривизнъ эллипса въ вершинѣ A и того же круга въ отношеніи, равномъ квадрату отношенія угла CTP къ углу CTp, и что кривизна эллипса въ A относится къ кривизнѣ сказаннаго круга, какъ $TA^2 : TC^2$; кривизна же этого круга къ кривизнѣ круга, описаннаго изъ центра T радіусомъ TC, какъ $TC : TA$. Кривизна же этого круга къ кривизнѣ эллипса въ точкѣ C, какъ $TA^2 : TC^2$; наконецъ, отношеніе разности между кривизною эллипса въ вершинѣ C и кривизною послѣдняго круга къ разности между кривизною фигуры Tpa въ ея вершинѣ C и кривизною того же круга, равно квадрату отношенія угла CTp къ углу CTP. Всѣ эти отношенія легко получаются по синусамъ угловъ касанія и разностямъ угловъ. Сопоставленіе этихъ отношеній даетъ, что отношеніе кривизны фигуры Cpa въ a къ ея кривизнѣ въ C, равно:

$$\left(AT^3 + \frac{16824}{100000}CT^2 . AT\right) : \left(CT^3 + \frac{16824}{100000}AT^2 . CT\right).$$

Здѣсь число $\frac{16824}{100000}$ представляетъ отношеніе разности квадратовъ угловъ CTP и CTp къ квадрату меньшаго угла CTP, или, что то же, отношеніе разности квадратовъ временъ: 27 с. 7 ч. 43 м. и 29 с. 12 ч. 44 м. къ квадрату времени 27 с. 7 ч. 43 м.

Слѣдовательно, такъ какъ a представляетъ сизигій луны и C ея квадратуру, то найденное отношеніе должно равняться отношенію кривизны орбиты луны въ сизигіяхъ къ кривизнѣ въ квадратурахъ, которая была опредѣлена выше. Поэтому, чтобы найти отношеніе CT къ AT, уравниваемъ произведенія среднихъ и крайнихъ членовъ пропорціи; по раздѣленіи на $AT . CT$, получимъ

$$2062{,}79\,CT^4 - 2151969\,N.CT^3 + 368676\,N.AT.CT^2 + 36342\,AT^2.CT^2$$
$$- 362047\,N.AT^2.CT + 2191371\,N.AT^3 + 4051{,}4\,AT^4 = 0$$

здѣсь

$$N = \frac{AT + CT}{2}$$

обозначая полуразность этихъ длинъ черезъ x, такъ что

$$x = \frac{CT - AT}{2}$$

и принявъ N за 1, имѣемъ

$$CT = 1 + x$$

и

$$AT = 1 - x$$

по подстановкѣ этихъ величинъ въ предыдущее уравненіе и рѣшеніи его, получимъ:

$$x = 0{,}00719$$

слѣдовательно, полудіаметры будутъ:

$$CT = 1{,}00719$$
$$AT = 0{,}99281.$$

Отношеніе этихъ чиселъ приблизительно равно $70\frac{1}{24}$ къ $69\frac{1}{24}$.

Слѣдовательно, разстояніе отъ луны до земли въ сизигіяхъ относится къ ея разстоянію до земли въ квадратурахъ (не разсматривая эксцентриситета) какъ $69\frac{1}{24}$ къ $70\frac{1}{24}$ или кругло, какъ 69 къ 70.

Предложеніе XXIX. Задача X.

Найти варіацію луны.

Это неравенство частью происходитъ отъ эллиптическаго вида лунной орбиты, частью отъ неравенствъ секторіальной скорости описанія площадей радіусомъ, проведеннымъ отъ луны къ землѣ. Если бы луна P двигалась по эллипсу $DBCA$ (фиг. 188) вокругъ земли, покоющейся въ его центрѣ и описывала бы радіусомъ TP, проведеннымъ къ землѣ, площадь CTP, пропорціональную времени и наибольшій полудіаметръ CT относился бы къ наименьшему TA какъ 70 къ 69, то тангенсъ угла CTP относился бы къ тангенсу угла средняго движенія, отсчитываемаго отъ квадратуры C, какъ полудіаметръ TA эллипса къ его полудіаметру TC, иначе какъ 69 къ 70.

Но описаніе площади CTP при переходѣ луны отъ квадратуры къ сизигію должно ускоряться такъ, чтобы отношеніе секторіальной скорости въ сизигіи къ секторіальной скорости въ квадратурѣ равнялось 11073 : 10973, и чтобы избытокъ секторіальной скорости въ какомъ-либо промежуточномъ

мѣстѣ P надъ скоростью въ квадратурѣ былъ бы пропорціоналенъ квадрату синуса угла CTP. Это будетъ удовлетворяться достаточно точно, если уменьшить тангенсъ угла CTP въ отношеніи $\sqrt{10973} : \sqrt{11073}$, иначе въ отношеніи 68,6877 къ 69. Тогда тангенсъ угла CTP будетъ относиться къ тангенсу средняго движенія, какъ 68,6877 къ 70 и уголъ CTP въ октантахъ, гдѣ среднее движеніе равно 45°, окажется равнымъ 44°27′28″, вычитая эту величину изъ угла средняго движенія, т.-е. 45°, получимъ въ остаткѣ наибольшую варіацію 32′32″. Такъ это было бы, если бы переходя отъ квадратуры къ сизигію луна описывала уголъ CTA, равный 90°. На самомъ же дѣлѣ, вслѣдствіе обращенія земли вокругъ солнца, оно переносится видимымъ прямымъ движеніемъ и луна, прежде чѣмъ обогнать солнце, описываетъ уголъ CTa, большій прямого въ отношеніи времени синодическаго оборота луны къ звѣздному, т.-е. въ отношеніи 29 с. 12 ч. 44 м. къ 27 с. 7 ч. 43 м. Отъ этого всѣ углы при центрѣ увеличиваются въ этомъ отношеніи и наибольшая варіація, которая была бы иначе равной 32′32″, при увеличеніи въ этомъ отношеніи составляетъ 35′10″.

Такова ея величина при среднемъ разстояніи солнца до земли и при пренебреженіи разностями, происходящими отъ кривизны земной орбиты и большаго дѣйствія солнца на новую и серповидную луну, нежели на полную и горбатую. При другихъ разстояніяхъ солнца до земли, наибольшая варіація измѣняется въ отношеніи, равномъ произведенію отношеній времени синодическаго оборота луны къ году (продолжительность котораго постоянна) на кубъ обратнаго отношенія разстояній отъ солнца до земли. Слѣдовательно, въ апогеѣ солнца наибольшая варіація составляетъ 33′14″, въ его перигеѣ 37′11″, если эксцентриситетъ земной орбиты принять въ отношеніи къ ея большой полуоси, какъ $16\frac{15}{16}$ къ 1000.

До сихъ поръ мы изслѣдовали варіацію для орбиты не эксцентрической, для которой луна въ своихъ октантахъ находится въ среднемъ разстояніи отъ земли. Если же вслѣдствіе эксцентриситета разстояніе отъ земли до луны больше или меньше, нежели при нахожденіи на предыдущей орбитѣ, то варіація можетъ быть немного болѣе или немного менѣе, нежели разсчитанная по данному здѣсь правилу, но этотъ избытокъ или недостатокъ я предоставляю астрономамъ опредѣлить по самимъ явленіямъ.

Предложеніе XXX. Задача XI.

Найти часовое движеніе узловъ луны для круговой орбиты.

Пусть S представляетъ солнце (фиг. 189), T землю, P луну, NPn орбиту луны, Npn проекцію орбиты на плоскость эклиптики; Nn узлы, $nTNm$ неопредѣленно продолженную линію узловъ; PJ, PK перпендикуляры, опущенные на прямыя ST, Qq; Pp перпендикуляръ опущенный на плоскость эклиптики, AB сизигіи луны въ плоскости эклиптики, AZ перпендикуляръ на линію узловъ; Qq квадратуры луны на плоскости эклиптики и pQ перпендикуляръ на прямую Qq проходящую через квадратуры. Сила

солнца возмущающая движеніе луны (пред. XXV) двоякая, одна пропорціональна длинѣ LM, другая длинѣ MT (на черт. 186). Первою силою луна притягивается къ землѣ, второю — къ солнцу по направленію прямой параллельной ST и проведенной отъ земли къ солнцу. Первая сила дѣйствуетъ въ плоскости лунной орбиты, и, слѣдовательно, не измѣняетъ положенія этой плоскости, и поэтому можетъ быть отброшена. Вторая сила MT, которою возмущается положеніе плоскости лунной орбиты, одинакова съ силою $3PK$ или $3JT$. Сила эта (по пред. XXV) относится къ силѣ, подъ дѣйствіемъ которой луна могла бы равномѣрно обращаться въ продолженіе звѣзднаго мѣсяца около покоющейся земли какъ $3JT$ къ умноженному на 178,725 радіусу круга, иначе какъ JT къ радіусу умноженному на 59,375. Какъ въ этомъ разсчетѣ, такъ и въ слѣдующихъ я считаю, что всѣ прямыя проведенныя отъ луны къ солнцу параллельны прямой соединяющей солнце съ землею, ибо насколько ихъ наклонъ уменьшаетъ всѣ дѣйствія въ однихъ случаяхъ настолько же онъ ихъ увеличиваетъ въ другихъ, мы же ищемъ среднее движеніе узловъ, пренебрегая такого рода мелочами, которыя лишь мѣшаютъ вычисленію.

Пусть PM представляетъ дугу описываемую луною въ продолженіе заданнаго весьма малаго промежутка времени и ML такой отрѣзочекъ, половину котораго луна прошла бы въ продолженіе того же промежуточка времени подъ дѣйствіемъ силы $3JT$. Проведемъ PL, MP и продолжимъ ихъ до точекъ m и l пересѣченія съ эклиптикой и на Tm опустимъ перпендикуляръ PH. Такъ какъ прямая ML параллельна плоскости эклиптики, а значитъ съ прямой ml лежащей въ этой плоскости встрѣтиться не можетъ, вмѣстѣ съ тѣмъ эти прямыя лежатъ въ одной плоскости $LMPml$, слѣдовательно, онѣ параллельны между собою, и треугольники LMP, lmP между собою подобны. Такъ какъ MPm находится въ плоскости той орбиты, по которой луна двигалась бы въ точкѣ P, то точка m находится на линіи узловъ Nn этой орбиты (мгновенной); такъ какъ сила, подъ дѣйствіемъ которой проходится длина равная $\frac{1}{2}\,LM$, будучи приложена сразу и цѣликомъ въ точкѣ P, заставила бы луну пройти путь равный всей этой длинѣ, и произвела бы такое дѣйствіе, что луна двигалась бы по дугѣ, хорда которой равна LP, и слѣдовательно, перенесла бы луну изъ плоскости $MPmT$ въ плоскость $LPlT$; такимъ образомъ угловое перемѣщеніе узловъ произведенное этою силою будетъ равно углу mTl.

Но

$$ml : mP = ML : MP,$$

а такъ какъ MP постоянная, вслѣдствіе постоянства промежуточковъ времени, то ml пропорціонально $ML \,.\, mP$ или что то же $JT \,.\, mP$. Когда уголъ Tml прямой, то уголъ mTl пропорціоналенъ

$$\frac{lm}{Tm} \quad \text{или} \quad \frac{JT \,.\, Pm}{Tm}$$

т.-е. пропорціоналенъ

$$\frac{JT \cdot PH}{TP}$$

ибо

$$Pm : Tm = PH : TP$$

а такъ какъ TP задано, то этотъ уголъ пропорціоналенъ $JT \cdot HP$. Когда же уголъ Tml или STN острый, то уголъ mTl будетъ меньше предыдущаго въ отношеніи синуса угла STN къ радіусу или въ отношеніи AZ къ AT. Слѣдовательно, скорость движенія узловъ пропорціональна произведенію $JT \cdot PH \cdot AZ$ иначе произведенію синусовъ угловъ TPJ, PTN и STN.

Когда, при положеніи узловъ въ квадратурахъ и луны въ сизигіяхъ, эти углы прямые, то отрѣзочекъ ml удаляется въ безконечность и уголъ mTl становится равнымъ углу mPl. Въ этомъ случаѣ уголъ mPl относится къ углу PTM описываемому видимымъ движеніемъ луны вокругъ земли какъ 1 къ 59,575. Ибо уголъ mPl равенъ углу LPM, тому т.-е. углу отклоненія луны отъ прямого пути, которое произвела бы вышеуказанная сила солнца $3JT$ въ разсматриваемый весьма малый промежутокъ времени, если бы при этомъ на луну не дѣйствовало бы тяготѣніе къ землѣ, уголъ же PTM равенъ углу отклоненія луны отъ прямого пути, производимому въ такое же время тою силою, которою луна удерживается на своей орбитѣ, если бы силы солнца не было, эти же силы, какъ сказано выше относятся между собою какъ 1 къ 59,575.

Такъ какъ среднее часовое движеніе луны относительно неподвижныхъ звѣздъ равно $32'56''27'''12{,}5^{\text{IV}}$, то часовое движеніе узла въ этомъ случаѣ будетъ $33''10'''33^{\text{IV}}12^{\text{V}}$. Въ остальныхъ же случаяхъ это часовое движеніе будетъ относиться къ $33''10'''33^{\text{IV}}12^{\text{V}}$ какъ произведеніе синусовъ угловъ TPJ, PTN и STN (т.-е. разстоянія луны до квадратуры, разстоянія луны до узла, и разстоянія узла до солнца) къ 1. Всякій разъ когда знакъ синуса какого-либо угла измѣняется изъ положительнаго въ отрицательный, затѣмъ изъ отрицательнаго въ положительный, движеніе должно быть измѣнено изъ попятнаго въ прямое и изъ прямого въ попятное.

Отсюда происходитъ, что узлы движутся впередъ, когда луна находится между которою-нибудь изъ квадратуръ и ближайшимъ къ ней узломъ, въ остальныхъ же случаяхъ ихъ движеніе попятное, и вслѣдствіе избытка этого движенія надъ движеніемъ впередъ, узлы ежемѣсячно перемѣщаются попятно.

Слѣдствіе 1. Такимъ образомъ если изъ концовъ P и M весьма малой дуги PM опустить перпендикуляры PK и Mk на прямую Qq проходящую черезъ квадратуры и продолжить ихъ до пересѣченія въ D и d съ линіей узловъ Nn, то часовое движеніе узловъ будетъ пропорціонально площади $MPDd$ и квадрату линіи AZ. Пусть PK, PH и AZ вышеупомянутые три синуса а именно PK синусъ разстоянія до квадратуры, PH синусъ разстоянія луны отъ узла и AZ синусъ разстоянія узла отъ солнца, тогда скорость узла пропорціональна произведенію $PK \cdot PH \cdot AZ$.

Но

$$PT : PK = PM : Kk,$$

а такъ какъ PT и PM постоянны, то PK пропорціонально Kk.

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$AT : PD = AZ : PH$$

поэтому PH пропорціонально $PD \,.\, AZ$.

По перемноженіи этихъ пропорцій получимъ, что $PK \,.\, PH$ пропорціонально $Kk \,.\, PD \,.\, AZ$, и $PK \,.\, PH \,.\, AZ$ пропорціонально $Kk \,.\, PD \,.\, AZ^2$, т.-е. пропорціонально произведенію (площадь $PDMd$) . AZ^2.

Слѣдствіе 2. При какомъ-либо положеніи узловъ среднее часовое ихъ движеніе относится къ половинѣ часового ихъ движенія въ сизигіяхъ луны, т.-е. къ $16''35'''16^{\text{iv}}36^{\text{v}}$ какъ квадратъ синуса разстоянія узловъ отъ сизигій къ квадрату радіуса, иначе какъ $AZ^2 : AT^2$.

Ибо, если луна обходитъ равномѣрнымъ движеніемъ полукругъ QAq, то сумма всѣхъ площадокъ $PDdM$, пока луна идетъ отъ Q до M составитъ площадь $QMdE$, ограниченную касательною QE къ кругу; когда же луна придетъ въ n, эта сумма составитъ полную площадь $EQAn$, описанную прямою PD. Затѣмъ, при переходѣ луны отъ n до q линія PD падаетъ внѣ круга и описываетъ площадь nqe, ограниченную касательною eq къ кругу; эту площадь, такъ какъ узлы до того перемѣщались попятно, а теперь попутно, надо вычесть изъ предыдущей площади, а такъ какъ она равна площади QEN, то останется площадь полукруга $NQAn$. Слѣдовательно, сумма всѣхъ площадокъ $PDdM$ за время, въ продолженіе котораго луна описываетъ полуокружность, есть площадь этого полукруга. Сумма же площадокъ за время описанія всей окружности равна всей площади круга. Когда луна находится въ сизигіяхъ площадка $PDdM$ равна произведенію длины дуги PM на радіусъ PT. Сумма всѣхъ такихъ равныхъ между собою площадокъ за то время, въ которое луна описываетъ окружность, составитъ произведеніе изъ полной длины окружности на радіусъ; такъ какъ эта площадь равна удвоенной площади круга, то она вдвое больше предыдущей. Слѣдовательно, узлы двигаясь равномѣрно съ тою скоростью, которую они имѣютъ въ сизигіяхъ луны прошли бы путь вдвое большій нежели они проходятъ на самомъ дѣлѣ, поэтому то среднее движеніе, двигаясь съ которымъ равномѣрно, они проходили бы то же пространство, какъ и на самомъ дѣлѣ при неравномѣрномъ ихъ движеніи, равно половинѣ того, которое они имѣютъ, когда луна въ сизигіяхъ. Такъ какъ наибольшее среднее часовое движеніе когда узлы находятся въ квадратурахъ равно $33''10'''33^{\text{iv}}12^{\text{v}}$, то среднее часовое движеніе въ разсматриваемомъ случаѣ будетъ равно $16''35'''16^{\text{iv}}36^{\text{v}}$. Но такъ какъ часовое движеніе всегда пропорціонально AZ^2 и площади $PDdM$, и такъ какъ часовое движеніе узловъ въ сизигіяхъ луны пропорціонально AZ^2 и площади $PDdM$ т.-е. AZ^2, ибо въ сизигіяхъ площадь $PDdM$ постоянна, то и среднее движеніе будетъ

пропорціонально AZ^2, такъ что это движеніе, когда узлы находятся внѣ квадратуръ, будетъ относиться къ $16'35''16^{IV}36^{V}$ какъ AZ^2 къ AT^2.

Предложеніе XXXI. Задача XII.

Найти часовое движеніе узловъ луны для эллиптическсй орбиты.

Пусть $Qpmaq$ (фиг. 191) представляетъ эллипсъ съ большою осью Qq, малою ab; $QAqB$ описанный кругъ, T—землю въ центрѣ ихъ обоихъ; S солнце; p луну движущуюся по эллипсу и pm дугу описываемую ею въ заданный весьма малый промежутокъ времени; N и n узлы, Nn линію узловъ, pK и mk перпендикуляры опущенные на ось Qq и продолженныя до пересѣченія съ линіей узловъ въ точкахъ D и d.

Если луна описываетъ радіусомъ проведеннымъ къ землѣ площади пропорціональныя времени, то часовое движеніе узла при эллиптической орбитѣ будетъ пропорціонально площади $pDdm$ и AZ^2.

Пусть PF касается круга въ P и по продолженіи пересѣкаетъ TN въ F; pf касается эллипса въ p и по продолженіи пересѣкаетъ TN въ f; эти же касательныя пересѣкаются между собою на оси TQ въ Y; пусть ML представляетъ пространство, которое луна, обращаясь по кругу, могла бы пройти поперечнымъ своимъ движеніемъ подъ дѣйствіемъ вышеупомянутой силы $3JT$ или $3PK$ въ продолженіе времени описанія дуги PM; пусть ml представляетъ пространство, которое луна при своемъ обращеніи по эллипсу могла бы пройти подъ дѣйствіемъ той же силы $3JT$ или $3PK$; продолживъ LP и lp до ихъ встрѣчи съ плоскостью эклиптики въ точкахъ G и g, проводимъ FG и fg, изъ коихъ FG по продолженіи пересѣкаетъ pf, pg и TQ соотвѣтственно въ c, e и R, прямая же fg пересѣкаетъ TQ въ r.

Такъ какъ сила $3JT$ или $3PK$ для круга относится къ силѣ $3JT$ или $3pK$ для эллипса какъ PK къ pK или какъ AT къ aT, то и пространства ML и ml проходимыя подъ дѣйствіемъ этихъ силъ будутъ въ томъ же отношеніи PK къ pK; вслѣдствіе подобія фигуръ $PYKp$ и $FYRc$ это отношеніе равно отношенію FR къ cR. Итакъ,

$$ML : ml = PK : pK = FR : cR \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Но по подобію треугольниковъ PLM и PGF

$$ML : FG = PL : PG$$

по параллельности же прямыхъ Lk, PK, GR, это послѣднее отношеніе равно $pl : pe$, которое въ свою очередь по подобію треугольниковъ plm, cpe равно $lm : ce$, итакъ,

$$ML : FG = lm : ce. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Изъ пропорцій (1) и (2) слѣдуетъ

$$FR : cR = FG : ce. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Поэтому, если бы имѣла мѣсто пропорція:

$$fg : ce = fY : cY = fr : cR \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

то такъ какъ:

$$fr : cR = \frac{fr}{FR} \cdot \frac{FR}{cR} = \frac{fT}{FT} \cdot \frac{FG}{ce},$$

то было бы

$$fg : FG = fT : FT \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

и значитъ тогда углы при землѣ T стягиваемые линіями fg и FG были бы между собою равны. Но эти углы (по изложенному въ предыдущемъ предложеніи) представляютъ перемѣщеніе узловъ за то время пока луна прошла бы по кругу дугу PM и по эллипсу дугу pm, поэтому, движеніе узловъ для круга и для эллипса было бы одинаково.

Это происходило бы такъ, если бы имѣла мѣсто пропорція (4)

$$fg : ce = fY : cY \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

т.-е. было бы

$$fg = \frac{ce \,.\, fY}{cY}$$

на самомъ же дѣлѣ по подобію треугольниковъ fgp и cep

$$fg : ce = fp : cp$$

т.-е.

$$fg = \frac{ce \,.\, fp}{cp}$$

значитъ и уголъ стягиваемый на самомъ дѣлѣ линіей fg относится къ углу стягиваемому линіей FG, т.-е. движеніе узловъ для эллипса относится къ ихъ движенію для круга какъ это истинное значеніе fg къ предыдущему, т.-е. какъ

$$\frac{ce \,.\, fp}{cp} : \frac{ce \,.\, fY}{cY}$$

что равно

$$\frac{fp \,.\, CY}{cp \,.\, fY} \quad \text{или} \quad \frac{fp}{fY} \cdot \frac{cY}{cp}.$$

Пусть прямая ph параллельная TN пересѣкаетъ FP въ h, тогда будетъ

$$\frac{fp}{fY} = \frac{Fh}{FY} \quad \text{и} \quad \frac{cY}{cp} = \frac{FY}{FP},$$

слѣдовательно,

$$\frac{fp}{fY} \cdot \frac{cY}{cp} = \frac{Fh}{FP} = \frac{DP}{Dp}$$

это же послѣднее отношеніе равно отношенію площади $Dpmd$ къ $DPMd$, а такъ какъ по сл. 1 пр. XXX площадь $DPMd \,.\, AZ^2$ пропорціональна часовому движенію узловъ для круговой орбиты, то $Dpmd \,.\, AZ^2$ пропорціонально часовому движенію узловъ для орбиты эллиптической.

Слѣдствіе. Поэтому, при данномъ положеніи узловъ за то время, какъ луна переходитъ отъ квадратуры до какого-либо положенія m, сумма всѣхъ площадокъ $pDdm$ составитъ площадь $mpQed$ ограниченную касательной QE къ эллипсу, сумма же всѣхъ этихъ площадокъ для цѣлаго оборота составитъ полную площадь эллипса; слѣдовательно, среднее движеніе узловъ для эллипса относится къ среднему ихъ движенію для круга какъ площадь эллипса къ площади круга, т.-е. какъ $Ta : TA$ иначе какъ $69 : 70$. Такъ какъ для круга (по слѣд. 2 пр. XXX) среднее часовое движеніе узловъ равно

$$(16''35'''16^{\text{IV}}36^{\text{V}}) \,.\, \frac{AZ^2}{AT^2}$$

то для эллипса, замѣтивъ, что

$$\frac{69}{70}(16''35'''16^{\text{IV}}36^{\text{V}}) = 16''21'''3^{\text{IV}}30^{\text{V}},$$

оно будетъ

$$(16''21'''3^{\text{IV}}30^{\text{V}}) \,.\, \frac{AZ^2}{AT^2}$$

т.-е. пропорціонально отношенію квадрата синуса разстоянія узла отъ солнца къ квадрату радіуса.

Но луна описываетъ радіусомъ проведеннымъ къ землѣ площади быстрѣе въ сизигіяхъ нежели въ квадратурахъ, поэтому время въ сизигіяхъ сокращается, въ квадратурахъ удлинняется, вмѣстѣ съ временемъ увеличивается и уменьшается движеніе узловъ. Было показано, что секторіальная скорость луны въ квадратурахъ относится къ ея секторіальной скорости въ сизигіяхъ, какъ $10973 : 11073$, поэтому средняя секторіальная скорость въ октантахъ относится къ ея избытку въ сизигіяхъ и недостатку въ квадратурахъ, какъ полусумма вышеприведенныхъ чиселъ 11023 къ ихъ полуразности 50. Такъ какъ продолжительность описанія луною отдѣльныхъ равныхъ частицъ ея орбиты обратно пропорціональна ея скорости, то средняя продолжительность въ октантахъ относится къ избытку ея въ квадратурахъ и къ недостатку въ сизигіяхъ, происходящимъ отъ разсматриваемой причины приблизительно какъ 11023 къ 50. Прослѣживая затѣмъ эту измѣняемость отъ квадратуръ до сизигій, я нашелъ, что избытокъ секторіальной скорости въ отдѣльныхъ мѣстахъ надъ наименьшимъ ея значеніемъ въ квадратурахъ, приблизительно пропорціоналенъ квадрату синуса разстоянія луны до квадратуры, поэтому разность между секторіальной скоростью въ какомъ-либо мѣстѣ и среднею ея величиною въ октантахъ пропорціональна разности между квадратомъ синуса разстоянія

луны до квадратуры и $\sin^2 45°$, т.-е. $\frac{1}{2}$. Въ такомъ же отношенiи находятся приращенiя продолжительности для отдѣльныхъ мѣстъ между октантами и квадратурами и ея уменьшенiя между октантами и сизигiями. Перемѣщенiе же узловъ, въ продолженiе того времени, пока луна описываетъ каждую отдѣльную равную частицу своей орбиты, увеличивается или уменьшается пропорцiонально квадрату этого времени, ибо это перемѣщенiе, за то время, пока луна проходитъ частицу PM своей орбиты (при прочихъ одинаковыхъ условiяхъ) пропорцiонально ML, величина же ML пропорцiональна квадрату времени. Вслѣдствiе этого перемѣщенiе узловъ въ сизигiяхъ въ продолженiе того промежутка времени, въ который луна описываетъ постоянной длины частицы своей орбиты, уменьшается въ отношенiи $\left(\frac{11023}{11073}\right)^2$ и, слѣдовательно, величина уменьшенiя относится къ остающемуся движенiю приблизительно какъ 100 къ 10973, къ полному же движенiю какъ 100 къ 11073. Уменьшенiе же въ мѣстахъ промежуточныхъ между октантами и сизигiями, и увеличенiе въ мѣстахъ между октантами и квадратурами, находятся къ вышенайденному уменьшенiю въ отношенiи равномъ произведенiю отношенiя полнаго движенiя въ этихъ мѣстахъ къ полному движенiю въ сизигiяхъ на отношенiе разности между квадратомъ синуса разстоянiя луны до квадратуры и половиною квадрата радiуса къ половинѣ квадрата радiуса. Поэтому, когда узлы находятся въ квадратурахъ, то, если взять два мѣста равноотстоящихъ отъ октанта въ ту и другую сторону и два другихъ, отстоящихъ на столько же одно отъ сизигiя, другое отъ квадратуры, и затѣмъ изъ уменьшенiй движенiй для двухъ мѣстъ, лежащихъ между сизигiемъ и октантомъ вычесть приращенiя движенiй для остальныхъ двухъ мѣстъ, лежащихъ между октантомъ и квадратурою, то оставшееся уменьшенiе будетъ равно уменьшенiю движенiя въ сизигiи, какъ то легко устанавливается, сдѣлавъ вычисленiе. Вслѣдствiе этого, средняя величина уменьшенiя, которое надо вычитать изъ средняго движенiя узловъ, равно одной четверти уменьшенiя въ сизигiяхъ. Полная величина часового движенiя узловъ, когда луна, находясь въ сизигiяхъ предполагается описывающей радiусомъ, проведеннымъ къ землѣ площади равномѣрно, была найдена въ $32''42'''7^{\text{IV}}$, уменьшенiе же движенiя узловъ вслѣдствiе того, что въ это время луна проходитъ одинаковый путь скорѣе, составляетъ отъ этого движенiя $\frac{100}{11073}$, т.-е. это уменьшенiе равно $17'''43^{\text{IV}}11^{\text{V}}$, вычтя четвертую часть этой величины, т.-е. $4'''25^{\text{IV}}48^{\text{V}}$ изъ найденнаго выше средняго часового движенiя узловъ $16''21'''3^{\text{IV}}30^{\text{V}}$, получимъ въ остаткѣ $16''16'''37^{\text{IV}}42^{\text{V}}$, представляющихъ исправленное среднее часовое движенiе.

Если взять, когда узлы находятся внѣ квадратуръ, два мѣста равноотстоящихъ въ обѣ стороны отъ сизигiй, то сумма движенiй узловъ, при нахожденiи луны въ этихъ мѣстахъ, относится къ суммѣ движенiй, когда луна находится въ этихъ же мѣстахъ, а узлы въ квадратурахъ, какъ

$AZ^2 : AT^2$. Уменьшенія движеній, происходящія отъ изложенныхъ причинъ, будутъ пропорціональны самимъ движеніямъ, поэтому и остающіеся движенія будутъ относиться, какъ $AZ^2 : AT^2$, и среднія движенія будутъ относиться, какъ остающіяся.

Такимъ образомъ исправленное среднее часовое движеніе при какомъ-либо заданномъ положеніи узловъ относится къ $16''16'''37^{iv}42^{v}$, какъ $AZ^2 : AT^2$, т.-е. какъ квадратъ синуса разстоянія узловъ отъ сизигія къ квадрату радіуса.

Предложеніе XXXII. Задача XIII.

Найти среднее движеніе узловъ луны.

Среднее годовое движеніе есть сумма всѣхъ среднихъ часовыхъ движеній за годъ. Вообрази, что узелъ находится въ N и по прошествіи каждаго часа возвращается въ свое первоначальное мѣсто такъ, чтобы не смотря на свое движеніе сохранять постоянное положеніе по отношенію къ неподвижнымъ звѣздамъ. Въ это же время, вслѣдствіе движенія земли, солнце будетъ удаляться отъ узла, совершая равномѣрно свой видимый годовой оборотъ.

Пусть Aa (фиг. 192) есть какая-либо заданная весьма малая дуга, описываемая въ весьма малый заданный промежутокъ времени точкою пересѣченія проводимой къ солнцу прямой TS съ кругомъ NAn. Среднее часовое движеніе по уже доказанному пропорціонально AZ^2, т.-е. (по пропорціональности AZ и ZY) прямоугольничку $AZ \,.\, ZY$, иначе площади $AZYa$. Сумма всѣхъ среднихъ часовыхъ движеній отъ начала будетъ пропорціональна суммѣ всѣхъ площадокъ $aYZA$, т.-е. площади NAZ.

Наибольшая величина площадки $aYZA$ равна произведенію дуги Aa на радіусъ, поэтому сумма всѣхъ площадокъ для всего круга относится къ суммѣ таковаго же числа такихъ наибольшихъ площадокъ, какъ площадь круга къ площади прямоугольника, построеннаго на длинѣ окружности и радіусѣ, иначе какъ $1 : 2$. Но часовое движеніе, соотвѣтствующее наибольшей площадкѣ, равно $16''16'''37^{iv}42^{v}$; за звѣздный годъ, т.-е. за 365 дней 6 час. 9 мин. полное движеніе составитъ $39°38'7''50'''$, половина этого, т.-е. $19°49'3''55'''$ и составляетъ среднее движеніе узловъ, соотвѣтствующее полному кругу. Движеніе же узловъ за время, пока солнце переходитъ отъ N до A, относится къ $19°40'3''55'''$, какъ площадь NAZ къ площади всего круга.

Такъ это происходитъ при предположеніи, что узелъ по прошествіи каждаго часа возвращается къ своему первоначальному мѣсту, такъ что солнце по прошествіи полнаго года возвращается къ тому же узлу, изъ котораго оно вышло въ началѣ. На самомъ же дѣлѣ, вслѣдствіе движенія узла, солнце возвращается къ узлу ранѣе, поэтому надо вычислить сокращеніе времени. Такъ какъ солнце въ продолженіе цѣлаго года проходитъ

360°, узелъ же, двигаясь съ наибольшею скоростью, прошелъ бы за это время $39^\circ 38' 7'' 50'''$ или $39^\circ,6355$ и среднее движеніе узла въ какомъ-либо его мѣстѣ N, относится къ его движенію, когда онъ въ квадратурахъ, какъ $AZ^2 : AT^2$, то движеніе солнца будетъ относиться къ движенію узла въ N, какъ

$$360 AT^2 : 39{,}6355 AZ^2$$

т.-е. какъ

$$9{,}0827646 AT^2 : AZ^2.$$

Слѣдовательно, если полную окружность круга NAn раздѣлить на равныя частицы Aa, то время, въ продолженіе котораго солнце проходитъ путь Aa на покоющемся кругѣ относится къ времени, въ продолженіе котораго оно проходитъ этотъ путь на кругѣ, вращающемся вокругъ центра вмѣстѣ съ узлами, какъ

$$(9{,}0827646 AT^2 + AZ^2) : 9{,}0827646 AT^2,$$

ибо это время обратно пропорціонально скорости, съ которою путь проходится, скорость же эта равна суммѣ скоростей солнца и узла. Представимъ секторомъ NTA время, въ продолженіе котораго солнце безъ движенія узла прошло бы дугу AN и весьма малый промежутокъ времени, въ продолженіе котораго солнце прошло бы дугу Aa, весьма малымъ секторомъ ATa, опустимъ на Nn перпендикуляръ aY; на AZ возьмемъ такую длину Zd, чтобы площадь прямоугольника $Zd \,.\, ZY$ относилась къ площади сектора ATa, какъ

$$AZ^2 : (9{,}0827646 AT^2 + AZ^2)$$

т.-е. чтобы было:

$$Zd : \frac{1}{2} AZ = AT^2 : (9{,}0827646 AT^2 + AZ^2),$$

тогда прямоугольникъ $Zd \,.\, ZY$ представитъ уменьшеніе времени описанія дуги Aa, происходящее отъ движенія узла.

Если точка d лежитъ постоянно на кривой $NaGn$, то криволинейная площадь NdZ будетъ представлять уменьшеніе времени описанія полной дуги NA, поэтому избытокъ площади сектора NAT надъ площадью NdZ представитъ полное время описанія дуги NA.

Такъ какъ движеніе узла пропорціонально времени, то и площадь $AaYZ$ должна быть уменьшена въ томъ же отношеніи, какъ и время, что будетъ выполнено, если на AZ взять длину eZ такъ, чтобы было:

$$eZ : AZ = AZ^2 : (9{,}0827646 AT^2 + AZ^2),$$

тогда прямоугольникъ $eZ \,.\, ZY$ будетъ относиться къ площади $AZYa$, какъ уменьшеніе времени описанія дуги Aa къ полному времени, въ которое

эта дуга была бы описана, если бы узелъ былъ въ покоѣ, поэтому этотъ прямоугольникъ будетъ соотвѣтствовать уменьшенію движенія узла. Если точка e лежитъ постоянно на кривой $NeFn$, то полная площадь NeZ, равная суммѣ всѣхъ уменьшеній, будетъ соотвѣтствовать полному уменьшенію за время описанія дуги AN, остающаяся же площадь NAe будетъ соотвѣтствовать остающемуся движенію, которое и есть истинное движеніе узла за то время, когда дуга NA описывается совмѣстнымъ движеніемъ солнца и узла. Площадь фигуры $NeFn$ опредѣляется по способу безконечныхъ рядовъ и относится къ площади полукруга приблизительно какъ 60 къ 793. Движеніе же, соотвѣтствующее полному кругу, равнялось $19°49'3''55'''$, поэтому движеніе, соотвѣтствующее удвоенной площади $NeFn$ равно $1°29'58''2'''$; по вычитаніи этой величины изъ предыдущей остается $18°19'5''53$ представляющихъ перемѣщеніе узла по отношенію къ неподвижнымъ звѣздамъ за время отъ одного соединенія узла съ солнцемъ до слѣдующаго. По вычетѣ этого перемѣщенія изъ полнаго годового перемѣщенія солнца въ 360°, останется $341°40'54''7'''$ представляющихъ движеніе солнца за время между этими двумя соединеніями. Это же перемѣщеніе относится къ годовому 360°, какъ выше найденное перемѣщеніе узла $18°19'5''53'''$ къ его годовому перемѣщенію, которое поэтому окажется равнымъ $19°18'1''23'''$. Таково среднее движеніе узловъ въ одинъ звѣздный годъ. По астрономическимъ таблицамъ оно равно $19°21'21''50'''$. Разность меньше $\frac{1}{300}$ полнаго движенія и происходитъ, какъ оказывается, отъ эксцентриситета лунной орбиты и отъ наклонности ея къ плоскости эклиптики. Вслѣдствіе эксцентриситета орбиты движеніе узловъ немного ускоряется, вслѣдствіе же наклонности нѣсколько замедляется и приводится къ истинной скорости.

Предложеніе XXXIII. Задача XIV.

Найти истинное движеніе узловъ луны.

Въ продолженіе времени, пропорціональнаго площади $NTA - NdZ$ (пред. предлож.), это движеніе пропорціонально площади NAe и, слѣдовательно, находится. Вслѣдствіе трудности вычисленія предпочтительнѣе примѣнить слѣдующее построеніе для этой задачи.

Изъ центра C (фиг. 193), какимъ-либо радіусомъ CD описывается кругъ $BEFD$. Прямая DC продолжается до A такъ, чтобы отношеніе $AB:AC$ равнялось отношенію средняго движенія къ половинѣ средней величины истиннаго движенія, когда узлы въ квадратурахъ, т.-е. въ отношеніи $19°18'1''23'''$ къ $19°49'3''55'''$, такъ что отношеніе BC къ AC равно отношенію разности движеній $0°31'2''32'''$ къ послѣднему изъ нихъ, т.-е. $19°49'3''55'''$, иначе $1:38{,}3$.

Затѣмъ черезъ точку D проводится неопредѣленно продолженная прямая gG, касающаяся круга въ точкѣ D; строится уголъ BCE или BCF равный удвоенному разстоянію солнца отъ мѣста узла, находимаго по среднему его

движенію и проводится прямая AE или AF, пересѣкающая перпендикуляръ DG въ G. Взявъ уголъ, который относится къ полному движенію узловъ между ихъ сизигіями (т.-е. къ 9°11′3″), какъ длина касательной DG къ окружности круга BED (за этотъ уголъ можно принять и уголъ DAG), слѣдуетъ придавать его къ среднему движенію узловъ, когда узлы переходятъ отъ квадратуръ къ сизигіямъ и вычитать изъ этого средняго движенія, когда узлы переходятъ отъ сизигій къ квадратурамъ, тогда и получится истинное движеніе узловъ. Ибо, получаемое такимъ образомъ движеніе приблизительно совпадаетъ съ истиннымъ, которое получается представляя время площадью $NTA - NdZ$ и движеніе узла площадью NAe, какъ то установлено тщательнымъ изслѣдованіемъ и вычисленіемъ. Это есть полугодичное уравненіе движенія узловъ. Есть еще и мѣсячное уравненіе, но оно совершенно не нужно для нахожденія широты луны, ибо измѣненіе наклонности лунной орбиты къ плоскости эклиптики подвержено двоякому неравенству — полугодичному и мѣсячному; это мѣсячное неравенство и мѣсячное неравенство узловъ такъ умѣряютъ и исправляютъ другъ друга, что при опредѣленіи широты луны ими обоими можно пренебречь.

Слѣдствіе. Изъ этого и предыдущаго предложенія вытекаетъ, что узлы въ своихъ сизигіяхъ находятся въ покоѣ, въ квадратурахъ же движутся попятно съ часовымъ движеніемъ 16″19‴26^{IV}, и что уравненіе движенія узловъ въ октантахъ равно 1°30′. Все это вполнѣ согласуется съ небесными явленіями.

Поученіе.

Движеніе узловъ нашли также другимъ способомъ *И. Мэхинъ*, проф. Астрономіи въ Гресгамѣ, и *Генри Пембертонъ*, д-ръ Медицины, независимо другъ отъ друга. О ихъ способѣ упоминается также въ другомъ мѣстѣ. Записки ихъ мною разсмотрѣнныя содержатъ каждая по два предложенія одинаковыхъ въ нихъ обѣихъ, но такъ какъ записка Г. *Мэхина* была мною получена ранѣе, то я ее здѣсь и помѣщаю.

О движеніи узловъ луны.

Предложеніе I.

Среднее движеніе солнца отъ узла опредѣляется геометрическимъ среднимъ пропорціональнымъ между среднимъ движеніемъ самого солнца и тѣмъ его среднимъ движеніемъ, съ которымъ солнце быстрѣе всего отходитъ отъ узла въ квадратурахъ.

Пусть T (фиг. 194) есть мѣсто земли, Nn линія узловъ луны въ какое-либо данное время, KTM перпендикуляръ къ ней, TA прямая вра-

щающаяся вокругъ центра съ такою угловою скоростью, съ какою солнце и узелъ расходятся другъ отъ друга, такъ что уголъ между неподвижною прямою Nn и вращающеюся TA всегда равенъ разстоянію между мѣстомъ солнца и узла. Если какую-либо прямую TK подраздѣлить на части TS и SK относящіяся одна къ другой, какъ среднее часовое движеніе солнца къ среднему часовому движенію узла въ квадратурахъ и взять прямую TH такъ, чтобы было:

$$TS : TH = TH : TK,$$

то эта прямая будетъ пропорціональна среднему движенію солнца отъ узла.

Опишемъ кругъ $NKnM$ центромъ T и радіусомъ TK, и на осяхъ TH и TN при томъ же центрѣ опишемъ эллипсъ $NHnL$, тогда, если провести прямую Tba, площадь сектора NTa представитъ сумму движеній узла и солнца за то время, въ продолженіе котораго солнце отходитъ отъ узла на дугу Na. Пусть aA есть весьма малая дуга, описываемая въ продолженіе заданнаго весьма малаго промежутка времени прямою Tba при ея равномѣрномъ вращеніи по выше указанному закону, тогда площадь сектора TAa будетъ пропорціональна суммѣ скоростей, съ которыми переносятся солнце и узелъ. Скорость солнца почти равномѣрна, такъ что ея малыя неравенства едва ли могутъ произвести какое-либо измѣненіе въ среднемъ движеніи узловъ. Вторая же часть этой суммы, именно скорость узла по среднему своему значенію увеличивается при удаленіи отъ сизигій пропорціонально квадрату синуса разстоянія узла отъ солнца (по слѣд. пред. 31) и такъ какъ эта средняя скорость наибольшая въ квадратурахъ K, то она находится въ томъ же отношеніи къ скорости солнца, какъ SK къ ST или какъ $(TK^2 - TH^2) : TH^2$ или какъ $KH \,.\, MH : TH^2$. Эллипсъ NBH подраздѣляетъ площадь сектора ATa, представляющую сумму этихъ двухъ скоростей на двѣ части $ABba$ и TBb, пропорціональныя самимъ скоростямъ.

Въ самомъ дѣлѣ продолжимъ BT до пересѣченія съ кругомъ въ точкѣ β и опустимъ изъ точки B перпендикуляръ BG на большую ось и продолжаемъ его въ обѣ стороны до пересѣченія съ кругомъ въ точкахъ F и f. Площадь $ABba$ относится къ площади сектора TBb, какъ $AB \,.\, B\beta$ къ BT^2 (ибо произведеніе $AB \,.\, B\beta = TA^2 - TB^2$, такъ какъ точка T есть середина прямой $A\beta$), это отношеніе тамъ, гдѣ площадь $ABba$ наибольшая, т.-е. въ K будетъ равно отношенію $KH \,.\, HM : HT^2$.

Но и наибольшая средняя скорость узла находилась въ такомъ же отношеніи къ скорости солнца, значитъ въ квадратурахъ секторъ ATa раздѣляется на части, пропорціональныя скоростямъ. Но такъ какъ:

$$KH \,.\, HM : HT^2 = FB \,.\, Bf : BG^2$$

и

$$AB \,.\, B\beta = FB \,.\, Bf$$

то отношеніе площадки $ABba$ тамъ, гдѣ она наибольшая къ остающейся площади сектора TBb равно $AB \,.\, B\beta : BG^2$. Но отношеніе этихъ площадокъ, какъ указано выше равно $AB \,.\, B\beta : BT^2$, поэтому площадка $ABba$ въ мѣстѣ A относится къ ея величинѣ въ квадратурахъ, какъ $BG^2 : BT^2$, т.-е. она пропорціональна квадрату синуса разстоянія солнца отъ узла. Поэтому сумма всѣхъ площадокъ $ABba$, т.-е. площадь ABN будетъ пропорціональна движенію узла въ то время, въ которое солнце отошло отъ узла на дугу NA. Остающаяся площадь, т.-е. площадь эллиптическаго сектора NTB, будетъ пропорціональна среднему движенію солнца за то же время. Такъ какъ среднее годовое движеніе узла есть то его среднее движеніе, которое происходитъ за время полнаго оборота солнца, то среднее движеніе узла отъ солнца относится къ среднему движенію самого солнца, какъ площадь круга къ площади эллипса, т.-е. какъ $TK : TH$, т.-е. къ средней пропорціональной между TK и TS, или что то же, какъ $TH : TS$.

Предложеніе II.

Зная среднее движеніе узловъ луны, найти истинное ихъ движеніе.

Пусть уголъ A есть разстояніе солнца отъ средняго мѣста узла, иначе среднее движеніе солнца отъ узла. Возьмемъ уголъ B, такъ чтобы было:

$$\operatorname{tg} B : \operatorname{tg} A = TH : TK$$

т.-е. чтобы отношеніе этихъ тангенсовъ было равно корню квадратному изъ отношенія средняго часового движенія солнца къ среднему часовому движенію солнца отъ узла, когда узелъ въ квадратурахъ. Найденный такимъ образомъ уголъ B будетъ равенъ разстоянію солнца отъ истиннаго мѣста узла. Ибо проведя FT, видно на основаніи доказательства предыдущаго предложенія, что уголъ FTN есть разстояніе солнца отъ средняго мѣста узла, уголъ же ATN есть его разстояніе отъ истиннаго мѣста, тангенсы же этихъ узловъ относятся между собою какъ $TK : TH$.

Слѣдствіе. Такимъ образомъ уголъ FTA есть уравненіе узловъ луны; синусъ этого угла, при наибольшей его величинѣ въ октантахъ относится къ радіусу какъ $KH : (TK + HT)$. Синусъ же этого уравненія въ какомъ-либо иномъ мѣстѣ относится къ наибольшему синусу, какъ синусъ суммы угловъ $FTN + ATN$ къ радіусу, т.-е. приблизительно какъ синусъ удвоеннаго разстоянія солнца отъ средняго мѣста узла, т.-е. угла $2FTN$ къ радіусу.

Поученіе.

Если принять среднее часовое движеніе узловъ въ квадратурахъ равнымъ $16''16'''37^{\text{IV}}42^{\text{V}}$, т.-е. въ звѣздный годъ $39°38'7''50'''$, то отношеніе TH къ

TK будетъ равно $\sqrt{9{,}0827646}$ къ $\sqrt{10{,}0827646}$ или 18,6524761 : 19,6524761, поэтому TH относится къ TK, какъ 18,6524761 къ 1, т.-е. какъ движеніе солнца въ звѣздный годъ къ среднему движенію узла $19°18'1''23'''40^{\text{IV}}$.

Если же принять среднее движеніе узловъ луны въ 20 Юліанскихъ лѣтъ равнымъ $386°50'15''$, каковымъ оно выводится въ теоріи луны изъ наблюденій, то среднее движеніе узловъ въ звѣздный годъ составитъ $19°20'31''58'''$, и тогда будетъ

$$TH : TK = 360° : 19°20\,31''58''' = 18{,}61214 : 1.$$

Откуда среднее часовое движеніе узловъ въ квадратурахъ оказывается равнымъ $16''18'''48^{\text{IV}}$ и наибольшее уравненіе узловъ въ октантахъ равнымъ $1°29'57''$.

Предложеніе XXXIV. Задача XV.

Найти часовое измѣненіе наклонности лунной орбиты къ плоскости эклиптики.

Пусть A и a представляютъ сизигіи, Q и q квадратуры, N и n узлы, P мѣсто луны на ея орбитѣ, p проекцію этого мѣста на плоскости эклиптики, mTl перемѣщеніе узловъ въ весьма малый промежутокъ времени какъ и выше (фиг. 195).

Если на линію Tm опустить перпендикуляръ PG и провести pG и продолжить эту прямую до пересѣченія съ прямою Tl въ g и затѣмъ соединить Pg, то уголъ PGp представитъ наклоненіе лунной орбиты къ плоскости эклиптики, когда луна находится въ P, и уголъ Pgp наклоненіе ея по прошествіи указаннаго промежутка времени, слѣдовательно уголъ GPg есть измѣненіе наклонности въ продолженіе этого промежутка. Но отношеніе угловъ

$$GPg : GTg = TG\,.\,Pp : PG^2,$$

поэтому, если за упомянутый промежутокъ будетъ принятъ одинъ часъ, то такъ какъ по предложенію XXX уголъ

$$GTg = 33''10'''33^{\text{IV}}\,.\,\frac{JT\,.\,PG\,.\,AZ}{AT^3}$$

то уголъ GPg (т.-е. часовое измѣненіе наклонности) будетъ:

$$GPg = 33''10'''33^{\text{IV}}\,.\,\frac{JT\,.\,AZ\,.\,TG}{AT^3}\cdot\frac{Pp}{PG}.$$

Такъ это будетъ при предположеніи, что луна обращается равномѣрно по круговой орбитѣ, когда же орбита эллиптическая, то среднее движеніе узловъ уменьшается въ отношеніи малой оси къ большой, какъ это

изложено выше. Въ такомъ же отношенiи уменьшается и измѣненiе наклонности [193]).

Слѣдствiе 1. Къ Nn возставляется перпендикуляръ TF, пусть pM есть часовое перемѣщенiе луны въ плоскости эклиптики, и пусть перпендикуляры pK, Mn опущенные на QT и продолженные въ обѣ стороны пересѣкаютъ TF въ H и h, тогда будетъ:

$$JT : AT = Kk : Mp$$

$$TG : Hp = TZ : AT.$$

Значитъ

$$JT \,.\, TG = \frac{Kk \,.\, Hp \,.\, TZ}{Mp} = (\text{площ. } HpMh) \,.\, \frac{TZ}{Mp}$$

поэтому часовое измѣненiе наклонности равно:

$$33''10'''33^{\text{iv}} \,.\, \text{площ. } HpMh \,.\, AZ \,.\, \frac{TZ}{Mp} \cdot \frac{Pp}{PG} \cdot \frac{1}{AT^3}.$$

Слѣдствiе 2. Поэтому, если вообразить, что по прошествiи каждаго часа земля и узлы мгновенно переносятся изъ новыхъ своихъ мѣстъ въ первоначальныя для того, чтобы ихъ положенiе въ продолженiе цѣлаго мѣсяца оставалось постояннымъ, тогда полное измѣненiе наклонности въ продолженiе мѣсяца получится, если въ предыдущей формулѣ вмѣсто площадки $HpMh$ написать алгебраическую сумму всѣхъ такихъ площадокъ, образующихся при движенiи точки p, взятыхъ съ принадлежащими имъ знаками $+$ и $-$.

Но эта сумма равна площади круга $QAqa$, слѣдовательно будетъ:

$$\text{мѣсячное измѣненiе наклонности} = 33''10'''33^{\text{iv}} \,.\, \text{площ. } QAqa \,.\, \frac{AZ \,.\, TZ}{AT^3 \,.\, Mp} \cdot \frac{Pp}{PG} =$$

$$= 33''10'''33^{\text{iv}} \,.\, \text{окружн. } QAqa \,.\, \frac{AZ \,.\, TZ}{2AT^2 \,.\, Mp} \cdot \frac{Pp}{PG}.$$

Слѣдствiе 3. На основанiи этого при заданномъ положенiи узловъ среднее часовое измѣненiе наклонности, изъ котораго, принимая его постояннымъ, получилось бы выше приведенное мѣсячное, будетъ:

$$\text{ср. час. изм. накл.} = 33''10'''33^{\text{iv}} \,.\, \frac{AZ}{2AT} \cdot \frac{TZ}{AT} \cdot \frac{Pp}{PG}.$$

Но

$$\frac{AZ}{AT} = \sin ATn; \quad \frac{TZ}{AT} = \cos ATn; \quad \frac{Pp}{PG} = \sin (\text{наклон.}).$$

---

[193]) При изложенiи этого предложенiя и его слѣдствiй во избѣжанiе длинноты описанiя формулъ словами имъ придано принятое теперь начертанiе, отступивъ отъ буквальнаго перевода текста.

Значитъ будетъ:

$$\text{Ср. час. изм. накл.} = \frac{1}{4}\, 33''10'''33^{\text{IV}} \,.\, \sin 2ATn \,.\, \sin\,(\text{наклонности}).$$

Слѣдствіе 4. Такъ какъ отношеніе часового измѣненія наклонности на основаніи этого предложенія къ $33''10'''33^{\text{IV}}$ вообще равно

$$\frac{JT\,.\,AZ\,.\,TG}{AT^3} \cdot \frac{Pp}{PG}$$

и когда узлы въ квадратурахъ $AZ = AT$, кромѣ того

$$\frac{JT}{AT} = \sin ATp; \quad \frac{TG}{AT} = \cos ATp; \quad \frac{Pp}{PG} = \sin\,(\text{накл.})$$

то для положенія узловъ въ квадратурахъ отношеніе часового измѣненія наклонности раздѣленнаго на синусъ ея къ $33''10'''33^{\text{IV}}$ будетъ равно отношенію $\sin 2ATp$ къ 2, т.-е. отношенію синуса удвоеннаго разстоянія луны до квадратуры къ діаметру. Слѣдовательно, сумма всѣхъ такихъ раздѣленныхъ на синусъ наклонности часовыхъ измѣненій за то время, пока при данномъ положеніи узловъ луна переходитъ отъ квадратуры къ сизигію (т.-е. въ продолженіе $177\frac{1}{6}$ часа) будетъ относиться къ суммѣ таковаго же числа угловъ $33''10'''33^{\text{IV}}$, т.-е. къ $5878''$, какъ сумма всѣхъ синусовъ, удвоенныхъ разстояній луны до квадратуръ къ суммѣ таковаго же числа діаметровъ, т.-е. какъ діаметръ къ окружности. Поэтому, если принять наклонность въ $5°1'$, то будетъ

$$\sin 5°1' = 0{,}0874 \quad \text{и} \quad \frac{7}{22}\,.\,0{,}0874 = 0{,}0278$$

слѣдовательно полное измѣненіе наклонности, образующееся изъ часовыхъ ея измѣненій въ продолженіе указаннаго времени составитъ $163''$ или $2'43''$.

Предложеніе XXXV. Задача XVI.

Найти каково наклоненіе орбиты луны къ плоскости эклиптики въ заданное время.

Пусть AD есть синусъ наибольшей наклонности и AB синусъ наименьшей. Раздѣливъ BD въ точкѣ C пополамъ, точкою C какъ центромъ и радіусомъ BC описывается кругъ BGD. На AC (фиг. 196) берется CE такъ, чтобы было:

$$CE : EB = EB : 2AB,$$

если по заданному времени построить уголъ AEG, равный дувоенному разстоянію узловъ до квадратуръ и на AD опустить перпендикуляръ GH, то AH будетъ синусъ искомой наклонности.

Ибо имѣемъ:

$$GE^2 = GH^2 + HE^2 = BH \,.\, HD + HE^2 = HB \,.\, BD + HE^2 - BH^2 =$$
$$= HB \,.\, BD + BE^2 - 2BH \,.\, BE = BE^2 + 2EC \,.\, BH =$$
$$= 2EC \,.\, AB + 2EC \,.\, BH = 2EC \,.\, AH$$

слѣдовательно GE^2 пропорціонально AH, такъ какъ $2EC$ постоянно. Пусть AEg представляетъ удвоенное разстояніе узловъ до квадратуръ послѣ того, какъ время получило нѣкоторое весьма малое приращеніе; уголъ GEg постоянный, поэтому дуга Gg будетъ пропорціональна разстоянію GE. Но

$$Hh : Gg = GH : GC.$$

Значитъ Hh пропорціонально $GH \,.\, Gg$ или $GH \,.\, GE$, т.-е. и $\frac{GH}{GE} \,.\, GE^2$ или $\frac{GH}{GE} \,.\, AH$ или $AH \,.\, \sin AEG$.

Такимъ образомъ, если въ какомъ-либо случаѣ длина AH была бы синусомъ наклонности, то ея приращенія были бы всегда такія же, какъ и синуса наклонности (по слѣд. 3 предыдущаго предложенія), слѣдовательно эта длина будетъ постоянно оставаться равной этому синусу. Но длина AH, когда точка G падаетъ въ B или въ D, равна сказанному синусу, слѣдовательно она ему постоянно равна. При этомъ доказательствѣ предположено, что уголъ BEG, равный удвоенному разстоянію узловъ до квадратуръ, возрастаетъ равномѣрно, ибо здѣсь не мѣсто изъяснять мелочныя подробности всѣхъ неравенствъ.

Вообрази, что уголъ BEG прямой, въ такомъ случаѣ Gg будетъ представлять часовое приращеніе удвоеннаго разстоянія между солнцемъ и узлами; часовое измѣненіе наклонности въ этомъ случаѣ (по 3 слѣд. послѣд. пред.) относится къ $33''10'''33^{\text{iv}}$ какъ произведеніе $\frac{AH \,.\, \sin BEG}{4}$ относится къ радіусу, т.-е. какъ $\frac{1}{4} AH$ къ радіусу, ибо уголъ BEG прямой.

А такъ какъ отношеніе AH къ радіусу равно синусу угла средней наклонности, т.-е. $\sin 5°8'\frac{1}{2}$, то его четверть равна 0,0224. Полное же измѣненіе наклонности, соотвѣтствующее разности BD синусовъ, относится къ выше найденному часовому какъ діаметръ BD къ дугѣ Gg, это же отношеніе равно произведенію отношеній діаметра BD къ полуокружности BGD и времени 2079,7 часа, въ продолженіе коихъ узелъ переходитъ отъ квадратуръ къ сизигіямъ, къ одному часу, т.-е. оно равно $\frac{7}{11} \,.\, \frac{2079{,}7}{1}$. Поэтому, перемноживъ всѣ эти отношенія получимъ, что отношеніе полнаго измѣненія наклонности BD къ $33''10'''33^{\text{iv}}$ равно

$$0{,}0224 \,.\, \frac{7}{11} \,.\, \frac{2079{,}7}{1} = 29{,}645$$

и, слѣдовательно, сказанное измѣненіе BD составитъ $16'23''\frac{1}{2}$.

Таково наибольшее измѣненіе наклонности, если не разсматривать

мѣста, занимаемаго луною на ея орбитѣ; наклонность, когда узлы находятся въ сизигіяхъ, не измѣняется при перемѣнахъ положенія луны. Когда же узлы находятся въ квадратурахъ, наклонность меньше на 2′43″ при положеніи самой луны въ сизигіяхъ, нежели когда она въ квадратурахъ, какъ это показано въ 4-мъ слѣдствіи предыдущаго предложенія.

Вычитая половину этой величины, т.-е. $1'21''\frac{1}{2}$, изъ средняго значенія измѣненія наклонности $16'23''\frac{1}{2}$, получимъ его среднее значеніе для положенія луны въ квадратурахъ равнымъ 15′2″, и придавая—получимъ для сизигій луны 17′45″. Слѣдовательно, если луна находится въ сизигіяхъ, то полное измѣненіе наклонности при переходѣ узловъ отъ квадратуръ до сизигій равно 17′45″, такимъ образомъ, если наклонность, когда узлы въ сизигіяхъ, равна 5°17′20″, то когда узлы въ квадратурахъ, луна же въ своемъ сизигіи, наклонность будетъ 4°59′35″.

Наблюденіями подтверждается, что все происходитъ именно такъ.

Поученіе.

Этими разсчетами движеній луны я хотѣлъ показать, что на основаніи теоріи тяготѣнія движенія луны могутъ быть вычислены по причинамъ ихъ производящимъ.

Помощью этой же теоріи я кромѣ того нашелъ, что годовое уравненіе средняго движенія луны происходитъ отъ различнаго растяженія орбиты луны силою солнца по сл. 6 предл. LXVI, кн. 1. Эта сила, когда солнце въ перигеѣ, больше и растягиваетъ орбиту луны; въ апогеѣ, гдѣ эта сила меньше, она позволяетъ орбитѣ сжиматься. По растянутой орбитѣ луна обращается медленнѣе, по сжатой быстрѣе, и годовое уравненіе, которымъ это неравенство выравнивается, равно нулю въ апогеѣ и въ перигеѣ солнца, въ среднемъ разстояніи солнца отъ земли оно достигаетъ приблизительно 11′50″, въ другихъ мѣстахъ пропорціонально уравненію центра для солнца; это уравненіе придается къ среднему движенію луны, когда земля переходитъ отъ своего афелія къ перигелію, для противоположной же части орбиты вычитается. Принимая радіусъ земной орбиты за 1000 и эксцентриситетъ ея $16\frac{7}{8}$, получимъ для наибольшей величины этого уравненія по теоріи тяготѣнія 11′49″. Но, кажется, эксцентриситетъ земной орбиты нѣсколько болѣе, при увеличеніи же эксцентриситета увеличивается пропорціонально ему и величина уравненія, такъ при эксцентриситетѣ $16\frac{11}{12}$ наибольшее уравненіе будетъ 11′51″.

Я нашелъ также, что въ перигеліи земли вслѣдствіе большей силы солнца апогей и узлы луны движутся быстрѣе, нежели въ ея афеліи и притомъ въ обратномъ отношеніи кубовъ разстояній земли до солнца; отъ этого происходятъ годовыя уравненія этихъ движеній, пропорціональныя уравненію центра солнца. Движеніе солнца обратно пропорціонально квадрату разстоянія земли до солнца и наибольшее уравненіе центра, которое отъ этого происходитъ, равно 1°56′20″ при вышеуказанной величинѣ экс-

центриситета земной орбиты въ $16\frac{11}{12}$. Если бы движенiе солнца было обратно пропорцiонально кубу разстоянiя, это неравенство произвело бы наибольшее уравненiе въ 2°54′50″, поэтому наибольшiя уравненiя, которыя происходятъ отъ неравенства движенiй апогея и узловъ луны, относятся къ 2°54′50″ какъ среднее суточное движенiе апогея и среднее суточное движенiе узловъ луны къ среднему суточному движенiю солнца. Происходящее вслѣдствiе этой причины наибольшее уравненiе средняго движенiя апогея равно 19′43″ и наибольшее уравненiе средняго движенiя узловъ, равно 9′24″. Первое уравненiе придается, второе вычитается, когда земля переходитъ отъ своего перигелiя къ афелiю, обратное имѣетъ мѣсто для противоположной части орбиты.

По теорiи тяготѣнiя устанавливается также, что дѣйствiе солнца на луну немного болѣе, когда поперечный дiаметръ лунной орбиты проходитъ черезъ солнце, нежели когда онъ находится подъ прямымъ угломъ къ линiи, соединяющей землю и солнце, поэтому лунная орбита въ первомъ случаѣ немного болѣе, нежели во второмъ. Отсюда происходитъ уравненiе средняго движенiя луны, зависящее отъ положенiя апогея луны относительно солнца; это уравненiе наибольшее, когда апогей расположенъ въ октантахъ отъ солнца и равно нулю, когда апогей приходитъ въ квадратуры или сизигiи; оно придается къ среднему движенiю при переходѣ апогея луны отъ квадратуры съ солнцемъ къ сизигiю и вычитается при переходѣ апогея отъ сизигiя къ квадратурѣ. Это уравненiе, которое я называю полугодичнымъ, въ октантахъ апогея, гдѣ оно наибольшее, достигаетъ кругло 3′45″, насколько я могъ вывести по явленiямъ. Таково его значенiе при среднемъ разстоянiи солнца отъ земли. Оно увеличивается или уменьшается въ обратномъ отношенiи кубовъ разстоянiй отъ солнца до земли, поэтому при наибольшемъ разстоянiи оно приблизительно равно 3′34″ при наименьшемъ 3′56″; когда же положенiе апогея луны внѣ октанта, оно становится меньше и относится къ наибольшему своему значенiю, какъ синусъ удвоеннаго разстоянiя апогея луны отъ ближайшаго сизигiя или ближайшей квадратуры, относится къ радiусу.

По той же теорiи тяготѣнiя дѣйствiе солнца на луну немного болѣе, когда прямая линiя, проведенная черезъ узлы луны, проходитъ черезъ солнце, нежели когда эта линiя составляетъ прямой уголъ съ прямою, соединяющей солнце съ землею. Отсюда происходитъ еще одно уравненiе средняго движенiя луны, которое я называю вторымъ полугодичнымъ; оно наибольшее, когда узлы располагаются въ октантахъ относительно солнца и обращается въ нуль, когда они въ сизигiяхъ или въ квадратурахъ, при другихъ же положенiяхъ узловъ оно пропорцiонально синусу удвоеннаго разстоянiя того или другого узла отъ ближайшей квадратуры или сизигiя. Оно прилагается къ среднему движенiю луны, если солнце расположено позади ближайшаго къ нему узла, вычитается, если солнце впереди и въ октантахъ, гдѣ оно наибольшее, достигаетъ 47″ при среднемъ разстоянiи солнца до земли, какъ я вывелъ изъ теорiи тяготѣнiя. При другихъ раз-

стояніяхъ солнца это наибольшее въ октантахъ узловъ уравненіе обратно пропорціонально кубу разстоянія солнца до земли и, слѣдовательно, составляетъ кругло 49″, когда солнце въ перигеѣ и 45″, когда оно въ апогеѣ.

По той же теоріи тяготѣнія апогей луны обладаетъ прямымъ движеніемъ съ наибольшею скоростью, когда онъ находится въ соединеніи съ солнцемъ, или же въ противостояніи съ нимъ и попятнымъ, когда онъ образуетъ съ солнцемъ квадратуру.

Эксцентриситетъ будетъ наибольшій въ первомъ случаѣ и наименьшій во второмъ, по слѣд.: 7, 8 и 9, предл. LXVI, кн. 1-ой. Эти неравенства по сказанному въ тѣхъ же слѣдствіяхъ весьма велики и производятъ главное уравненіе апогея, которое я называю полугодичнымъ. Наибольшее полугодичное уравненіе равно кругло 12°18′, насколько я могъ вывести изъ наблюденій.

Нашъ соотечественникъ *Горроксъ* первый предположилъ, что луна движется по эллипсу вокругъ земли, находящейся въ нижнемъ его фокусѣ. *Галлей* помѣстилъ центръ эллипса на эпициклъ, центръ котораго равномѣрно обращается вокругъ земли; отъ движенія по эпициклу и происходятъ выше сказанныя неравенства въ видѣ прямого и попятнаго движенія апогея и измѣненій величины эксцентриситета.

Представимъ, что среднее разстояніе между луною и землею раздѣлено на 100000 частей и пусть T (фиг. 197) изображаетъ землю, TC среднюю величину эксцентриситета луны равную 5505 частямъ; продолжимъ TC до B такъ, чтобы было

$$CB = TC \,.\, \sin 12^\circ 18',$$

тогда кругъ BDA, описанный точкою C, какъ центромъ, и радіусомъ CB и будетъ сказанный эпициклъ, на которомъ и располагается центръ лунной орбиты обращающійся по порядку буквъ BDA. Возьмемъ уголъ BCD равнымъ двойному годовому аргументу, т.-е. удвоенному разстоянію истиннаго мѣста солнца отъ апогея луны единожды исправленнаго, тогда CTD будетъ полугодовымъ уравненіемъ луны и TD эксцентриситетомъ ея орбиты, направляющимся къ апогею, дважды исправленному. Имѣя среднее движеніе луны, апогей и эксцентриситетъ и длину большой оси ея орбиты, равную 200000 частей, находятъ истинное мѣсто луны на ея орбитѣ и ея разстояніе до земли по извѣстнымъ способамъ.

Когда земля въ перигеліи, центръ лунной орбиты вслѣдствіе бо́льшей силы солнца движется быстрѣе вокругъ центра C, нежели въ афеліи и притомъ въ обратномъ отношеніи кубовъ разстояній земли до солнца. Но такъ какъ уравненіе центра солнца включается въ годовомъ аргументѣ, центръ лунной орбиты движется по эпициклу BDA быстрѣе въ обратномъ отношеніи квадратовъ разстояній земли до солнца. Чтобы заставить его двигаться еще быстрѣе въ обратномъ отношеніи этого разстоянія, изъ центра орбиты проводится прямая DE по направленію къ апогею луны, т.-е.

параллельно прямой TC и берется уголъ EDF, равный избытку вышеуказаннаго годового аргумента надъ разстояніемъ апогея луны до перигея солнца, считаемымъ въ прямомъ направленіи, или что то же, берется уголъ CDF, равный дополненію до 360° истинной аномаліи солнца. Пусть DF находится къ DC въ отношеніи, равномъ произведенію отношенія удвоеннаго эксцентриситета земной орбиты къ среднему разстоянію солнца до земли на отношеніе средняго суточнаго движенія солнца отъ апогея луны къ среднему суточному движенію солнца же отъ своего собственнаго апогея, т.-е. такъ чтобы было:

$$\frac{DF}{DC} = \frac{33\frac{7}{8}}{1000} \cdot \frac{52'27''16'''}{59'8''10'''}.$$

или

$$\frac{DF}{DC} = \frac{3}{100}.$$

Вообрази, что центръ орбиты луны располагается въ точкѣ F эпицикла, коего центръ D и коего радіусъ DF обращается въ то время, какъ точка D обходитъ окружность круга $DABD$. При такомъ условіи скорость, съ которою центръ орбиты луны будетъ двигаться по нѣкоторой кривой, описанной вокругъ центра C, будетъ приблизительно обратно пропорціональна кубу разстоянія солнца до земли, какъ это и требуется.

Разсчетъ этого движенія труденъ, его можно облегчить при помощи слѣдующаго приближенія. Если среднее разстояніе луны до земли принять равнымъ 100000 частей и эксцентриситетъ $TC = 5505$ какъ и выше, то длина CB или CD окажется равной $1172\frac{3}{4}$ частей, и длина $DF = 35\frac{1}{5}$.

Эта прямая при разстояніи TC стягиваетъ уголъ съ вершиною въ точкѣ T равный тому, который происходитъ отъ перемѣщенія центра орбиты изъ D въ F при движеніи его. Та же прямая, будучи удвоена и находясь въ положеніи параллельномъ въ разстояніи верхняго фокуса орбиты луны до земли, стягиваетъ такой-же уголъ, какъ тотъ, который образуется указаннымъ перемѣщеніемъ при движеніи фокуса; въ разстояніи же луны отъ земли стягиваетъ уголъ, образуемый тѣмъ-же перемѣщеніемъ луны въ движеніи ея, поэтому этотъ уголъ можетъ быть названъ вторымъ уравненіемъ центра. Это уравненіе при среднемъ разстояніи луны до земли приблизительно пропорціонально синусу угла, составляемаго прямою DF съ прямою, проведенной изъ точки F къ лунѣ, и наибольшая величина этого уравненія составляетъ 2′25″. Уголъ же, составляемый прямою DF и прямою, соединяющей точку F съ луною получается или вычитая уголъ EDF изъ средней аномаліи луны или же придавая разстояніе луны до солнца къ разстоянію апогея луны, до апогея солнца. Второе уравненіе центра равно произведенію 2′25″ на синусъ найденнаго указаннымъ выше образомъ угла; это уравненіе надо придавать, когда этотъ уголъ меньше полуокружности и вычитать, когда онъ больше.

Такимъ образомъ получится долгота луны при положеніи этого свѣтила въ сизигіяхъ.

Такъ какъ атмосфера земли до высоты 35 или 40 миль преломляетъ солнсчный свѣтъ и вслѣдствіе этого преломленія разсѣиваетъ его около тѣла земли, вслѣдствіе же разсѣянія свѣта въ смежности съ тѣнью, самая тѣнь расширяется, то къ діаметру тѣни, разсчитанному по паралаксу, я прибавляю одну минуту или одну минуту съ третью при вычисленіи лунныхъ затменій.

Теорію луны слѣдуетъ провѣрять и устанавливать на основаніи явленій прежде всего для сизигій, затѣмъ для квадратуръ и, наконецъ, для октантовъ. Если кто предприметъ это дѣло, то было бы удобно, если бы онъ принялъ для полдня Королевской *Гриничской* обсерваторіи послѣдняго дня декабря мѣсяца 1700 г. стр. ст. слѣдующія данныя для среднихъ движеній солнца и луны: среднее движеніе солнца 290°43′40″, его апогея 97°44′30″; среднее движеніе луны 315°21′00″, ея апогея 338°20′00″ и восходящаго узла 147°24′20″, разность долготъ этой обсерваторіи и Королевской *Парижской* $0^ч9^м20^с$. Однако до сихъ поръ среднее движеніе луны и ея апогея еще не получаются съ достаточною точностью.

Предложеніе XXXVI. Задача XVII.

Найти силу солнца движущую море.

Сила солнца ML (фиг. 186), возмущающая движеніе луны, когда луна въ квадратурахъ (по предл. XXV) относится къ силѣ тяжести на землѣ, какъ 1 къ 638092,6. Сила же $TM - LM = 2PK$ вдвое больше, когда луна въ сизигіяхъ.

Эти силы, если опуститься къ поверхности земли, уменьшаются въ такомъ же отношеніи, какъ и разстоянія до центра, т.-е. въ отношеніи $60\frac{1}{2}$ къ 1, такъ что первая сила на поверхности земли относится къ силѣ тяжести, какъ 1 къ 38604600. Этою силою море понижается въ мѣстахъ, отстоящихъ на 90° отъ солнца. Второю силою, которая вдвое больше, море поднимается подъ солнцемъ и въ области ему противоположной. Сумма этихъ двухъ силъ относится къ силѣ тяжести, какъ 1 къ 12868200. Такъ какъ каждая изъ этихъ силъ производитъ то же самое движеніе, понижаетъ ли она воду въ областяхъ, отстоящихъ на 90° отъ солнца, или же ее повышаетъ въ областяхъ подъ солнцемъ и въ областяхъ ему противоположныхъ, то эта сумма и представитъ полную силу, возмущающую море. Производимое ею дѣйствіе будетъ то же самое, какъ если бы эта сила цѣликомъ прилагалась лишь въ областяхъ подъ солнцемъ и въ областяхъ ему противоположныхъ, повышая море, въ областяхъ же, отстоящихъ на 90°, не дѣйствовала бы совсѣмъ.

Такова сила солнца, возмущающая море въ такомъ мѣстѣ, гдѣ солнце находится въ зенитѣ, и въ среднемъ своемъ разстояніи отъ земли. При другихъ положеніяхъ солнца сила, заставляющая море подниматься, прямо пропорціональна синусу верзусу удвоенной высоты солнца надъ горизонтомъ мѣста и обратно пропорціональна кубу разстоянія солнца до земли.

Слѣдствіе. Такъ какъ центробѣжная сила частицъ земли, происходящая отъ суточнаго вращенія земли, составляющая $\frac{1}{289}$ силы тяжести производитъ то, что высота воды подъ экваторомъ превосходитъ ея высоту при полюсахъ на 85472 Париж. футъ, какъ показано въ предл. XIX, то сила солнца, о которой идетъ рѣчь, относящаяся къ силѣ тяжести, какъ 1 къ 12.868.200, т.-е. къ сказанной центробѣжной силѣ, какъ 1 къ 44527, произведетъ, что высота воды въ областяхъ подъ солнцемъ и въ областяхъ противоположныхъ будетъ превосходить высоту ея въ областяхъ отъ нихъ отстоящихъ на 90° на 1 футъ и $11\frac{1}{3}$ дюймовъ Париж., ибо эта величина относится къ 85472 какъ 1 къ 44527.

Предложеніе XXXVII. Задача XVIII.

Найти силу луны движущую море.

Сила луны, движущая море, должна быть разсчитываема по сравненію ея съ силою солнца, это же сравненіе получается, сопоставляя движенія моря, происходящія отъ этихъ силъ. Передъ устьемъ рѣки *Авонъ* въ трехъ миляхъ ниже *Бристоля* весною и осенью полный подъемъ воды при соединеніяхъ и противостояніяхъ свѣтилъ по наблюденіямъ *Самуила Штурми* составляетъ немногимъ болѣе или немногимъ менѣе 45 футъ, въ квадратурахъ же всего 25 футъ. Первая высота происходитъ отъ суммы силъ, вторая отъ ихъ разности. Слѣдовательно, когда луна и солнце находятся на экваторѣ и въ среднемъ разстояніи отъ земли, то обозначая ихъ силы черезъ S и L, будемъ имѣть:

$$(L+S):(L-S)=45:25=9:5.$$

Въ *Плимутской* гавани приливъ по наблюденіямъ *Самуила Кальпресса* въ среднемъ составляетъ немного болѣе или немного менѣе 16 футъ, весною же и осенью высота воды во время сизигій превышаетъ таковую во время квадратуръ болѣе чѣмъ на 7 или 8 футъ. Если принять, что наибольшая разность достигаетъ 9 футъ, то будетъ

$$(L+S):(L-S)=20\frac{1}{2}:11=41:23.$$

Эта пропорція въ достаточной мѣрѣ согласуется съ предыдущей. Вслѣдствіе большой высоты прилива въ *Бристолѣ* наблюденія *Штурми* заслуживаютъ бо́льшаго довѣрія, поэтому пока мы не будемъ располагать чѣмъ-либо болѣе надежнымъ, мы воспользуемся отношеніемъ 9 къ 5.

Впрочемъ отъ взаимнаго движенія водъ наибольшіе приливы не совпадаютъ съ сизигіями свѣтилъ, но какъ уже сказано, суть третьи послѣ сизигій, т.-е. слѣдуютъ въ ближайшее время за третьимъ прохожденіемъ луны черезъ меридіанъ мѣста послѣ сизигія, или же точнѣе (какъ замѣтилъ *Штурми*), суть третьи послѣ дня новолунія или полнолунія, и

происходятъ немного позднѣе или немного ранѣе двѣнадцатаго часа послѣ новолунія или полнолунія. Такимъ образомъ наибольшій приливъ бываетъ немного позднѣе или немного ранѣе сорокъ третьяго часа послѣ новолунія или полнолунія, ибо приливы происходятъ въ этомъ порту приблизительно, въ седьмомъ часу, послѣ прохожденія луны черезъ меридіанъ мѣста, поэтому полная вода непосредственно слѣдуетъ за прохожденіемъ луны черезъ меридіанъ, когда луна отстоитъ отъ солнца или отъ противостоянія съ нимъ на 18° или 19° въ прямомъ направленіи. Полное развитіе зимы и лѣта приходится не въ самые дни солнцестоянія, а когда солнце отстоитъ отъ солнцестояній приблизительно на одну десятую полнаго круга, т.-е. 36° или 37°. Подобно этому и наибольшій приливъ моря происходитъ послѣ того прохожденія луны черезъ меридіанъ мѣста, когда она отстоитъ отъ солнца приблизительно на десятую часть своего движенія отъ одного наибольшаго прилива до слѣдующаго, т.-е. около $18°\frac{1}{2}$.

Сила солнца въ этомъ разстояніи луны отъ сизигій и квадратуръ увеличивающая или уменьшающая движеніе моря, происходящее отъ силы луны, будетъ меньше нежели въ сизигіяхъ въ отношеніи синуса дополненія удвоеннаго вышеуказаннаго разстоянія т.-е. 37° къ радіусу, значитъ въ отношеніи 7986355 къ 10000000. Поэтому въ предыдущей пропорціи надо писать $0{,}7986355S$ вмѣсто S.

Но и сила луны въ квадратурахъ вслѣдствіе отстоянія луны отъ экватора на величину ея склоненія должна быть уменьшена. Ибо, луна въ квадратурахъ или точнѣе въ $18°\frac{1}{2}$ послѣ квадратуры имѣетъ склоненіе около $22°13'$, когда же свѣтило находится внѣ экватора, то его сила, производящая движеніе моря, уменьшается приблизительно пропорціонально квадрату синуса дополненія склоненія, поэтому сила луны въ ея квадратурахъ составляетъ всего $0{,}8570327L$. Слѣдовательно будетъ:

$$(L + 0{,}7986355S) : (0{,}8570327L - 0{,}7986355S) = 9 : 5.$$

Кромѣ того діаметры орбиты, по которой луна должна бы двигаться безъ эксцентриситета, относятся между собою какъ 69 къ 70, такъ что разстояніе луны отъ земли въ сизигіяхъ относится къ ея разстоянію въ квадратурахъ какъ 69 къ 70, при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ. Въ $18°\frac{1}{2}$ отъ сизигіевъ, когда происходитъ наибольшій приливъ и въ $18°\frac{1}{2}$ отъ квадратуръ, когда образуется наименьшій приливъ, разстоянія луны до земли относятся къ среднему ея разстоянію, какъ 69,098747 и 69,897345 къ $69\frac{1}{2}$. Силы же луны, производящія движеніе море, обратно пропорціональны кубамъ разстояній, поэтому силы въ наибольшемъ и наименьшемъ изъ указанныхъ разстояній относятся къ силѣ при среднемъ разстояніи, какъ 0,9830427 и 1,017522 къ 1. Слѣдовательно будетъ

$$(1{,}017522L + 0{,}7986355S) : (0{,}9830427 \,.\, 0{,}8570327L - 0{,}7986355S) = 9 : 5$$

и значитъ

$$S : L = 1 : 4{,}4815.$$

Такъ какъ сила солнца относится къ силѣ тяжести какъ 1 къ 12868200, то сила луны относится къ силѣ тяжести, какъ 1 къ 2871400.

Слѣдствіе 1. Такъ какъ отъ силы солнца вода поднимается на высоту 1 ф. $11\frac{1}{3}$ дюйма, то отъ дѣйствія силы луны она поднимется на 8 ф. $7\frac{5}{22}$ дюйма и при дѣйствіи обѣихъ силъ на $10\frac{1}{2}$ футъ, и до высоты $12\frac{1}{2}$ футъ и болѣе, когда луна въ перигеѣ, въ особенности, если дующій вѣтеръ способствуетъ приливу. Такая сила вполнѣ достаточна для того чтобы производить всѣ движенія моря и вполнѣ отвѣчаетъ размѣрамъ этихъ движеній. Ибо въ моряхъ, широко простирающихся отъ востока къ западу, какъ въ *Тихомъ* океанѣ или въ *Атлантическомъ* внѣ тропиковъ, вода поднимается на 6, 9, 12 или 15 футъ. Говорятъ что въ *Тихомъ* океанѣ, который шире и глубже, приливъ больше, нежели въ *Атлантическомъ*, ибо для полноты прилива, протяженіе моря съ востока на западъ должно быть не менѣе 90°. Въ средней части *Атлантическаго* океана между тропиками приливы меньше, нежели въ умѣренныхъ поясахъ вслѣдствіе узкости океана между *Африкою* и *Южною Америкой.* По срединѣ моря вода не иначе можетъ подниматься, какъ опускаясь одновременно у восточнаго и западнаго берега, тогда какъ въ нашихъ узкихъ моряхъ она должна была бы понижаться у этихъ береговъ поочередно. Отъ этой же причины приливы и отливы на островахъ, лежащихъ весьма далеко отъ береговъ, должны быть весьма малыми.

Въ нѣкоторыхъ портахъ, куда вода, чтобы поочередно заполнять и опорожнивать заливы, должна протекать съ большимъ напоромъ черезъ мелководія, приливы и отливы должны быть больше обыкновенныхъ; такъ это происходитъ въ *Плимутѣ* и *Чипстоубриджѣ* въ Англіи, у горы св. *Михаила* и города *Авраншъ* въ *Нормандіи*, въ *Камбайѣ* и въ *Пегу* въ *Индіи.* Въ этихъ мѣстахъ море приливая и отливая съ большою скоростью то затопляетъ, то обнажаетъ берега на много миль. Иногда же этотъ напоръ втекающей или вытекающей воды прекращается не ранѣе того, какъ вода поднимется или опустится на 30, 40 или 50 футъ и даже болѣе. Въ такихъ условіяхъ находятся длинные и мелководные проливы, подобно *Магелланову* или тѣмъ, которыми окружена *Англія.* Приливы въ такого рода портахъ и проливахъ вслѣдствіе стремительности втеканія и вытеканія увеличиваются внѣ мѣры. У береговъ же, лежащихъ у глубокаго и открытаго моря и приглубыхъ, у которыхъ вода можетъ подниматься и опускаться не притекая и не вытекая подъ напоромъ, размѣры прилива соотвѣтствуютъ силамъ солнца и луны.

Слѣдствіе 2. Такъ какъ сила луны, движущая море, относится къ силѣ тяжести, какъ 1 къ 2871400, то ясно, что эта сила гораздо меньше такой, которая могла бы чувствоваться въ опытахъ съ маятниками или въ опытахъ статическихъ или гидростатическихъ. Лишь въ приливахъ моря эта сила оказываетъ чувствительное проявленіе.

Слѣдствіе 3. Такъ какъ сила луны, двигающая море, относится къ подобной же силѣ солнца какъ 4,4815 къ 1, силы же эти (по слѣд. 14

пр. LXVI кн. 1-ая) пропорціональны, соотвѣтственно, плотностямъ луны и солнца и кубамъ ихъ видимыхъ діаметровъ, то плотность луны находится къ плотности солнца въ отношеніи, равномъ

$$\frac{4,4815}{1} \cdot \left(\frac{32'12''}{31'16''\frac{1}{2}}\right)^3 = 4,891.$$

Плотность же солнца относится къ плотности земли какъ 1 : 4, поэтому плотность луны относится къ плотности земли, какъ 4891 къ 4000 или какъ 11 : 9. Слѣдовательно, масса луны плотнѣе и болѣе землиста, нежели наша земля [194]).

---

[194]) Лапласъ, излагая въ XIII книгѣ Небесной Механики общій обзоръ теоріи приливовъ и отливовъ, между прочимъ говоритъ: «Наблюденія показываютъ, что наибольшій приливъ не совпадаетъ съ моментами сизигій, а происходитъ на полторы сутки позже. Ньютонъ приписываетъ это опозданіе колебательному движенію моря, которое сохранилось бы нѣкоторое время и послѣ прекращенія дѣйствія свѣтилъ. Точная теорія колебаній моря, производимыхъ этимъ дѣйствіемъ, показываетъ, что безъ побочныхъ обстоятельствъ наибольшіе приливы совпадали бы зъ сизигіями, наименьшіе—съ квадратурами. Такимъ образомъ опаздываніе ихъ относительно этихъ фазъ не можетъ быть приписано, причинѣ указываемой Ньютономъ, оно зависитъ, какъ и время полной воды въ каждомъ портѣ, отъ побочныхъ обстоятельствъ. Этотъ примѣръ показываетъ насколько надо опасаться даже представляющихся самыми вѣроятными общихъ взглядовъ, когда они не провѣряются точнымъ анализомъ»... «Въ послѣдующихъ изданіяхъ «Началъ» Ньютонъ почти ничего не добавилъ къ теоріи приливовъ, изложенной въ первомъ изданіи; онъ принялъ лишь во вниманіе при вычисленіи дѣйствія луны измѣненіе разстоянія луны, производимое неравенствомъ, называемымъ *варіацией*. Такъ какъ наибольшій приливъ происходитъ черезъ полторы сутки послѣ сизигій, то онъ счелъ, что при вычисленіи *наибольшаго* прилива дѣйствіе солнца слѣдуетъ умножать на косинусъ удвоеннаго синодическаго движенія луны за этотъ промежутокъ времени. Но эта поправка неправильна, потому что приливъ въ данномъ порту не есть результатъ непосредственнаго дѣйствія свѣтилъ, но ихъ дѣйствія за полторы сутки до этого момента. Эти приливы можно уподобить тѣмъ, которые, будучи непосредственно вызываемы дѣйствіемъ свѣтилъ, употребляли бы полторы сутки для достиженія порта»...

«Обративъ вниманіе на правильность приливовъ въ Брестѣ, я предложилъ правительству сдѣлать распоряженія о производствѣ въ этомъ порту ряда наблюденій надъ приливами въ продолженіе, по крайней мѣрѣ, полнаго оборота лунныхъ узловъ (18 лѣтъ). Это было исполнено и наблюденія начаты съ 1-го іюня 1806 года и продолжаются безъ перерыва»... Обработка этихъ наблюденій за первыя 16 лѣтъ привела Лапласа къ заключенію, что отношеніе $L : S$ иначе отношеніе

$$\left(\frac{m}{r^3}\right) : \left(\frac{M}{R^3}\right) = 2,35333$$

и что

$$m : m_0 = 1 : 74,946$$

гдѣ m, M, m_0 суть соотвѣтственно массы луны, солнца и земли, r среднее

Слѣдствіе 4. Такъ какъ на основаніи астрономическихъ наблюденій истинный діаметръ луны относится къ истинному діаметру земли какъ 100 къ 365, то масса луны относится къ массѣ земли какъ 1 къ 39,788.

Слѣдствіе 5. Ускорительная сила тяжести на поверхности луны будетъ около 3 разъ меньше ускорительной силы тяжести на поверхности земли.

Слѣдствіе 6. Разстояніе центра луны отъ центра земли относится къ разстоянію центра луны до общаго центра тяжести ея и земли, какъ 40,788 къ 39,788.

Слѣдствіе 7. Среднее разстояніе центра луны отъ центра земли въ октантахъ составляетъ приблизительно 60,4 наибольшихъ полудіаметровъ земли. Такъ какъ наибольшій полудіаметръ земли составляетъ 19658600 пар. футъ, то среднее разстояніе между центрами земли и луны, равное 60,4 такихъ полудіаметровъ, равно 1.187.379.440 фут. Это разстояніе (по предыдущему слѣдствію) относится къ разстоянію центра луны до общаго центра тяжести луны и земли какъ 40,788 къ 39,788, то это послѣднее разстояніе равно 1.158.268.534. Такъ какъ луна обращается относительно неподвижныхъ звѣздъ въ 27 сут. 7 ч. $43\frac{4}{9}$ мин., то синусъ верзусъ угла, описываемаго луною въ одну минуту, составитъ 12752341 при радіусѣ 1.000.000.000.000.000; въ какомъ отношеніи этотъ радіусъ находится къ синусу верзусу, въ такомъ же отношеніи находится 1.158.268.534 фута къ 14,7706353 футъ. Слѣдовательно луна падая подъ дѣйствіемъ той силы, которою она удерживается на своей орбитѣ, проходитъ въ первую минуту своего паденія 14,7706353 фута. Увеличивая эту силу въ отношеніи 178,725 къ 177,725, получимъ полную силу тяжести на орбитѣ луны по слѣд. предл. III. Падая подъ дѣйствіемъ этой силы луна пройдетъ въ одну минуту 14,8538067 фута.

Въ разстояніи, равномъ $\frac{1}{60}$ разстоянія луны отъ центра земли, т.-е. въ 19789657 футахъ тяжелое тѣло пройдетъ въ одну секунду также 14,8538067 фута. Слѣдовательно въ разстояніи 19.615.800 фута, составляющихъ средній полудіаметръ земли, тяжелое тѣло пройдетъ при своемъ паденіи 15,11175 фута, т.-е. 15 футъ 1 дюймъ $4\frac{1}{11}$ линіи. Таково будетъ паденіе тѣлъ въ широтѣ 45°. По таблицѣ, приведенной въ предл. XX, паденіе немногимъ болѣе въ широтѣ *Парижа*, причемъ разность составляетъ около $\frac{2}{3}$ линіи, ибо тяжелыя тѣла по упомянутому разсчету въ широтѣ Парижа при паденіи въ пустотѣ проходятъ въ первую секунду 15 футъ 1 дюймъ $4\frac{25}{33}$ линіи, если же силу тяготѣнія уменьшить, отнявъ центробѣжную силу, происходящую въ этой широтѣ, отъ суточнаго вращенія земли, то падающіе тѣла проходили бы тамъ путь въ первую секунду

разстояніе луны и *R* среднее разстояніе солнца до земли. По Ньютону эти отношенія суть 4,4815 и 39,788. Понятно, что и всѣ числа слѣдствій 3, 4, 5 и 6 соотвѣтственно измѣняются.

15 футъ 1 дюймъ $1\frac{1}{2}$ линіи. Что тѣла падаютъ съ такою скоростью въ широтѣ Парижа, показано выше въ предл. IV и XIX.

Слѣдствіе 8. Среднее разстояніе между центрами земли и луны въ сизигіяхъ составляетъ 60 наибольшихъ полудіаметровъ земли, за вычетомъ лишь около $\frac{1}{30}$ полудіаметра. Въ квадратурахъ луны среднее разстояніе между указанными центрами равно $60\frac{5}{6}$ полудіаметровъ земли, ибо такія два разстоянія находятся къ среднему разстоянію луны въ октантахъ, какъ 69 и 70 къ $69\frac{1}{2}$ по предл. XXVIII.

Слѣдствіе 9. Среднее разстояніе между центрами земли и луны въ сизигіяхъ луны равно 60 среднимъ полудіаметрамъ земли съ прибавкою $\frac{1}{10}$ полудіаметра. Въ квадратурахъ луны среднее разстояніе между этими центрами равно 61 среднему полудіаметру земли за вычетомъ $\frac{1}{30}$ полудіаметра.

Слѣдствіе 10. Въ сизигіяхъ луны средній горизонтальный ея паралаксъ составляетъ соотвѣтственно въ различныхъ широтахъ:

Широта	Паралаксъ
0°	57′20″
30°	57′16″
38°	57′14″
45°	57′12″
52°	57′10″
60°	57′8″
90°	57′4″

Во всѣхъ этихъ вычисленіяхъ я не разсматривалъ магнитнаго притяженія земли, величина котораго весьма мала и неизвѣстна. Если же когда-либо это притяженіе можно будетъ изслѣдовать и если длины градуса меридіана и длины секундныхъ маятниковъ подъ разными широтами, законы движеній моря, паралаксъ луны и видимые полудіаметры солнца и луны будутъ опредѣлены изъ наблюденій совершающихся явленій болѣе точно, тогда будетъ возможно повторить и весь этотъ разсчетъ съ большею точностью.

Предложеніе XXXVIII. Задача XIX.

Найти фигуру луны.

Если бы луна была тѣломъ жидкимъ, на подобіе нашего моря, то сила земли, заставляющая подниматься ближайшія и отдаленнѣйшія его части, находилась бы къ силѣ луны, поднимающей наши моря въ мѣстахъ подъ луною и противоположныхъ ей, въ отношеніи равномъ произведенію отношеній ускорительной силы тяготѣнія луны къ землѣ къ ускорительной силѣ тяготѣнія земли къ лунѣ и отношенія діаметра луны къ діаметру земли, т.-е. какъ

$$\frac{39{,}788}{1} \cdot \frac{100}{365} = 10{,}81.$$

А такъ какъ наше море повышается силою луны на 8,6 фута, то жидкость луны должна бы подъ дѣйствіемъ силы земли подниматься на 93 фута. Вслѣдствіе этой причины фигура луны стала бы представлять сфероидъ, котораго бо̀льшій діаметръ по продолженіи проходилъ бы черезъ центръ земли и превышалъ бы перпендикулярные діаметры на 186 футъ.

Итакъ, луна принимаетъ такую форму и должна бы ею обладать съ самаго начала.

Слѣдствіе. Вслѣдствіе этого происходитъ, что съ земли наблюдается всегда одна и та же сторона луны, въ другомъ положеніи тѣло луны не могло бы и находиться въ покоѣ, а постоянно возвращалось бы къ этому положенію, совершая колебанія. Но эти колебанія вслѣдствіе малости дѣйствующихъ силъ происходили бы весьма медленно, такъ что та сторона, которая должна бы быть постоянно обращена къ землѣ, могла бы быть обращена и къ другому фокусу лунной орбиты (по причинѣ указанной въ пр. XVII) безъ того, чтобы немедленно быть оттянутой и повернутой къ землѣ.

Лемма I.

Пусть $APEp$ представляетъ землю однородной плотности, C центръ ея, Pp полюсы, AE экваторъ, радіусомъ CP изъ центра C описывается шаръ $Pape$, QR есть плоскость, перпендикулярная къ прямой соединяющей центръ земли съ центромъ солнца; если предположить что всѣ наружныя частицы земли заключенныя въ объемъ $PapAPepE$, лежащемъ снаружи шара $Pape$ вынуждаются удаляться отъ плоскости QR, причемъ это стремленіе для каждой частицы пропорціонально ея разстоянію до плоскости и QR, то я утверждаю: во-1-хъ, что дѣйствительность силы, происходящей отъ всѣхъ частицъ, расположенныхъ равномѣрно по экваторіальному кругу AE внѣ шара подобно кольцу, на вращеніе земли около ея центра относится къ дѣйствительности силы, происходящей отъ такого же числа частицъ, сосредоточенныхъ въ точкѣ A, находящейся въ наибольшемъ удаленіи отъ плоскости QR, стремящейся сообщить землѣ подобное же вращательное движеніе около ея центра какъ единица къ двумъ; самое же это вращательное движеніе происходитъ около оси, лежащей въ пересѣченіи экватора и плоскости QR.

Вообразимъ, что изъ центра K (фиг. 198) на діаметрѣ JL описанъ полукругъ $JNLK$ и полуокружность JNL раздѣлена на безчисленное множество равныхъ частицъ, отъ каждой изъ которыхъ на діаметръ JL проведенъ синусъ NM. Сумма квадратовъ всѣхъ синусовъ NM равна суммѣ квадратовъ синусовъ KM, обѣ же суммы составятъ сумму таковаго же числа

квадратовъ полудіаметровъ KN, слѣдовательно сумма квадратовъ всѣхъ NM вдвое меньше суммы квадратовъ таковаго же числа [195]) полудіаметровъ KN.

Вообразимъ теперь, что окружность круга AE раздѣляется на такое же число равныхъ частей и изъ одной изъ нихъ F опускается на плоскость QR. перпендикуляръ FG и изъ точки A перпендикуляръ AH. Сила, съ которою частица F стремится удалиться отъ плоскости QR по предположенію пропорціональна перпендикуляру FG, произведеніе этой силы на разстояніе CG представитъ мѣру дѣйствительности этой силы на вращеніе земли около ея центра [196]). Слѣдовательно, дѣйствительность частицы помѣщенной въ F относится къ дѣйствительности частицы, находящейся въ A, какъ:

$$FG \,.\, CG : AH \,.\, HC = FC^2 : AC^2$$

---

[195]) Это разсужденіе есть не что иное, какъ нахожденіе интеграла $\int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi$, который нуженъ для дальнѣйшаго. Примѣненный пріемъ равносиленъ слѣдующему: очевидно что:

$$\int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi = \int_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi.$$

Но

$$\int_0^\pi (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi = \int_0^\pi d\varphi = \pi.$$

Слѣдовательно:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}.$$

[196]) Словами «дѣйствительность силы на вращеніе земли около ея центра» переведены не вполнѣ буквально слова подлинника «vis et efficacia ad terram circa centrum ejus rotundam». Изъ хода доказательства видно, что это есть моментъ разсматриваемой силы относительно оси вращенія, лежащей въ плоскости экватора и въ плоскости QR.

Обозначая линейную плотность воображаемаго кольца черезъ q, силу дѣйствующую на 1 массы въ разстояніи x отъ плоскости QR черезъ kx, радіусъ кольца черезъ r получимъ, что масса всего кольца есть $2\pi qr$. Если эту массу вообразить сосредоточенной въ точкѣ A, то моментъ силы относительно указанной выше оси будетъ $2\pi qr^2 \sin\alpha$, гдѣ черезъ α обозначенъ уголъ QCA; когда же эта масса распредѣлена равномѣрно по всему кольцу, то полный моментъ будетъ:

$$kqr^2 \sin\alpha \,.\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \,.\, d\varphi = k\pi qr^2 \sin\alpha$$

и составитъ половину предыдущаго, какъ и сказано въ теоремѣ.

поэтому дѣйствительность всѣхъ частицъ, находящихся на своихъ мѣстахъ въ F, относится къ дѣйствительности такого же числа ихъ, помѣщенныхъ въ A, какъ сумма всѣхъ FC^2 относится къ суммѣ всѣхъ AC^2, т.-е. по только-что доказанному, какъ $1 : 2$.

Такъ какъ частицы дѣйствуютъ своимъ стремленіемъ удалиться отъ плоскости QR, слѣдовательно, одинаково отъ обѣихъ сторонъ этой плоскости, то они заставляютъ окружность экватора, а значитъ и неразрывно съ нею связанную землю поворачиваться около оси, лежащей какъ въ плоскости экватора, такъ и въ плоскости QR.

Лемма II.

При тѣхъ же положеніяхъ я утверждаю: во-2-хъ, что дѣйствительность силы всѣхъ частицъ, расположенныхъ повсюду внѣ шара на вращеніе земли вокругъ той же оси, относится къ полной силѣ таковою же числа частицъ, расположенныхъ равномѣрно по экватору, подобно кольцу, какъ два къ пяти.

Пусть JK (фиг. 199) есть какой-либо малый кругъ параллельный экватору; L, l двѣ равныхъ частицы, находящіяся на этомъ кругѣ внѣ шара $Pape$. Если на плоскость QR, перпендикулярную радіусу, проведенному къ солнцу опустить перпендикуляры LM, lm, то силы стремленія этихъ частицъ удаляться отъ плоскости QR пропорціональны этимъ перпендикулярамъ LM, lm. Пусть прямая Ll параллельная плоскости $Pape$ раздѣляется точкою X пополамъ, черезъ точку X проводится параллельно плоскости QR, прямая Nn пересѣкающая перпендикуляры LM и lm въ N и въ n и на плоскость QR опускается перпендикуляръ XY. Дѣйствительность силы частицъ L и l направленнымъ въ противоположныя стороны на вращеніе земли пропорціональна соотвѣтственно $LM . MC$ и $lm . mC$ иначе $(LN . MC + NM . MC)$ и $(ln . MC - nm . mC)$ или $(LN . MC - NM . MC)$ и $(LN . mC - NM . mC)$, разность этихъ величинъ равная $LN . Mm - NM(MC + mC)$ представляетъ мѣру дѣйствительности обѣихъ частицъ взятыхъ совмѣстно на вращеніе земли.

Положительная часть этой разности $LM . Mm = 2LN . NX$ относится къ силѣ двухъ такихъ же частицъ, помѣщенныхъ въ A, т.-е. къ $2AH . HC$ какъ $LX^2 : AC^2$. Отрицательная часть $NM(MC + mC) = 2XY . CY$ къ той же силѣ $2AH . HC$—какъ $CX^2 : AC^2$, поэтому разность этихъ величинъ, т.-е. дѣйствительность силъ обѣихъ равныхъ частицъ L и l на вращеніе земли, взятыхъ совмѣстно, относится къ дѣйствительности такихъ же двухъ частицъ, помѣщенныхъ въ A, какъ $(LX^2 - CX^2) : AC^2$. Но если окружность круга JK раздѣлить на безчисленное число равныхъ частей L, то сумма всѣхъ LX^2 относится къ суммѣ столькихъ же JX^2, какъ 1 къ 2 (по лем. I), слѣдовательно къ таковому же числу AC^2 эта сумма относится какъ $JX^2 : 2AC^2$. Отношеніе столькихъ же CX^2 къ столькимъ же AC^2

равно $2CX^2 : 2AC^2$. Вслѣдствіе этого совокупность силъ всѣхъ частицъ, расположенныхъ по окружности круга JK, относится къ совокупности силъ такого же числа частицъ, помѣщенныхъ въ точкѣ A, какъ

$$(JX^2 - 2CX^2) : 2AC^2$$

и, слѣдовательно, (по лем. I) она относится къ совокупности силъ такого же числа частицъ, расположенныхъ по окружности круга AE, какъ

$$(JX^2 - 2CX^2) : AC^2.$$

Если вообразить, что діаметръ Pp раздѣленъ на безчисленное число равныхъ частей, на которыя опирается столько же круговъ JK, то количество матеріи на периметрѣ каждаго круга [197]) будетъ пропорціонально JX^2, слѣдовательнс сила этого количества вещества на вращеніе земли будетъ пропорціональна $JX^2 . (JX^2 - 2CX^2)$. Сила того же количества вещества, если бы его расположить по окружности круга AC, была бы пропорціональна $JX^2 . AC^2$. Поэтому сила всѣхъ частицъ матеріи, размѣщенной внѣ шара по окружностямъ всѣхъ круговъ, относится къ силѣ таковаго же числа частицъ, размѣщенныхъ по окружности наибольшаго круга AE, какъ сумма всѣхъ $JX^2 . (JX^2 - 2CX^2)$ къ суммѣ такого же числа $JX^2 . AC^2$ иначе, какъ сумма всѣхъ $(AC^2 - CX^2)(AC^2 - 3CX^2)$ къ такому же числу $(AC^2 - CX^2) . AC^2$, т.-е. какъ сумма всѣхъ:

$$AC^4 - 4AC^2 . CX^2 + 3CX^4$$

къ таковому же числу

$$AC^4 - AC^2 . CX^2$$

т.-е. какъ флюента, коей флюксія есть первая изъ этихъ величинъ, къ флюентѣ коей флюксія есть $AC^4 - AC^2 . CX^2$. По способу флюксій первая флюента есть

$$AC^4 . CX - \frac{4}{3} AC^2 . CX^3 + \frac{3}{5} CX^5$$

вторая:

$$AC^4 . CX - \frac{1}{3} AC^2 . CX^3.$$

Отношеніе этихъ величинъ послѣ того, какъ въ нихъ вмѣсто CX подставлено Cp или AC, равно

$$\frac{4}{15} AC^5 : \frac{2}{3} AC^5$$

т.-е. $2 : 5$.

---

[197]) Какъ здѣсь, такъ и при замѣнѣ въ дальнѣйшемъ величины JX^2 черезъ $AC^2 - CX^2$ Ньютонъ считаетъ эллипсъ $pJAQPEp$ за кругъ, пренебрегая разностью длинъ полуосей CP и CA.

Лемма III.

При тѣхъ же положеніяхъ утверждаю: въ-3-хъ, что вокругъ оси проведенной, какъ указано выше, полное количество движенія земли, составленное изъ количествъ движенія всѣхъ частицъ ея находится къ количеству движенія вокругъ той же оси вышеприведеннаго кольца въ отношеніи, равномъ произведенію отношенія массы земли къ массѣ кольца на отношеніе трехъ квадратовъ дуги, равной четверти окружности какого-либо круга, къ двумъ квадратамъ его діаметра, т.-е. въ отношеніи, равномъ произведенію отношенія массъ на число 0,925275.

Ибо количество движенія цилиндра, вращающагося вокругъ своей неподвижной оси, относится къ количеству движенія, вписаннаго шара, вращающагося вмѣстѣ съ нимъ, какъ сумма площадей любыхъ четырехъ равныхъ квадратовъ къ суммѣ площадей трехъ круговъ въ нихъ вписанныхъ [198]); количество движенія того же цилиндра къ количеству движенія

[198]) Та величина, которую въ этой леммѣ Ньютонъ называетъ «количествомъ движенія земли при вращеніи ея около данной оси» не есть ни количество движенія, ни моментъ количествъ движенія, а представляетъ собою величину, не имѣющую механическаго значенія, а именно: сумму произведеній массъ частицъ тѣла на абсолютныя величины тѣхъ скоростей, коими онѣ при вращеніи тѣла обладаютъ. Между тѣмъ въ дальнѣйшемъ Ньютонъ пользуется найденною имъ такимъ образомъ для однороднаго шара величиною вмѣсто момента количествъ движенія этого шара, вслѣдствіе чего и произошла та ошибка, на которую обращаетъ вниманіе въ своемъ очеркѣ Ньютоновой теоріи процессіи Лапласъ. Эта ошибка была повидимому впервые замѣчена Т. Симпсономъ въ его Miscellaneous Tracts. Что Ньютонъ исчисляетъ именно указанную величину, не трудно убѣдиться, произведя соотвѣтствующіе разсчеты.

Начнемъ съ цилиндра. Пусть имѣется однородный круговой цилиндръ, вращающійся равномѣрно съ угловою скоростью ω около своей оси, радіусъ цилиндра обозначимъ черезъ R, высоту черезъ h и плотность черезъ q, тогда линейная скорость всѣхъ точекъ слоя, лежащаго между цилиндрическими поверхностями радіусовъ r и $r + dr$ есть ωr, масса этого слоя $2\pi rhqdr$, слѣдовательно упомянутая выше сумма произведеній массъ всѣхъ частицъ на ихъ скорости составитъ для цилиндра величину:

$$C = 2\pi qh\omega \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3}\pi qhR^3 \,.\, \omega = \frac{2}{3} M \,.\, R\omega$$

гдѣ M есть масса всего цилиндра.

Такое же количество для шара вписаннаго въ цилиндръ будетъ:

$$S = \frac{2}{3}\pi q\omega \int_{-R}^{+R} r^3 dz$$

тончайшаго кольца, окружающаго шаръ и цилиндръ по мѣсту ихъ касанія,— какъ удвоенная масса цилиндра къ утроенной массѣ кольца; количество же движенія этого кольца, вращающагося равномѣрно вокругъ оси цилиндра къ количеству его движенія при равномѣрномъ вращеніи съ такою же продолжительностью оборота вокругъ діаметра, какъ окружность круга къ удвоенному діаметру.

причемъ $r^2 + z^2 = R^2$, или положивъ $r = R\sin\varphi$, $z = R\cos\varphi$ будетъ:

$$S = \frac{2}{3}\pi q\omega R^4 . \int_0^\pi \sin^4\varphi \,.\, d\varphi = \frac{2}{3}\pi q\omega R^4 . \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi^2 q\omega R^4 = \frac{3}{16}\pi M_0 \,.\, R\omega$$

гдѣ M_0 есть масса шара.

Высота описаннаго около шара цилиндра есть $h = 2R$ и, значитъ, для него величина C будетъ:

$$C = \frac{4\pi}{3} . qR^4\omega.$$

Отношеніе $S : C = 3\pi : 16$, а это и есть какъ разъ отношеніе суммы площадей трехъ круговъ, вписанныхъ въ равные квадраты къ суммѣ площадей четырехъ такихъ квадратовъ.

Совершенно также для «тончайшаго кольца окружающаго цилиндръ и шаръ по мѣсту ихъ касанія» имѣемъ:

$$K = 2\pi q_1 R \,.\, \omega R = M_1 \,.\, \omega R$$

гдѣ черезъ q_1 обозначена линейная плотность и черезъ M_1 масса этого кольца. Очевидно, что отношеніе:

$$C : K = 2M : 3M_1$$

т.-е. равно отношенію удвоенной массы цилиндра къ утроенной массѣ кольца, какъ и сказано въ текстѣ.

Наконецъ количество Q расчисленное такимъ же образомъ для кольца вращающагося около своего діаметра будетъ:

$$Q = 2\omega q_1 R^2 \int_0^\pi \sin\varphi \,.\, d\varphi = 4q_1 R^2\omega = \frac{2}{\pi} . M_1 R\omega$$

и отношеніе

$$K : Q = \pi : 2$$

т.-е. равно отношенію окружности къ удвоенному діаметру, какъ и сказано въ текстѣ.

Очевидно, что

$$S : Q = \frac{3\pi^2}{32}\frac{M_0}{M_1} = 0{,}925275\frac{M_0}{M_1}$$

какъ и сказано въ леммѣ.

Предположеніе II.

Если по удаленіи земли вышеупомянутое кольцо будетъ двигаться годовымъ движеніемъ по орбитѣ земли вокругъ солнца и вмѣстѣ съ тѣмъ вращаться суточнымъ движеніемъ вокругъ своей оси, наклонен-ной къ плоскости эклиптики подъ угломъ $23^\circ\frac{1}{2}$, то движеніе точекъ равноденствія будетъ одно и то же, жидкое ли это кольцо или же состоитъ изъ твердаго и крѣпкаго вещества.

Предложеніе XXXIX. Задача XX.

Найти предвареніе равноденствій.

Среднее часовое движеніе узловъ луны для круговой орбиты, когда узлы въ квадратурахъ, равно $16''35'''16^{IV}36^{V}$, половина его $8''17''38^{IV}18^{V}$ (по причинамъ объясненнымъ выше) есть общее среднее часовое ихъ движеніе, составляющее въ звѣздный годъ $20^\circ11'46''$.

Итакъ, узлы луны при движеніи ея по круговой орбитѣ отступали бы ежегодно на $20^\circ11'46''$.

Если бы было нѣсколько лунъ, то движеніе узловъ каждой изъ нихъ было бы (по сл. 16 пр. LXVI кн. 1) пропорціонально времени ея обращенія.

Если бы луна обращалась въ продолженіи звѣздныхъ сутокъ у самой поверхности земли, то годовое движеніе узловъ относилось бы къ $20^\circ11'46''$, какъ звѣздные сутки, т.-е. 23 ч. 56 м. къ времени звѣзднаго оборота луны, т.-е. 27 с. 7 ч. 43 м., т.-е. какъ 1436 къ 39343. Въ таковыхъ условіяхъ находились бы узлы цѣлаго кольца лунъ окружающихъ землю, раздѣлены ли эти луны и не касаются другъ друга, обращены ли въ жидкость и составляютъ одно общее кольцо, или же наконецъ, если это кольцо затвердѣло и сдѣлалось неизгибаемымъ.

Вообразимъ также, что по массѣ это кольцо равно массѣ всего вещества земли заключеннаго въ объемѣ $PapAPepE$, объемлющемъ шаръ $Pape$ (фиг. 199). Объемъ этого шара относится къ объему внѣ его, какъ aC^2 къ $(AC^2 - aC^2)$, что составляетъ (такъ какъ отношеніе полудіаметровъ земли PC или aC къ AC равно 229 къ 230) 52441 къ 459. Если бы это кольцо окружало землю по экватору и вмѣстѣ съ нею вращалось бы во-кругъ діаметра кольца, то количество движенія кольца относилось бы къ количеству движенія шара [199]), въ немъ заключеннаго (по леммѣ III), какъ:

$$\frac{459}{52441} \cdot 0{,}925275 \text{ т.-е. } 4590 : 485223.$$

---

[199]) Въ примѣчаніи 198 показано, что та величина, которая исчис-лена въ леммѣ III и названа Ньютономъ количествомъ движенія шара и

Слѣдовательно количество движенія кольца будетъ относиться къ суммѣ количествъ движенія кольца и шара, какъ 4590 : 489813.

кольца, не представляетъ таковаго, поэтому приводимые въ текстѣ разсчеты требуютъ исправленія.

Вмѣсто исчисленной Ньютономъ величины надо взять моментъ количествъ движенія шара и кольца и притомъ для кольца не моментъ количествъ движенія около его діаметра, а также около оси, проходящей черезъ его центръ и перпендикулярной къ его плоскости. Эти моменты количествъ движенія будутъ:

Для шара . . . . . . $\frac{2}{5} M \cdot R^2\omega$

Для кольца . . . . . $M_1 R^2\omega$

Отношеніе этихъ величинъ есть $\frac{5}{2} \frac{M_1}{M}$, поэтому вмѣсто числа 0,925275 надо написать $\frac{5}{2}$ и будетъ:

$$\frac{459}{52441} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2245}{104882}$$

и вмѣсто отношенія 4590 : 489813 надо писать 2445 : 107127.

Такимъ образомъ годовое движеніе точекъ равноденствія тѣла, состоящаго изъ шара и кольца, составитъ отъ $20°11'46''$

$$\frac{1436}{39343} \cdot \frac{2245}{107127} = \frac{100}{130729}$$

и для земли будетъ:

$$20°11'46'' \cdot \frac{100}{130729} \cdot \frac{2}{5} = 22'',24.$$

Отъ этой величины для полученія солнечной прецессіи надо взять 0,91706, получится $20'',40$.

По Лапласу отношеніе приливообразующей силы луны къ таковой же силѣ солнца равно 2,35333, поэтому для полученія лунной прецессіи надо предыдущее число умножить на 2,35333, получится $48'',01$.

Такимъ образомъ полная прецессія съ этимъ исправленіемъ составитъ: $68'',41$, величина, далеко отступающая отъ даваемой наблюденіями. Разница эта происходитъ отъ того, что Ньютонъ принялъ отношеніе полуосей земного сфероида равнымъ 230 : 229. По даннымъ Лапласа оно близко къ 301 : 300 и вмѣсто Ньютонова числа 459 : 52441 представляющаго отношеніе разности квадратовъ полуосей къ квадрату малой полуоси надо взять 601 : 90000, тогда получится, сохраняя какъ ходъ разсчета, такъ и принятыя выше числа: солночная прецессія $15'',98$, лунная $37'',61$ и полная $53'',59$, что уже значительно ближе къ истинѣ.

Погрѣшность въ разсужденіи Ньютона была повидимому впервые замѣчена Th. Simpson'омъ, который въ своей статьѣ: A determination of the precession of the equinox etc... помѣщенной въ его Miscellaneous Tracts обращаетъ на нее вниманіе и вводитъ понятіе о моментѣ количествъ движенія. Эта статья содержитъ полное развитіе теоріи прецессіи по Ньютону, причемъ въ изложеніи принятъ и его методъ разсужденій, и она представляетъ превосходное поясненіе Ньютоновой теоріи, дополненной разсмо-

Поэтому, если бы кольцо соединилось съ шаромъ неизмѣнно и раздѣлило бы съ шаромъ то свое количество движенія, вслѣдствіе котораго его узлы или точки равноденствій отступаютъ, то количество движенія, которое послѣ того осталось бы въ кольцѣ, относилось бы къ его первоначальному количеству движенія, какъ 4590 къ 489813, поэтому и скорость движенія точекъ равноденствія, уменьшилась бы въ этомъ же отношеніи.

Слѣдовательно годовое движеніе точекъ равноденствія тѣла, состоящаго изъ шара и кольца будетъ относиться къ 20°11′46″, какъ

$$\frac{1436}{39343} \cdot \frac{4590}{489813} \text{ т.-е. } \frac{100}{292369}.$$

Силы, вслѣдствіе которыхъ узлы луны (какъ объяснено выше), а значитъ и точки равноденствій отступаютъ (т.-е. силы $3JT$ фиг. 189) для каждой отдѣльной частицы, пропорціональны ея разстоянію до плоскости QR, причемъ частицы, вслѣдствіе этихъ силъ, стремятся удалиться отъ этой плоскости; поэтому (по л. II) если вещество кольца распредѣлить по всей поверхности шара такъ, чтобы образовался объемъ $PapAPepE$, лежащій внѣ шара, то дѣйствительность совокупности силъ всѣхъ частицъ на вращеніе земли около какого-либо ея діаметра, а значитъ, и на движеніе точекъ равноденствія становится меньше прежней въ отношеніи 2 къ 5. Слѣдовательно, годовое перемѣщеніе точекъ равноденствія будетъ относиться къ 20°11′46, какъ 10 къ 73092 и, такимъ образомъ, составитъ $9''56'''50^{\text{IV}}$.

Вслѣдствіе наклонности плоскости эклиптики къ плоскости экватора это движеніе должно быть уменьшено въ отношеніи синуса дополненія $23^\circ\frac{1}{2}$ къ радіусу, т.-е. въ отношеніи 91706 къ 100000; по этой причинѣ указанное движеніе составитъ $9''7'''20^{\text{IV}}$. Таково годовое предвареніе равноденствій, происходящее отъ дѣйствія солнца.

Но сила луны, производящая движеніе моря, относится къ силѣ солнца, какъ 4,4815 къ 1. Сила луны, производящая движеніе равноденственныхъ точекъ, находится въ такомъ же отношеніи къ силѣ солнца; отсюда происходитъ годовое предвареніе, производимое силою луны въ $40''52'''52^{\text{IV}}$; слѣдовательно полное предвареніе отъ обѣихъ силъ составитъ $50''00'''12^{\text{IV}}$.

Это движеніе согласуется съ явленіями, ибо по астрономическимъ наблюденіямъ предвареніе равноденствій составляетъ въ годъ немного болѣе или немного менѣе 50″.

Если бы возвышеніе земли при экваторѣ превосходило бы ея возвышеніе у полюсовъ болѣе, нежели на $17\frac{1}{2}$ миль, то вещество земли

трѣніемъ нутаціи, незадолго передъ тѣмъ открытой. Что касается дальнѣйшаго развитія теоріи прецессіи и нутаціи, то нельзя не упомянуть о статьѣ Poinsot, Precession des equinoxes въ Additions à la Connaissance des Temps 1858 г.

было бы болѣе разрѣженнымъ къ поверхности, нежели къ центру, и предвареніе равноденствій, вслѣдствіе увеличенія этой высоты, должно быть увеличено, вслѣдствіе же меньшей плотности, уменьшено.

Теперь мы описали систему солнца, земли, луны и планетъ, остается кое-что добавить о кометахъ.

Лемма IV.

Кометы находятся далѣе луны и бываютъ въ области планетъ.

Отсутствіе суточнаго паралакса исключаетъ кометы изъ области подъ луною, по годовому же паралаксу убѣждаются, что онѣ спускаются въ области планетъ. Ибо тѣ кометы, которыя идутъ по порядку знаковъ зодіака въ концѣ своихъ появленій имѣютъ или особенно медленное или даже попятное движеніе, когда земля расположена между ними и солнцемъ, и много быстрѣе обыкновеннаго, когда земля приходится въ противостояніяхъ. Наоборотъ, тѣ кометы, которыя идутъ по направленію обратному порядку знаковъ имѣютъ движеніе быстрѣе обыкновеннаго въ концѣ ихъ появленій, когда земля расположена между ними и солнцемъ, и медленнѣе обыкновеннаго или же попятное, если земля располагается съ противоположной стороны. Это происходитъ главнымъ образомъ вслѣдствіе движенія земли при различномъ положеніи ея, подобно тому какъ и для планетъ, которыя смотря по тому направлено ли ихъ движеніе въ одну сторону съ землею или въ противуположную, представляются то идущими попятно, то медленно, то весьма быстро. Если земля движется въ одну сторону съ кометой и угловое ея движеніе вокругъ солнца болѣе быстрое, такъ что прямыя проводимыя отъ земли къ кометѣ сходятся за кометой, то комета разсматриваемая съ земли, вслѣдствіе болѣе медленнаго своего движенія, будетъ казаться идущей попятно; если же земля движется медленнѣе кометы, то за вычетомъ движенія земли, комета будетъ представляться идущей медленнѣе. Если же земля перемѣщается въ противоположную сторону, комета будетъ представляться идущей болѣе быстро. По ускоренію или замедленію или даже по перемѣнѣ направленія движенія, можно вывести разстояніе до кометы слѣдующимъ образомъ. Пусть ΥQA, ΥQB, ΥQC (фиг. 200) три наблюденныя долготы кометы при началѣ движенія и пусть ΥQF послѣдняя наблюденная долгота передъ исчезаніемъ кометы. Проводимъ прямую ABC такъ, чтобы ея отрѣзки AB и BC заключенные между прямыми QA и QB, QB и QC относились между собою какъ времена между тремя первыми наблюденіями. Продолживъ прямую AC до G такъ, чтобы отношеніе AG къ AB равнялось отношенію промежутковъ времени между первымъ и послѣднимъ наблюденіемъ къ промежутку между первымъ и вторымъ, проводимъ прямую QG. Если бы комета двигалась равномѣрно по прямой и земля находилась въ покоѣ или двигалась равномѣрно и прямолинейно то уголъ ΥQC былъ бы равенъ долготѣ кометы при послѣднемъ наблюденіи. Уголъ же FQC равный разности долготъ происходитъ отъ неравенства движеній ко-

меты и земли. Этотъ уголъ, если комета и земля движутся въ противоположныя стороны, прилагается къ углу ΥQC, вслѣдствіе чего кажущееся движеніе кометы становится быстрѣе, если же комета идетъ по одному направленію съ землею, этотъ уголъ вычитается, вслѣдствіе чего кажущееся движеніе кометы становится медленнѣе или даже попятнымъ, какъ уже объяснено. Слѣдовательно, этотъ уголъ происходитъ главнымъ образомъ отъ движенія земли и поэтому можетъ быть по справедливости принятъ за ея паралаксъ пренебрегая, нѣкоторымъ его приращеніемъ или уменьшеніемъ, которыя могутъ происходить отъ неравномѣрности движенія самой кометы по ея орбитѣ. Разстояніе же до кометы по этому паралаксу получается такъ: пусть S (фиг. 201) представляетъ солнце, acT орбиту земли, a мѣсто земли при первомъ наблюденіи, c мѣсто земли при третьемъ наблюденіи, T мѣсто ея при послѣднемъ наблюденіи и $T\Upsilon$ прямая линія проведенная къ началу знака Овна. Построивъ уголъ ΥTV равный углу ΥQF, т.-е. равный долготѣ кометы когда земля находится въ T, соединяемъ ac и продолжаемъ ее до g такъ чтобы было

$$ag : ac = AG : AC$$

тогда g есть то мѣсто, въ которое пришла бы земля если бы продолжала двигаться равномѣрно по прямой ac. Слѣдовательно, если провести $g\Upsilon$ параллельно $T\Upsilon$ и построить уголъ ΥgV равный углу ΥQG, то уголъ ΥgV будетъ равенъ долготѣ кометы усматриваемой изъ точки g и уголъ TVg представитъ паралаксъ, происходящій отъ перемѣщенія земли изъ точки g въ точку T, поэтому V представитъ мѣсто проекціи кометы на плоскость эклиптики. Это мѣсто V обыкновенно бываетъ внутри орбиты *Юпитера.* То же самое можно заключить и по кривизнѣ пути кометъ. Эти тѣла идутъ почти по большимъ кругамъ пока ихъ движеніе болѣе быстрое, въ концѣ же пути, когда та часть кажущагося движенія, которая происходитъ отъ паралакса имѣетъ бо́льшую величину по сравненію съ полнымъ кажущимся движеніемъ, онѣ обыкновенно отклоняются отъ этихъ круговъ и, когда земля идетъ въ одну сторону, онѣ отходятъ въ противоположную. Это отклоненіе происходитъ главнымъ образомъ отъ паралакса, вслѣдствіе чего и соотвѣтствуетъ движенію земли; значительная его величина по моимъ вычисленіямъ показываетъ, что исчезающія кометы гораздо ближе Юпитера. Отсюда слѣдуетъ, что въ перигеяхъ и перигеліяхъ, когда онѣ всего ближе, онѣ часто заходятъ внутрь орбитъ Марса и нижнихъ планетъ.

Близость кометъ подтверждается также по свѣту ихъ ядеръ. Яркость освѣщаемыхъ солнцемъ небесныхъ тѣлъ, уходящихъ въ далекія области, уменьшается пропорціонально четвертой степени разстоянія: а именно, пропорціонально квадрату разстояній вслѣдствіе увеличенія разстоянія тѣла до солнца и еще разъ пропорціонально квадрату разстоянія вслѣдствіе уменьшенія видимаго діаметра. Поэтому, если извѣстно количество свѣта и видимый діаметръ кометы, то найдется и разстояніе, полагая, что ея разстояніе находится къ разстоянію до планеты въ прямомъ отношеніи діа-

метровъ и въ обратномъ отношенiи корней квадратныхъ изъ количества свѣта.

Такъ для кометы 1682 года наименьшiй дiаметръ головы наблюденный *Флемстидомъ* въ 16 футовой телескопъ и измѣренный микрометромъ равнялся 2′0″, самое же ядро или звѣзда по срединѣ головы занимало лишь десятую часть ея, слѣдовательно, было всего въ 11″ или 12″. По свѣту же и по яркости головы она превосходила комету 1680 года и сравнивалась со звѣздами первой или второй величины. Положимъ, что *Сатурнъ* съ своимъ кольцомъ былъ въ четыре раза свѣтлѣе ея; такъ какъ свѣтъ кольца почти равенъ свѣту самого шара, дiаметръ же шара приблизительно равенъ 21″, то свѣтъ шара и кольца равенъ свѣту такого шара, котораго дiаметръ около 30″, и разстоянiе кометы относится къ разстоянiю до Сатурна какъ

$$\frac{\sqrt{4}}{1}\cdot\frac{12}{30}\ \text{т.-е.}\ \frac{24}{30}\ \text{или}\ \frac{4}{5}.$$

Съ другой стороны комета апрѣля мѣсяца 1665 года, по словамъ *Гевелiя*, превосходила своею яркостью почти всѣ неподвижныя звѣзды, и даже была свѣтлѣе Сатурна, вслѣдствiе гораздо болѣе яркаго цвѣта. Эта комета была свѣтлѣе другой, которая появилась въ концѣ предыдущаго года и сравнивалась со звѣздами первой величины. Дiаметръ головы былъ около 6′, ядро же по наблюденiямъ въ подзорную трубу было значительно менѣе Юпитера и иногда принималось меньшимъ, иногда бо̀льшимъ тѣла Сатурна. Такъ какъ дiаметръ головы кометъ рѣдко превосходитъ 8′ или 12′, дiаметръ же самого ядра или центральной звѣзды составляетъ около $\frac{1}{10}$ или даже $\frac{1}{15}$ дiаметра головы, поэтому и кажется, что эти ядра или большая ихъ часть одинаковой видимой величины съ планетами. Такъ какъ ихъ свѣтъ часто можетъ быть сравненъ со свѣтомъ Сатурна или даже немного его превосходитъ, то ясно, что всѣ кометы въ своихъ перигелiяхъ располагаются или ближе Сатурна или же немногимъ далѣе. Поэтому, совершенно заблуждаются тѣ, которые относятъ кометы въ область близъ неподвижныхъ звѣздъ, ибо въ этомъ случаѣ онѣ не болѣе освѣщались бы нашимъ солнцемъ нежели находящiяся въ нашихъ областяхъ планеты освѣщаются неподвижными звѣздами.

Мы разсуждали до сихъ поръ не разсматривая затемненiя кометъ тѣмъ весьма обильнымъ и густымъ дымомъ, которымъ постоянно окружена ихъ голова, просвѣчивающая всегда какъ бы черезъ густое облако. Чѣмъ болѣе тѣло затемняется этимъ дымомъ, тѣмъ ближе оно должно приближаться къ солнцу, чтобы сравниваться съ планетами по количеству отражаемаго имъ свѣта. Поэтому становится весьма правдоподобнымъ, что кометы должны спускаться далеко внутрь сферы Сатурна, какъ и доказано по ихъ паралаксамъ. То же самое вполнѣ подтверждается по ихъ хвостамъ, которые происходятъ или отъ отраженiя свѣта солнца дымомъ распространяющемся въ эфирѣ или же отъ свѣта головы. Въ первомъ случаѣ, разстоянiе

до кометъ должно быть уменьшено, ибо иначе пришлось бы приписать распространенію дыма производимому головой кометъ совершенно невѣроятныя скорости и протяженія.

Въ послѣднемъ случаѣ весь свѣтъ какъ головы, такъ и хвоста надо приписывать ядру. Слѣдовательно, если вообразить, что весь этотъ свѣтъ собранъ и сосредоточенъ внутри диска ядра, то ядро навѣрное, въ особенности когда оно испускаетъ большой и яркій хвостъ, значительно превосходило бы по своему сіянію Юпитеръ; слѣдовательно, испуская при меньшемъ видимомъ діаметрѣ больше свѣта, оно должно бы значительно сильнѣе освѣщаться солнцемъ, и слѣдовательно, быть гораздо ближе къ солнцу. На основаніи такого же разсужденія, придется помѣщать кометы внутри орбиты Венеры, когда ихъ головы скрываясь за солнцемъ испускаютъ огромные и свѣтлые хвосты подобные огненнымъ столбамъ, какъ то иногда бываетъ. Въ этомъ случаѣ ихъ свѣтъ, если бы его весь сосредоточить въ ядрѣ, превзошелъ бы свѣтъ Венеры и даже не одной Венеры а нѣсколькихъ соединенныхъ вмѣстѣ.

То же самое можно вывести и изъ того, что свѣтъ головъ возрастаетъ при удаленіи кометъ отъ земли и приближеніи ихъ къ солнцу и убываетъ при ихъ удаленіи отъ солнца и приближеніи къ землѣ. Такъ, послѣдняя комета 1665 года, по наблюденіямъ *Гевелія*, съ того времени, какъ она была усмотрѣна, постоянно замедлялась въ кажущемся своемъ движеніи, слѣдовательно, уже прошла черезъ перигей, сіяніе же головы ея тѣмъ не менѣе ежедневно возрастало, пока комета перестала быть видимой, скрывшись въ лучахъ солнца. Комета 1683 года (по наблюденіямъ того же Гевелія) въ концѣ іюля мѣсяца, когда она была впервые усмотрѣна, двигалась весьма медленно, приблизительно проходя по $40'$ или $45'$ въ сутки по своей орбитѣ. Въ то же время суточное ея движеніе постоянно возрастало до 4 сентября, когда оно составляло около $5°$, слѣдовательно, въ продолженіе всего этого времени комета приближалась къ землѣ; объ этомъ можно также заключить и по микрометрическимъ измѣреніямъ діаметра головы, который по сообщенію Гевелія составлялъ 6 августа $6'5''$ включая и вѣнецъ, 2-го же сентября былъ $9'7''$. Слѣдовательно, въ началѣ голова представлялась значительно меньшей нежели въ концѣ движенія, между тѣмъ, какъ сообщаетъ Гевелій, въ началѣ поблизости къ солнцу, она казалась гораздо свѣтлѣе нежели къ концу. Значитъ, во все это время вслѣдствіе удаленія отъ солнца, свѣтъ ея уменьшался, несмотря на приближеніе къ землѣ. Комета 1618 года около середины декабря мѣсяца и комета 1680 года въ концѣ того же мѣсяца, двигались всего быстрѣе, слѣдовательно, были тогда въ перигеяхъ. Однако, наибольшее сіяніе ихъ головъ было за двѣ недѣли передъ тѣмъ, когда онѣ выходили изъ лучей солнца, наибольшее же сіяніе ихъ хвостовъ еще немного ранѣе въ большей близости къ солнцу. Голова первой кометы, по наблюденіямъ *Цизата*, 1 декабря представлялась больше звѣзды первой величины, декабря же 16 (будучи тогда въ перигеѣ) по величинѣ мало уменьшилась

по сіянію же и яркости свѣта—весьма значительно. Января 7-го *Кэплеръ*, неувѣренно различая голову, прекратилъ наблюденія. Декабря 12-го усмотрѣна и наблюдена *Флемстидомъ* голова второй кометы въ разстояніи 9° отъ солнца, что едва было возможно сдѣлать для звѣздъ третьей величины. Декабря 15 и 17 она представлялась какъ звѣзда третьей величины, причемъ ея яркость была уменьшена облаками послѣ захода солнца. Декабря 26-го ея движеніе было самое быстрое, слѣдовательно, она находилась ближе всего къ перигею, по яркости же она уступала «Рту пегаса»—звѣздѣ 3-й величины. Января 3-го она представлялась звѣздою 4-й величины, января 9-го звѣздою 5-й величины, января 13-го вслѣдствіе увеличившагося сіянія луны, не могла быть наблюдаема, января 25-го едва равнялась звѣздамъ 7-й величины. Если брать времена равноотстоящія отъ перигея, то голова кометы, которая находилась отъ земли въ одинаковыхъ удаленіяхъ, должна бы представляться одинаково яркой, однако, по близости съ солнцемъ она сіяла всего сильнѣе, по другую же сторону перигея исчезла. По значительной разности въ силѣ свѣта въ этихъ двухъ положеніяхъ можно заключить о близости кометы къ солнцу въ первомъ изъ нихъ.

Вообще же яркость кометъ должна измѣняться правильно и представляться наибольшей, когда головы ихъ движутся всего быстрѣе, т.-е. когда онѣ находятся въ перигеяхъ, кромѣ тѣхъ случаевъ, когда эта яркость больше вслѣдствіе близости кометы къ солнцу.

Слѣдствіе 1. Слѣдовательно кометы сіяютъ отраженнымъ отъ нихъ свѣтомъ солнца.

Слѣдствіе 2. Изъ сказаннаго становится понятнымъ, почему кометы усматриваются въ ближайшихъ къ солнцу областяхъ. Еслибы онѣ могли быть видимы въ областяхъ далеко за Сатурномъ, то онѣ чаще бы появлялись въ областяхъ, противоположныхъ солнцу, ибо кометы находящіяся тутъ были бы ближе къ землѣ, прочія утрачивались бы въ лучахъ солнца, расположеннаго между ними и землею.

На самомъ же дѣлѣ, прослѣдивъ исторіи кометъ, оказывается, что ихъ открыто въ четверо или въ пятеро болѣе въ томъ же полушаріи, гдѣ находилось солнце, нежели въ противоположномъ, помимо тѣхъ, несомнѣнно не малочисленныхъ, которыя заслонялись свѣтомъ солнца. Во всякомъ случаѣ, при приближеніи къ нашимъ областямъ кометы не испускаютъ хвостовъ и не освѣщаются на столько солнцемъ, чтобы стать видимыми простымъ глазомъ ранѣе того, какъ онѣ станутъ ближе Юпитера. Большая же часть объема заключеннаго внутри описаннаго около солнца настолько малымъ радіусомъ шара, лежитъ отъ земли въ ту сторону, гдѣ солнце, и въ этой большей части кометы, будучи и ближе къ солнцу, сильнѣе имъ освѣщаются.

Слѣдствіе 3. Отсюда также становится очевиднымъ, что небесныя пространства лишены сопротивленія. Ибо кометы, слѣдуя по путямъ наклоннымъ, а иногда даже и противоположнымъ обращеніямъ планетъ, движутся повсюду вполнѣ свободно, и сохраняютъ свое даже противополож-

ное ходу планетъ движенie, весьма продолжительное время. Я даже сомнѣваюсь, не составляютъ ли онѣ рода планетъ, вѣчно обращающихся по орбитамъ. Мнѣнiе же нѣкоторыхъ писателей, что это метеоры, выводимое изъ постояннаго измѣненiя вида головъ кометъ, представляется лишеннымъ основанiя. Головы кометъ окружены огромнаго размѣра атмосферами, атмосфера же внизу должна быть болѣе плотной. Поэтому всѣ эти измѣненiя усматриваются не въ самихъ головахъ кометъ, а лишь въ облакахъ ихъ окружающихъ. Такъ, если бы землю разсматривать съ планетъ, она безъ сомнѣнiя сiяла бы своими облаками, и твердое ея тѣло скрывалось бы за ними. Такимъ образомъ пояса Юпитера образованы облаками этой планеты, ибо онѣ мѣняютъ относительное свое расположенiе, самое же тѣло Юпитера съ трудомъ распознается черезъ эти тучи. Въ еще большей мѣрѣ теряются изъ виду тѣла кометъ подъ ихъ болѣе глубокими и густыми атмосферами.

Предложенiе XL. Теорема XX.

Кометы движутся по коническимъ сѣченiямъ, имѣющимъ свой фокусъ въ центрѣ солнца и описываютъ радiусами, проводимыми къ солнцу площади пропорцiональныя временамъ.

Явствуетъ изъ сл. 1 пред. XIII кн. 1-ой при сопоставленiи его съ пред. VIII, XII и XIII книги 3-ей.

Слѣдствiе 1. Поэтому если кометы движутся по замкнутымъ орбитамъ, то эти орбиты эллиптическiя и времена ихъ описанiя находятся въ полукубическомъ отношенiи главныхъ осей ихъ къ временамъ обращенiя планетъ. Вслѣдствiе этого кометы, находясь по большей части внѣ области планетъ и описывая орбиты съ бóльшими осями, обращаются и болѣе продолжительно. Такъ, если ось орбиты кометы будетъ въ четыре раза больше оси орбиты Сатурна, то время оборота кометы будетъ относиться ко времени оборота Сатурна, т.-е. къ 30 годамъ, какъ $4\sqrt{4}$, т.-е. какъ 8 къ 1, и составитъ 240 лѣтъ.

Слѣдствiе 2. Орбиты кометъ будутъ поэтому настолько близки къ параболѣ, что ихъ можно принять параболическими безъ чувствительныхъ погрѣшностей.

Слѣдствiе 3. Вслѣдствiе этого (по сл. 7 предл. XVI кн. 1-ой) скорость всякой кометы всегда находится къ скорости планеты, обращающейся около солнца по кругу, въ отношенiи весьма близкомъ къ корню квадратному изъ отношенiя удвоеннаго разстоянiя планеты до центра солнца къ разстоянiю кометы до центра солнца. Примемъ радiусъ орбиты земли, иначе большую полуось того эллипса, по которому обращается земля за 100.000.000 частей, тогда земля проходитъ въ среднемъ своемъ движенiи въ сутки 1720212 частей и въ часъ $71675\frac{1}{2}$, поэтому комета, находясь въ такомъ же разстоянiи отъ солнца какъ и земля, будетъ обладать скоростью, относящеюся къ скорости земли какъ $\sqrt{2}:1$ и опишетъ въ

сутки при своемъ движенiи 2432747 частей и въ часъ $10134\frac{1}{2}$ части. Въ большемъ же или меньшемъ разстоянiи какъ суточное, такъ и часовое движенiе будетъ находиться къ этому въ отношенiи, равномъ корню квадратному изъ обратнаго отношенiя разстоянiй, слѣдовательно найдется.

Слѣдствiе 4. Поэтому, если параметръ параболы будетъ въ четыре раза больше радiуса земной орбиты и положить, что квадратъ этого радiуса равенъ 100.000.000 частей, то площадь, описываемая радiусомъ проведеннымъ отъ кометы къ солнцу въ однѣ сутки составитъ $1216373\frac{1}{2}$ части и въ часъ $50682\frac{1}{4}$ такихъ части. Если же параметръ будетъ больше или меньше, то площадь, описываемая въ сутки или въ часъ, будетъ также больше или меньше въ отношенiи корней квадратныхъ изъ параметровъ.

Лемма V.

Найти параболическаго рода кривую, проходящую черезъ какое-либо число заданныхъ точекъ.

Пусть эти точки A, B, C, D, E, F и т. д., (фиг. 202) изъ каждой изъ нихъ опускается перпендикуляръ на какую-либо заданную по положенiю прямую HN; пусть эти перпендикуляры суть: AH, BJ, CK, DL, EM, FN...

Случай 1. Если разстоянiя между точками H, J, K, L, M, N... между собою равны, то обозначая ординаты [200])

$$AH = y_1,\quad BJ = y_2,\quad CK = y_3,\quad DL = y_4,\quad ME = y_5,\quad NF = y_6\ \ldots$$

составляемъ ихъ первыя разности:

$$b_1 = y_2 - y_1;\quad b_2 = y_3 - y_2;\quad b_3 = y_4 - y_3;\quad b_4 = y_5 - y_4;\quad b_5 = y_6 - y_5$$

затѣмъ вторыя:

$$c_1 = b_2 - b_1;\quad c_2 = b_3 - b_2;\quad c_3 = b_4 - b_3;\quad c_4 = b_5 - b_4$$

третьи:

$$d_1 = c_2 - c_1,\quad d_2 = c_3 - c_2,\quad d_3 = c_4 - c_3$$

и продолжаемъ такимъ образомъ далѣе, пока не дойдемъ до послѣдней разности, которая въ этомъ случаѣ есть f_1, такъ что получается такая таблица:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 & & y_5 & & y_6 \\
& b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & \\
& & c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_4 & & \\
& & & d_1 & & d_2 & & d_3 & & & \\
& & & & e_1 & & e_2 & & & & \\
& & & & & f_1 & & & & &
\end{array}$$

---

[200]) При изложенiи этого доказательства Ньютоновы обозначенiя замѣнены общеупотребительными теперь, чтобы легче было слѣдить за ходомъ самого разсужденiя.

Проведя затѣмъ какой-либо перпендикуляръ RS, принимаемъ его за ординату произвольной точки S искомой кривой, и пусть абсцисса точки S равна x. Абсциссы же точекъ H, J, K, L, ... соотвѣтственно

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \ldots$$

и примемъ, что всѣ разности

$$x_2 - x_1, \quad x_3 - x_2, \quad x_4 - x_3 \text{ и т. д.}$$

равны 1.

Положимъ затѣмъ

$$p = x - x_1$$
$$q = \frac{1}{2}p(x - x_2) = \frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2)$$
$$r = \frac{1}{3}q(x - x_3) = \frac{1}{2.3}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$s = \frac{1}{4}r(x - x_4) = \frac{1}{2.3.4}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$
$$t = \frac{1}{5}s(x - x_5) = \frac{1}{2.3.4.5}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

продолжая такимъ образомъ, пока не дойдемъ до предпослѣдняго перпендикуляра, тогда будемъ имѣть:

$$y = y_1 + b_1 p + c_1 q + d_1 r + e_1 s + f_1 t + \ldots$$

Производя это вычисленіе надо обращать должное вниманіе на знаки.

Случай 2. Когда же промежутки HJ, JK и т. д. между точками H, J, K, L ... между собою не равны, тогда составляя величины b_1, b_2 ... надо разности ординатъ дѣлить на разности ихъ абсциссъ; составляя величины c_1, c_2 ... надо разности величинъ b дѣлить на разности абсциссъ взятыхъ черезъ одну, составляя величины d_1, d_2 ... надо разности величинъ c дѣлить на разности абсциссъ взятыхъ черезъ двѣ и т. д., такъ что будетъ:

$$b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \quad b_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} \text{ и т. д.}$$
$$c_1 = \frac{b_2 - b_1}{x_3 - x_1}, \quad c_2 = \frac{b_3 - b_2}{x_4 - x_2}, \quad c_3 = \frac{b_4 - b_3}{x_5 - x_3}$$
$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{x_4 - x_1}, \quad d_2 = \frac{c_3 - c_2}{x_5 - x_1}$$

и т. д.

Послѣ того, какъ эти разности найдены, положивъ

$$p = x - x_1$$
$$q = p(x - x_2) = (x - x_1)(x - x_2)$$
$$r = q(x - x_3) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$
$$s = r(x - x_4) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$
$$t = s(x - x_5) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

будемъ имѣть [201]):

$$y = y_1 + b_1 p + c_1 q + d_1 r + e_1 s + f_1 t + \dots$$

Слѣдствіе. На основаніи этого могутъ быть находимы по приближенію площади любыхъ кривыхъ, ибо если взять на той кривой, площадь которой ищется какое-либо число точекъ и вообразить, что черезъ нихъ проведена парабола, то площадь этой параболы будетъ приблизительно равна искомой площади кривой. Площадь же всякой параболы можетъ быть всегда найдена по извѣстнымъ геометрическимъ способамъ.

Лемма VI.

По нѣсколькимъ мѣстамъ кометы извѣстнымъ по наблюденіямъ найти ея мѣсто въ данное время.

Пусть $HJ, JK, KL, LM\dots$ (фиг. 202) представляютъ промежутки между наблюденіями, HA, IB, KC, LD, ME пять наблюденныхъ долготъ кометы, HS какое-либо заданное время, долгота въ которое ищется. Если вообразить, что черезъ точки A, B, C, D, E проведена правильная кривая $ABCDE$ и по предыдущей леммѣ найти ея ординату RS, то RS и представитъ требуемую долготу.

По такому же способу по пяти наблюденнымъ широтамъ найдется широта для любого даннаго времени.

Если разности наблюденныхъ долготъ малыя, напримѣръ, 4° или 5°, то достаточно трехъ или четырехъ наблюденій для полученія новой долготы и широты. Когда же разности больше, напр., 10° или 20°, то надо пользоваться пятью наблюденіями.

Лемма VII.

Черезъ заданную точку P провести прямую BC такъ, чтобы ея отрѣзки PB, PC отсѣкаемые заданными по положенію прямыми AB и AC находились въ данномъ другъ къ другу отношеніи.

Отъ данной точки P (фиг. 203) проводится къ одной изъ данныхъ прямыхъ AB, какая-либо прямая PD и продолжается въ сторону другой прямой AC до точки E такъ, чтобы отношеніе PE къ PD равнялось заданному. Пусть EC параллельна AD, то проведя CPB и получимъ:

$$PC : PB = PE : PD.$$

---

[201]) Доказательство этой формулы, данное самимъ Ньютономъ, см. мою статью вып. I «Изв. Ник. Мор. Акад.» стр. 119. Въ этой статьѣ подробно разобранъ и поясненъ примѣрами способъ Ньютона опредѣленія параболическихъ орбитъ кометъ.

Лемма VIII.

Пусть ABC есть парабола, имѣющая своимъ фокусомъ S. Хордою AC раздѣленной въ точкѣ J пополамъ отсѣкается сегментъ ABCJ коего діаметръ $J\mu$ и вершина μ. На продолженіи $J\mu$ берется длина μO, равная половинѣ $J\mu$. Соединивъ SO, продолжаютъ ее до ξ такъ, чтобы $S\xi$ было равно 2SO. Если комета B движется по дугѣ CBA и провести ξB, пересѣкающую AC въ E, то я утверждаю, что точка E отсѣкаетъ отъ хорды AC сегментъ AE, приблизительно пропорціональный времени.

Проводимъ EO (фиг. 204) пересѣкающую дугу параболы ABC въ Y и прямую μX, касательную къ ней въ вершинѣ μ и пересѣкающую EO въ X, тогда криволинейная площадь $AEX\mu A$ будетъ относиться къ криволинейной площади $ACY\mu A$, какъ AE къ AC, а такъ какъ площадь треугольника ASE находится въ такомъ же отношеніи къ площади треугольника ASC, то и отношеніе полной площади $ASEX\mu A$ къ площади $ASCY\mu A$ равно AE къ AC. Такъ какъ

$$\xi O : SO = 3 : 1 = EO : XO$$

то SX параллельна EB, и если провести BX, то площадь треугольника SEB будетъ равна площади треугольника XEB. Слѣдовательно, если къ площади $ASEX\mu A$ придать площадь треугольника EXB и изъ суммы вычесть площадь треугольника SEB, то останется площадь $ASBX\mu A$, равная площади $ASEX\mu A$, значитъ такъ относящаяся къ площади $ASCY\mu A$, какъ AE къ AC. Но площадь $ASBX\mu A$ приблизительно равна площади $ASBY\mu A$, площадь же $ASBY\mu A$ относится къ площади $ASCY\mu A$ какъ время описанія дуги AB къ времени описанія всей дуги AC, слѣдовательно отношеніе AE къ AC приблизительно равно отношенію временъ.

Поученіе.

Если провести $\mu\xi$ пересѣкающую AC въ δ и взять длину ξn такъ, чтобы было:

$$\xi n : \mu B = 27 MJ : 16 M\mu$$

и провести Bn, то эта прямая разсѣчетъ хорду въ отношеніи гораздо болѣе близкомъ къ отношенію временъ, нежели ранѣе. Точка n располагается за точкою ξ, когда точка B болѣе удалена отъ главной вершины параболы, нежели точка μ и по сю сторону, если точка B ближе къ главной вершинѣ параболы, нежели μ.

Лемма IX.

Длины $J\mu$, μM *и* $\frac{AJ \cdot JC}{4S\mu}$ *равны между собою.*

Ибо $4S\mu$ есть параметръ параболы принадлежащій вершинѣ μ [202]).

Лемма X.

Если прямую $S\mu$ *продолжить до точекъ* N *и* P *такъ, чтобы* μN *было равно* $\frac{1}{3}\mu J$ *и чтобы имѣла мѣсто пропорція.*

$$SP : SN = SN : S\mu,$$

то комета, двигаясь равномѣрно съ такою скоростью, которую она имѣетъ въ удаленіи SP *отъ солнца* S, *описала бы длину равную хордѣ* AC *въ такое же время, въ какое она описываетъ дугу* $A\mu C$,

Если бы комета съ тою скоростью, которою она обладаетъ въ точкѣ μ (фиг. 205), продолжала бы двигаться равномѣрно по прямой, касающейся параболы въ этой точкѣ, то площадь описываемая радіусомъ проводимымъ въ точку S, была бы равна параболической площади $ASC\mu$ описанной въ такое же время. Слѣдовательно, произведеніе отрѣзка касательной пройденнаго кометою на длину $S\mu$ относилось бы къ произведенію $AC \cdot SM$, какъ площадь $ASC\mu$ къ площади треугольника ASC, т.-е. какъ $SN : SM$. Поэтому AC относится къ длинѣ пройденной по касательной, какъ $S\mu : SN$. Но такъ какъ въ разстояніи SP скорость кометы (по сл. 6 предл. XVI кн. 1-ой) относится къ ея скорости въ разстояніи $S\mu$, какъ $\sqrt{S\mu} : \sqrt{SP}$, т.-е. какъ $S\mu : SN$, то длина, описываемая въ такое же время въ этою скоростью, будетъ относиться къ длинѣ, описанной по касательной, какъ $S\mu : SN$, значитъ, хорда AC и длина, описываемая съ этою новой скоростью, находятся въ одномъ и томъ же отношеніи къ длинѣ, описываемой по касательной, слѣдовательно онѣ равны между собою [203]).

---

[202]) Эта лемма есть повтореніе леммы XIII книги 1-ой, въ примѣчаніи къ которой и дано ея доказательство.

[203]) Лагранжъ въ своей Mécanique Analytique (7-me Section § 26) приведя такъ называемую формулу Эйлера или Ламберта, которой выражается связь между временемъ, двумя радіусами векторами и хордою при движеніи кометы по параболѣ, говоритъ: «Эта изящная формула была сперва дана Эйлеромъ въ седьмомъ томѣ *Miscellanea Berolinensis.* Ее можно вывести изъ леммы X третьей книги Ньютоновыхъ Началъ, выразивъ аналитически то построеніе, которымъ Ньютонъ опредѣляетъ скорость, двигаясь съ которою равномѣрно, точка прошла бы хорду въ такое же время, какъ комета проходитъ соотвѣтствующую дугу параболы. Для этого надо замѣтить, что для параболы полусумма радіусовъ векторовъ, идущихъ къ концамъ

Слѣдствіе. Слѣдовательно комета, двигаясь равномѣрно со скоростью, которою она обладаетъ въ разстояніи $S\mu + \frac{2}{3} J\mu$, описала бы хорду AC приблизительно въ то же самое время, какъ и дугу параболы $A\mu C$.

любой дуги всегда равна радіусу вектору, идущему къ вершинѣ этой дуги, сложенному съ ея стрѣлкою, т.-е. съ отрѣзкомъ діаметра, заключеннымъ между этою вершиною и серединою хорды; отсюда на основаніи леммы IX получается величина этого радіуса вектора, выраженнаго черезъ хорду и черезъ радіусы векторы концовъ дуги». Пользуясь этимъ указаніемъ Лагранжа и сдѣлавъ слѣдующія обозначенія:

$$SA = r_1; \; SC = r_2; \quad S\mu = r; \quad J\mu = x; \quad AC = \sigma$$
$$r_1 + r_2 = s$$

будемъ имѣть:

$$r + x = \frac{1}{2} s \text{ (по указанію Лагранжа)} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{16} \frac{\sigma^2}{r} \text{ (по леммѣ IX)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$3k\sqrt{2}\,(t_2 - t_1) = (3r + x) \frac{\sigma}{\sqrt{r}} \text{ (по леммѣ X)} \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

причемъ въ послѣдней формулѣ k есть нѣкоторая постоянная, о которой будетъ сказано ниже (пр. 205).

Изъ форм. (1) и (2) слѣдуетъ, что r и x опредѣляются какъ корни уравненія:

$$v^2 - \frac{1}{2} sv + \frac{1}{16} \sigma^2 = 0.$$

Если фокусъ лежитъ внѣ сегмента ограниченнаго разсматриваемою дугою параболы и ея хордою, то стрѣлка $x < r$ и надо брать:

$$\left. \begin{aligned} r = v_1 = \frac{1}{4}\left(s + \sqrt{s^2 - \sigma^2}\right) \\ x = v_2 = \frac{1}{4}\left(s - \sqrt{s^2 - \sigma^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

когда же фокусъ лежитъ внутри этого сегмента, то будетъ $x > r$ и надо брать:

$$\left. \begin{aligned} r = v_2 = \frac{1}{4}\left(s - \sqrt{s^2 - \sigma^2}\right) \\ x = v_1 = \frac{1}{4}\left(s + \sqrt{s^2 - \sigma^2}\right) \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Положимъ, что имѣетъ мѣсто первый случай, тогда будетъ по форм. (3)

$$3k\sqrt{2}\,(t_2 - t_1) = \left(s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \sigma^2}\right) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{r}}$$

но очевидно

$$8r = 2s + 2\sqrt{s^2 - \sigma^2} = \left(\sqrt{s + \sigma} + \sqrt{s - \sigma}\right)^2$$

Лемма XI.

Если бы комета, не обладающая никакимъ движенiемъ, была бы пущена съ разстоянiя SN или $S\mu + \frac{1}{3} J\mu$ свободно падать на солнце, причемъ на нее продолжала бы все время дѣйствовать одинаково та сила, которая на нее дѣйствовала въ началѣ, она прошла бы путь, равный $J\mu$ въ продолженiе половины того времени, въ теченiе коего двигаясь по орбитѣ она описываетъ дугу $A\mu C$.

Ибо, комета въ продолженiе такого времени, въ которое она описываетъ дугу параболы AC, двигаясь равномѣрно со скоростью соотвѣтствующей разстоянiю SP (по леммѣ X), проходитъ длину равную хордѣ AC, поэтому (по слѣд. 7 пред. XVI кн. 1), обращаясь подъ дѣйствiемъ силы своего тяготѣнiя по кругу, коего радiусъ SP, она описала бы дугу, длина коей относится къ длинѣ хорды AC, какъ $1 : \sqrt{2}$. Поэтому падая на солнце съ разстоянiя SP подъ дѣйствiемъ такой силы, съ какою она притягивается къ солнцу въ этомъ разстоянiи, комета описала бы въ половину того же промежутка времени (по слѣд. 9 предл. IV кн. 1-ой) путь, равный квадрату этой полухорды, раздѣленному на учетверенную высоту SP, т.-е. путь [204]),

---

слѣдовательно будетъ:

$$3k(t_2 - t_1) = \frac{2\left(s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \sigma^2}\right)\sigma}{\sqrt{s+\sigma} + \sqrt{s-\sigma}} = \left(s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - \sigma^2}\right)\left(\sqrt{s+\sigma} - \sqrt{s-\sigma}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(s+\sigma)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(s-\sigma)^{\frac{3}{2}}$$

т.-е.

$$6k(t_2 - t_1) = (s+\sigma)^{\frac{3}{2}} - (s-\sigma)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Совершенно также во второмъ случаѣ на основанiи форм. (5) получили бы:

$$6k(t_2 - t_1) = (s+\sigma)^{\frac{3}{2}} + (s-\sigma)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (6')$$

Это и суть формулы Эйлера. Равносильность этихъ формулъ леммѣ X Ньютона такимъ образомъ очевидна.

[204]) При разстоянiи $SP = r$ въ продолженiе времени t точка двигаясь равномѣрно по кругу со скоростью v_0, соотвѣтствующей этому разстоянiю прошла бы дугу $s = \frac{1}{\sqrt{2}} AC = v_0 t$, ускоренiе при движенiи по кругу $w = \frac{v_0^2}{r}$, поэтому проходимая въ продолженiе времени t при прямолинейномъ паденiи съ такимъ ускоренiемъ высота $h = \frac{1}{2} wt^2 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{r} t_2 =$

равный $\frac{AJ^2}{4SP}$. Но такъ какъ сила притяженія кометы къ солнцу съ разстояніи SN относится къ ея притяженію въ разстояніи SP, какъ $SP : S\mu$, то комета падая подъ дѣйствіемъ постоянной силы, равной силѣ притяженія ея въ разстояніи SN въ продолженіе того же времени пройдетъ путь, равный $\frac{AJ^2}{4S\mu}$, т.-е. путь, равный $J\mu$ или $M\mu$ (по леммѣ IX).

Предложеніе XLI. Задача XXI.

Опредѣлить по заданнымъ тремъ наблюденіямъ орбиту кометы, движущейся по параболѣ.

Задача эта весьма трудна, пытаясь ее рѣшить разными способами, я составилъ нѣкоторыя задачи, помѣщенная въ первой книгѣ, которыя предназначались для рѣшенія ея, но затѣмъ я нашелъ слѣдующее нѣсколько болѣе простое рѣшеніе.

Выбираютъ три наблюденія, слѣдующихъ одно за другимъ приблизительно черезъ равные промежутки времени, причемъ тотъ промежутокъ времени, въ который комета движется медленнѣе, надо брать немного больше другого, такъ чтобы разность промежутковъ относилась къ ихъ суммѣ, какъ эта сумма къ 60 днямъ или около того, иначе, чтобы точка E упадала приблизительно въ точку M и лучше уклонялась бы отъ нея къ точкѣ J, нежели къ A. Если такихъ наблюденій нѣтъ въ готовности, то надо найти новое мѣсто кометы по леммѣ шестой.

Пусть S (фиг. 206) представляетъ солнце T, t, τ три мѣста земли на орбитѣ ея, TA, tB, τC три наблюденныя долготы кометы, V промежутокъ времени между первымъ и вторымъ наблюденіемъ, W—между вторымъ и третьимъ наблюденіемъ, X длина, которую комета могла бы пройти за время между первымъ и третьимъ наблюденіемъ, двигаясь равномѣрно съ такою скоростью, какою она бы обладала, находясь отъ солнца въ разстояніи, равномъ среднему разстоянію земли, эта длина разсчитывается по слѣд. 3 предл. XL кн. III, наконецъ tV перпендикуляръ опущенный на хорду $T\tau$.

На прямой tB, соотвѣтствующей долготѣ при среднемъ наблюденіи, берется гдѣ-либо точка B и принимается за мѣсто проекціи кометы на плоскость эклиптики; отъ этой точки проводится по направленію къ солнцу прямая, по которой откладывается длина BE, находящаяся къ стрѣлкѣ tV въ отношеніи, равномъ отношенію произведенія $SB \,.\, St^2$ къ кубу гипотенузы прямоугольнаго треугольника, коего одна сторона есть SB, другая же есть тангенсъ широты кометы при второмъ наблюденіи и при

$= \frac{AC^2}{4r}$. Въ продолженіе же времени $\frac{t}{2}$ высота паденія будетъ:

$$\frac{1}{4}h = \frac{AC^2}{16r} = \frac{AJ^2}{4SP}.$$

радіусѣ tB. Черезъ точку E (по леммѣ VII) проводится прямая AEC такъ, чтобы ея отрѣзки AE и EC между точкою E и прямыми TA и τC относились бы другъ къ другу какъ V къ W, тогда A и C будутъ проекціями кометы на плоскость эклиптики при первомъ и третьемъ наблюденіяхъ, если только мѣсто B при второмъ ея наблюденіи было принято вѣрно.

Изъ середины J прямой AC возставь перпендикуляръ Ji. Черезъ точку B проведи прямую Bi параллельную AC. Проведи засѣчку Si пересѣкающую AC въ λ и дополни параллелограммъ $iJ\lambda\mu$.

Возьми $J\sigma = 3J\lambda$ и, проведя черезъ солнце S прямую σS, отложи по ней длину $\sigma\xi$, равную $3S\sigma + 3i\lambda$. Сотри точки A, E, C, J и изъ точки B по направленію къ точкѣ ξ проведи прямую, по которой отложи новую длину BE, относящуюся къ прежней какъ

$$BS^2 : \left(S\mu + \frac{1}{3} i\lambda\right)^2.$$

Черезъ вновь полученную точку E проведи опять прямую AEC по тому же условію, какъ и прежде, т.-е. чтобы было:

$$AE : EC = V : W.$$

Полученныя точки A и C представятъ мѣста кометы болѣе точно.

Въ точкѣ J серединѣ AC возставь къ ней перпендикуляръ JO, и въ точкахъ A и C перпендикуляры AM и CN, причемъ длины ихъ AM и CN соотвѣтственно равны тангенсамъ широты при первомъ и третьемъ наблюденіяхъ при радіусахъ TA и τC. Проведи MN пересѣкающую JO въ точкѣ O.

Построй затѣмъ прямоугольникъ $iJ\lambda\mu$, какъ и прежде.

На продолженіи JA возьми длину JD, равную $S\mu + \frac{2}{3} i\lambda$. Затѣмъ отъ MN въ сторону къ N отложи длину MP, которая находилась бы къ найденной выше длинѣ X въ отношеніи корня квадратнаго изъ средняго радіуса земной орбиты къ корню квадратному изъ разстоянія OD.

Если точка P упадетъ въ точку N, то A, B, C и будутъ тремя мѣстами кометы, черезъ которыя и можно бы провести проекцію ея орбиты на плоскость эклиптики.

Если же точка P не упадаетъ въ точку N, то по прямой AC надо отложить отъ точки C въ ту же сторону отъ прямой NC, какъ P отъ N длину $CG = NP$.

Такимъ же точно способомъ, по которому построены точки E, A, C, G, исходя изъ принятаго положенія точки B, строятся, принявъ еще два какихъ-либо другихъ ея положенія b и β новыя точки e, a, c, g и $\varepsilon, \alpha, \varkappa, \gamma$. Затѣмъ черезъ G, g, γ проводится дуга круга $Gg\gamma$, пересѣкающая прямую τC въ точкѣ Z, эта точка Z и будетъ искомою проекціей мѣста кометы при третьемъ наблюденіи на плоскость эклиптики.

Если по прямымъ AC, ac и $\alpha\varkappa$ отложить длины AF, af, $\alpha\varphi$, соотвѣтственно равныя CG, cg, $\varkappa\gamma$ и черезъ точки F, f, φ провести дугу круга $Ff\varphi$, пересѣкающую прямую AT въ точкѣ Y, то эта точка Y будетъ проекціею мѣста кометы на плоскость эклиптики при первомъ наблюденіи.

Въ точкахъ Y и Z возставляются перпендикуляры, равные тангенсамъ широтъ кометы при радіусахъ TY и τZ, тогда получатся два мѣста кометы, принадлежащія истинной орбитѣ ея. Затѣмъ, по предл. XIX кн. 1, черезъ эти двѣ точки проводится парабола, имѣющая своимъ фокусомъ точку S. Эта парабола и будетъ искомою орбитою.

Доказательство этого построенія слѣдуетъ изъ леммъ: въ самомъ дѣлѣ прямая AC разсѣкается по леммѣ VII точкою E въ отношеніи временъ, какъ то требуется леммою VIII. Длина BE по леммѣ XI составитъ часть прямой BS или $B\xi$, заключенную на плоскости эклиптики между дугою ABC и хордою AEC, и MP (по слѣд. лем. X) будетъ хордою дуги, описываемой кометой въ ея движеніи по своей орбитѣ между первымъ и третьимъ наблюденіями, поэтому эта длина должна бы равняться MN, если бы точка B была бы дѣйствительно проекціей мѣста кометы на плоскость эклиптики при второмъ наблюденіи [205]).

---

[205]) Какъ уже упомянуто выше (прим. 201), подробный разборъ способа Ньютона для опредѣленія параболической орбиты кометы помѣщенъ въ моей статьѣ: «Бесѣды о способахъ опредѣленія орбитъ кометъ и планетъ по малому числу наблюденій» помѣщенной въ 1-омъ выпускѣ «Извѣстій Николаевской Морской Академіи»; не приводя этого разбора полностью, ограничиваюсь тою его частью, которая относится къ этому предложенію, требующему поясненій какъ относительно построенія, такъ и доказательства.

Условимся обозначать буквами со значками точки плоскости орбиты, коихъ проекціи на плоскости эклиптики обозначены тѣми же буквами безъ значковъ.

Дадимъ сперва нѣкоторыя поясненія относящіяся къ построенію.

Длина X, разсчитываемая по слѣд. 3 предл. XL, 3-ей книги, находится по формулѣ:

$$X = \frac{2\pi}{365{,}256\ldots}\, a \cdot \sqrt{2}(t_3 - t_1)$$

гдѣ a есть длина большой полуоси земной орбиты. Постоянный множитель $\frac{2\pi}{365{,}256\ldots}$ Ньютонъ даетъ равнымъ 0,01720212. Гаусъ, принимая массу земли $m = \frac{1}{354710}$ и звѣздный годъ = 365,2563835 среднихъ солнечныхъ сутокъ, получаетъ для сказанной постоянной величину:

$$k = \frac{2\pi}{365{,}256\ldots\sqrt{1+m}} = 0{,}01720209895$$

т.-е. число весьма близкое къ Ньютонову.

Длина BE есть проекція стрѣлки $B'E'$, представляющей какъ бы путь, пройденный кометою по направленію къ солнцу равномѣрно уско-

Точки B, b, β не слѣдуетъ брать какъ-нибудь, но по близости истиннаго мѣста проекціи кометы. Если приблизительно извѣстенъ уголъ AQt,

---

реннымъ движеніемъ; сравнивая эту стрѣлку съ таковою tV для земли, будемъ имѣть пропорцію:

$$B'E' : tV = SE^2 : B'S^2$$

ибо ускоренія обратно пропорціональны квадратамъ разстояній кометы и земли до солнца. Чтобы получить BE, надо спроектировать $B'E'$ на плоскость эклиптики, для чего на $B'E'$ умножить на отношеніе $SB : SB'$, такимъ образомъ получится:

$$BE = tV \cdot \frac{SE^2 . SB}{SB'^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Построеніе поправочнаго параллелограмма $iJ\lambda\mu$ является самымъ существеннымъ въ методѣ и такъ какъ даваемое въ текстѣ *приближенное*, то оно требуетъ сравненія съ *точнымъ*, чтобы видѣть степень приближенія.

Вообразимъ сперва, что построеніе дѣлается въ плоскости самой орбиты, а затѣмъ проектируется на плоскость эклиптики. Пусть (чер. 207) S есть солнце—фокусъ параболы, AC хорда, HK параллельная ей касательная въ вершинѣ сегмента. Чтобы построить эту вершину μ, въ силу леммы IX надо найти на касательной такую точку μ, соединивъ которую съ фокусомъ S и съ серединою хорды J получили бы *равныя* длины: $J\mu = \mu M$; для этого стоитъ только по перпендикуляру къ хордѣ и касательной, проведенному черезъ точку J, отложить длину $iJ_1 = iJ$ и полученную точку J_1 соединить съ точкою S; въ пересѣченіи прямой J_1S съ касательною HK и получится искомая точка μ.

Но касательной къ вершинѣ не дано, а имѣется лишь нѣкоторая точка B, лежащая на параболѣ и близкая къ вершинѣ μ сегмента.

По леммѣ IX уравненіе искомой параболы, отнесенной къ касательной къ вершинѣ HK и къ сопряженному съ нею діаметру μJ есть:

$$Y^2 = 2p_1 X$$

причемъ

$$2p_1 = 4S\mu.$$

Для точки B абсцисса $X = BD$, ордината $Y = \mu D$, поэтому

$$BD = \frac{\mu D^2}{4S\mu}.$$

Съ другой стороны:

$$J\mu = \frac{AJ^2}{4S\mu}$$

слѣдовательно:

$$\frac{BD}{J\mu} = \left(\frac{\mu D}{AJ}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Обозначимъ для краткости черезъ τ_1 и τ_2 промежутки $t_2 - t_1$ и $t_3 - t_2$. Длина μD соотвѣтствуетъ пути, проходимому кометою въ продолженіе времени

$$\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) - \tau_2 = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2)$$

подъ которымъ проекція орбиты на плоскость эклиптики пересѣкаетъ прямую tB, то надо провести подъ этимъ угломъ прямую AC такъ, чтобы было:

$$AC : \frac{4}{3} T\tau = \sqrt{SQ} : \sqrt{St}$$

длина же AJ—времени $\frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$, слѣдовательно приближенно будетъ:

$$BD = \left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}\right)^2 . J\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Если BD настолько мало по сравненію съ JM, что можетъ быть пренебрежено, то прямую BG можно будетъ принять за касательную, и по ней построить вершину параболы.

Во всякомъ случаѣ можно принять это въ первомъ приближеніи, послѣ чего снять отъ полученнаго приближеннаго мѣста вершины разстояніе до точки B, разсчитать исправленное значеніе BD по форм. (2) нанести точку D, провести исправленное положеніе касательной, на которой и найдется исправленное мѣсто вершины μ_1.

Получивъ это мѣсто по леммѣ XI, расчисляемъ длину $J\mu$ или μM по формулѣ

$$J\mu = \mu M = \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right)^2 . \frac{1}{SN^2}$$

причемъ

$$k = 0{,}0172020 \ldots \quad \text{и} \quad SV = S\mu_1 + \frac{1}{3} J\mu_1$$

и получаемъ исправленную величину стрѣлки $J\mu$, пользуясь которой, строимъ исправленное мѣсто касательной и т. д., пока два послѣдовательныя приближенія не будутъ совпадать.

Но Ньютонъ выполняетъ построеніе не въ плоскости орбиты, а въ проекціи на плоскость эклиптики.

Для проекціи орбиты, которая очевидно также будетъ параболою, *солнце S уже не будетъ фокусомъ*, поэтому проекціи длинъ $J\mu$ и μM между собою не равны и выше приведеннаго *точнаго* построенія вершины сегмента параболы по данной его хордѣ и касательной къ вершинѣ выполнить нельзя, ибо мѣсто фокуса неизвѣстно.

Чтобы обойти это затрудненіе Ньютонъ пользуется тѣмъ обстоятельствомъ, что величина μi мала по сравненію съ $S\mu$ и значитъ *прямыя $S\mu$ и Si можно принять за параллельныя*, что онъ и дѣлаетъ, откуда и слѣдуетъ даваемое имъ построеніе точки μ, т. е. проекціи вершины сегмента параболы. Эта точка очевидно есть вмѣстѣ съ тѣмъ и вершина сегмента проектированной орбиты.

Для полученія второго приближенія слѣдовало бы разсчитать длину μM проекціи стрѣлки и эту исправленную длину отложить по направленію прямой $S\mu$ отъ точки M, получили бы исправленное положеніе касательной.

Но Ньютонъ величиною BD, описывая свое построеніе, пренебрегаетъ, по разборѣ же его примѣра въ указанной выше моей статьѣ я убѣдился по приведеннымъ имъ числамъ, что эта поправка была имъ введена. Пренебрегая же длиною BD Ньютонъ прямо исправляетъ положеніе точки E, дѣлящей хорду въ отношеніи промежутковъ, причемъ $B\xi$ и $S\mu$ считаетъ параллельными, и слѣдовательно длину BE равной длинѣ μM, откуда и слѣдуетъ его построеніе.

Но лемма XI даетъ *длину $J\mu$, которая равна $M\mu$ въ плоскости ор-*

проведя затѣмъ прямую SEB, коей отрѣзокъ EB былъ бы равенъ Vt, получимъ то мѣсто точки B, которое надо принять за исходное.

Послѣ того какъ прямая AC будетъ стерта и затѣмъ вторично построена по указанному выше и будетъ сверхъ того найдена длина MP,

---

биты, но не въ проекціи и уголъ между $J\mu$ и μM конечный, поэтому отношеніе проекцій этихъ длинъ можетъ отличаться на конечную величину отъ 1, въ каковомъ случаѣ упрощенное построеніе Ньютона не будетъ обладать любою степенью точности, а лишь ограниченной.

Очевидно, что обративъ вниманіе на точное построеніе, которое надлежало бы выполнить въ плоскости орбиты, нетрудно ввести въ описанное Ньютономъ надлежащія поправки, въ тѣхъ случаяхъ, когда ими пренебрегать нельзя, что и сдѣлано въ рядѣ примѣровъ данныхъ въ моей статьѣ.

Указанное въ леммѣ X разстояніе SP, служащее для разсчета длины хорды $A'C'$, выражается формулою:

$$SP = \left(S\mu' + \frac{1}{3} M'\mu'\right)^2 : S\mu'$$

обозначая буквами со значками точки, лежащія въ плоскости орбиты, проекціи коихъ обозначены тѣми же буквами безъ значковъ:

Слѣдовательно будетъ:

$$S\mu'^2 = S\mu^2 + JO^2$$

принимая приближенно, что возвышеніе точекъ μ и J надъ плоскостью эклиптики одинаковы. Затѣмъ

$$i'\lambda' = i\lambda \cdot \frac{S\mu'}{S\mu}$$

подставляя получимъ

$$SP = S\mu'\left[1 + \frac{1}{3}\,\frac{i\lambda}{S\mu}\right]^2 = S\mu' + \frac{2}{3}\,i\lambda\,\frac{S\mu'}{S\mu} + \ldots = S\mu' + \frac{2}{3}\,i\lambda + \ldots =$$
$$= \sqrt{\left(S\mu + \frac{2}{3}\,i\lambda\right)^2 + JO^2} = OD$$

причемъ пренебрегается величинами $\frac{i\lambda^2}{S\mu}$ и ей подобными.

Точки F, f, φ суть не что иное какъ «ложныя положенія» точки Z. Ясно, что эту часть чертежа можно выполнять и отдѣльно въ произвольномъ масштабѣ, откладывая лишь при точкахъ A, a, α длины, пропорціональныя AF, af. $\alpha\varphi$, такъ чтобы проведя черезъ точки F, f, φ, «согласную кривую» (дугу круга по Ньютону) получить отчетливое пересѣченіе съ прямою T_1A или, вообще, съ принятою условно за изображеніе оси $Aa\alpha$, служащей для построенія «ложныхъ положеній». Къ подобному графическому рѣшенію Ньютонъ прибѣгаетъ и въ сл. 7-омъ предл. IV, 2-ой книги.

Послѣ того, какъ получены точки A и C — проекціи на плоскость эклиптики мѣстъ кометы при первомъ и третьемъ наблюденіи дальнѣйшее опредѣленіе элементовъ построеніемъ настолько просто, что Ньютонъ не считаетъ нужнымъ о немъ даже упоминать.

Въ самомъ дѣлѣ, отложивъ по перпендикулярамъ прямой YZ въ точкахъ Y и Z длины:

$$A'Z = TY \cdot \operatorname{tg}\beta_1$$

и

$$C'Y = \tau Z \cdot \operatorname{tg}\beta_3$$

то на прямой tB точку b надо взять такъ, чтобы было:

$$\frac{Hb}{HB} = \frac{MP}{MN} \cdot \sqrt{\frac{SB}{Sb}},$$

причемъ точка H есть пересѣченіе прямыхъ TA и τC.

По такому же способу надо найти и мѣсто третьей точки β, если бы потребовалось повторить построеніе и въ третій разъ, но слѣдуя этому правилу, достаточно сдѣлать его лишь два раза, ибо, когда разстояніе Bb весьма мало, то послѣ того какъ точки F, f, G и g найдены, достаточно провести прямыя Ff и Gg, которыя и пересѣкутъ TA и τC въ искомыхъ точкахъ Y и Z.

Примѣръ.

Предлагается комета 1680 года. Движеніе ея, наблюденное *Флэмстидомъ*, вычисленное по этимъ наблюденіямъ, а затѣмъ на основаніи тѣхъ же наблюденій исправленное *Галлеемъ*, показано въ слѣдующей таблицѣ.

Годъ, мѣсяцъ и число.	Истинное время.	Среднее время.	Долгота солнца.	Долгота кометы.	Широта кометы.
1680 дек. 12	4ч46 м	4ч46м 0с	271°51′ 23″	276°32′ 30″	8°28′ 0″ N
21	6 32½	6 36 59	281 6 44	305 8 12	21 42 13
24	6 12	6 17 52	284 9 26	318 49 23	25 23 5
26	5 14	5 20 44	286 9 22	328 24 13	27 0 52
29	7 55	8 3 2	289 19 43	343 10 41	28 9 58
30	8 2	8 10 26	290 21 9	347 38 20	28 11 53
1681 янв. 5	5 51	6 1 38	296 22 18	8 48 53	26 15 7
9	6 49	7 0 53	300 29 2	18 44 4	24 11 56
10	5 54	6 6 10	301 27 43	20 40 50	23 43 52
13	6 56	7 8 55	304 33 20	25 59 48	22 17 28
25	7 44	7 58 42	316 45 36	39 35 0	17 56 30
30	8 7	8 21 53	321 49 58	43 19 51	16 42 18
февр. 2	6 20	6 34 51	324 46 59	45 13 53	16 4 1
5	6 50	7 4 41	327 49 51	46 59 6	15 27 3

гдѣ β_1 и β_3 геоцентрическія широты кометы при первомъ и третьемъ наблюденіи, получимъ совмѣщенныя положенія мѣстъ кометы A' и C' на плоскости эклиптики.

Продолживъ прямую $A'C'$ до пересѣченія въ точкѣ Ω съ ея проек-

Къ этимъ я присовокупляю еще нѣсколько наблюденій изъ своихъ собственныхъ.

	Истинное время.	Долгота кометы.	Широта кометы.
1681 февр. 25. . . . . . ,	8ч30м	56°18′ 35″	12°46′ 46″ N
27.	8 15	57 4 30	12 36 12
март. 1.	11 0	57 52 42	12 23 40
2.	8 0	58 12 48	12 19 38
5.	11 30	59 18 0	12 3 16
7.	9 30	60 4 0	11 57 0
9.	8 30	60 43 4	11 45 52

Эти наблюденія произведены семифутовымъ телескопомъ и нитянымъ микрометромъ, помѣщеннымъ въ фокусѣ телескопа. Этими инструментами я опредѣлялъ какъ относительныя положенія неподвижныхъ звѣздъ, такъ и кометы.

Пусть A (фиг. 208) представляетъ звѣзду четвертой величины къ лѣвой пяткѣ Персея (Кат. *Bayer* o), B слѣдующую звѣзду въ его лѣвой пяткѣ (*Bayer* ξ) и C звѣзду шестой величины (*Bayer* n) на ладыжкѣ той же ноги; D, E, F, G, H, J, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ, другія меньшія звѣзды въ той же ногѣ; p, P, Q, R, S, T, V, X мѣста кометы, приведенныя выше.

Принимая разстояніе $AB = 80\frac{7}{12}$ части, было:

$$AC = 52\frac{1}{4};\quad BC = 58\frac{5}{6};\quad AD = 57\frac{5}{12};\quad BD = 82\frac{6}{11}$$
$$CD = 23\frac{2}{3};\quad AE = 29\frac{4}{7};\quad CE = 57\frac{1}{2};\quad DE = 49\frac{11}{12}$$
$$AJ = 27\frac{7}{12};\quad BJ = 52\frac{1}{6};\quad CJ = 36\frac{7}{12};\quad DJ = 53\frac{5}{11}$$
$$AK = 38\frac{2}{3};\quad BK = 43;\quad CK = 31\frac{5}{9};\quad FK = 29$$
$$FB = 23;\quad FC = 36\frac{1}{4};\quad AH = 18\frac{6}{7};\quad DH = 50\frac{7}{8}$$
$$BN = 46\frac{5}{12};\quad CN = 31\frac{1}{3};\quad BL = 45\frac{5}{12};\quad NL = 31\frac{5}{7}$$

ціей YZ, получимъ точку, принадлежащую линіи узловъ; соединивъ эту точку съ S получаемъ линію узловъ, а значитъ и долготу восходящаго узла.

Вообразивъ, что плоскость истинной орбиты совмѣщена съ плоскостью эклиптики поворотомъ около линіи, получимъ точки A_1 и C_1, совмѣщенныя мѣста кометы, черезъ которыя если провести параболу, имѣющую свой фокусъ въ S, то получится искомая орбита въ совмѣщенномъ съ плоскостью эклиптики положеніи.

OH относилась къ HJ какъ 7 къ 6, и по продолженіи проходила между звѣздами D и E, такъ что разстояніе звѣзды D отъ этой прямой равнялось $\frac{1}{6}CD$.

LM относилась къ LN, какъ 2 къ 9, и по продолженіи проходила черезъ звѣзду H. По этимъ даннымъ были опредѣлены относительныя положенія неподвижныхъ звѣздъ.

Затѣмъ *Поундъ* вновь пронаблюдалъ относительныя положенія этихъ звѣздъ и свелъ ихъ долготы и широты въ слѣдующую таблицу.

Звѣзда.	Долгота.	Широта N.	Звѣзда.	Долгота.	Широта N.
A	56°41′50″	12° 8′36″	K	57°42′ 7″	11°53′26″
B	58 40 23	11 17 54	L	59 33 34	12 7 48
C	57 58 30	12 40 25	M	59 18 54	12 7 20
E	56 27 17	12 52 7	N	58 48 29	12 31 9
F	58 28 37	11 52 22	Z	59 44 48	11 57 13
G	56 56 8	12 4 58	α	59 52 3	11 55 48
H	57 11 45	12 2 1	β	60 8 23	11 48 56
J	57 25 2	11 53 11	γ	60 40 10	11 55 18
			δ	61 3 20	11 30 42

Положенія кометы относительно этихъ неподвижныхъ звѣздъ мною наблюденныя были слѣдующія:

Въ пятницу 25 февраля ст. ст. $8\frac{1}{2}$ ч. пополудни разстоянія кометы находящейся въ p были: отъ звѣзды E менѣе $\frac{3}{13}AE$ и болѣе $\frac{1}{5}AE$, поэтому приблизительно равно $\frac{3}{14}AE$, уголъ ApE былъ немногимъ больше прямого, но почти прямой. Затѣмъ, если бы опустить на pE перпендикуляръ изъ A, то разстояніе кометы до этого перпендикуляра было $\frac{1}{5}pE$.

Въ ту же ночь въ $9\frac{1}{2}$ часовъ разстоянія кометы, бывшей въ P до звѣзды E, было больше $\frac{1}{4\frac{1}{2}}AE$ и меньше $\frac{1}{5\frac{1}{4}}AE$, слѣдовательно, равно $\frac{1}{4\frac{7}{8}}AE$ или $\frac{8}{39}AE$.

Отъ перпендикуляра же, опущеннаго изъ мѣста звѣзды A на прямую PE, разстояніе кометы было $\frac{4}{5}PE$.

Въ *воскресенье* февр. 27 $8\frac{1}{4}$ ч. пополудни разстояніе кометы, находившейся въ Q до звѣзды O было равно разстоянію звѣздъ OH, и прямая QO по продолженіи проходила между звѣздами K и B. Положенія этой прямой болѣе точно я не могъ опредѣлить по случаю начавшейся облачности.

Во *вторникъ* 1-го марта 11 ч. пополудни комета, находясь въ R, располагалась въ точности на прямой CK. Отрѣзокъ CR прямой CRK былъ

немного меньше $\frac{1}{3}CK$ и немного больше $\frac{1}{3}CK + \frac{1}{8}CR$, слѣдовательно равенъ $\frac{1}{3}CK + \frac{1}{16}CR$, т.-е. $\frac{16}{45}CK$.

Въ *среду* 2-го марта 8 ч. пополудни разстояніе кометы, бывшей въ S до звѣзды C, было приблизительно $\frac{4}{9}FC$. Разстояніе звѣзды F отъ продолженія прямой CS было $\frac{1}{24}FC$, разстояніе же звѣзды B отъ той же прямой было въ пять разъ болѣе, нежели разстояніе звѣзды F. Вмѣстѣ съ тѣмъ прямая NS по продолженію проходила между звѣздами H и J въ пять или шесть разъ ближе къ звѣздѣ H, нежели къ звѣздѣ J.

Въ *субботу* 5-го марта $11\frac{1}{2}$ ч. пополудни, когда комета находилась въ T, прямая MT равнялась $\frac{1}{2}ML$ и прямая LT по продолженіи проходила между B и F въ четыре или въ пять разъ ближе къ F, нежели къ B, отсѣкая отъ BF пятую или шестую ея часть къ F. Прямая MT по продолженіи проходила внѣ BF, со стороны B, въ четыре раза ближе къ B, нежели къ F. Звѣзда M была весьма малая, едва видимая въ телескопъ, и звѣзда L почти не болѣе восьмой величины.

Въ *понедѣльникъ* 7-го марта $9\frac{1}{2}$ ч. пополудни, когда комета находилась въ V прямая $V\alpha$ по продолженіи проходила между B и F, отсѣкая отъ BF въ сторону къ F длину въ $\frac{1}{10}BF$ и отношеніе ея къ $V\beta$ было какъ 5 къ 4. Разстояніе кометы отъ прямой $\alpha\beta$ было равно $\frac{1}{2}V\beta$.

Въ *среду* 9-го марта $8\frac{1}{2}$ ч. пополудни, когда комета находилась въ X, прямая γX равнялась $\frac{1}{4}\gamma\delta$ и перпендикуляръ, опущенный отъ звѣзды δ на прямую γX равнялся $\frac{1}{2}\gamma\delta$.

Въ ту же ночь въ 12 часовъ, когда комета находилась въ Y, прямая γY равнялась $\frac{1}{3}\gamma\delta$ или немного менѣе, положимъ $\frac{5}{16}\gamma\delta$ и перпендикуляръ, опущенный изъ звѣзды δ на прямую γY, равнялся $\frac{1}{6}\gamma\delta$ или $\frac{1}{7}\gamma\delta$. Но въ виду близости кометы къ горизонту я едва могъ ее различать и не могъ опредѣлить ея мѣста настолько ясно, какъ въ предыдущихъ случаяхъ.

По наблюденіямъ такого рода я построеніемъ фигуръ и разсчетами вывелъ долготы и широты кометы, *Поундъ* же по исправленнымъ мѣстамъ неподвижныхъ звѣздъ исправилъ мѣста кометы. Эти исправленныя мѣста и приведены выше.

Я пользовался микрометромъ, устроеннымъ довольно грубо, тѣмъ не менѣе погрѣшности въ долготахъ и въ широтахъ (посколько онѣ выводятся изъ моихъ наблюденій) едва ли превышаютъ одну минуту. Комета (по моимъ наблюденіямъ) къ концу своего движенія начала замѣтно уклоняться къ сѣверу отъ параллели, по которой она слѣдовала въ концѣ *февраля* мѣсяца.

Чтобы опредѣлить орбиту кометы я избралъ изъ вышеприведенныхъ наблюденій три, произведенныхъ *Флемстидомъ* 21-го декабря, 5-го января и 25-го января. По нимъ я нашелъ:

$$St = 9842{,}1 \quad \text{и} \quad Vt = 455$$

причемъ большая полуось земной орбиты принята равной 10000.

Принявъ затѣмъ для перваго положенія точки B:

$$tB = 5657$$

я нашелъ:

$SB = 9747$; и первоначально: $BE = 412$, $S\mu = 9503$; $i\gamma = 413$.

Затѣмъ вторично:

$$BE = 421;\quad OD = 10186;\quad X = 8528{,}4;\quad MP = 8450$$
$$MN = 8475;\quad NP = 25.$$

Для второго положенія я принялъ $tb = 5640$ и получилъ разстоянія:

$$TY = 4775 \text{ и } \tau Z = 11322$$

по которымъ опредѣливъ орбиту я нашелъ, что:

Долгота нисходящаго узла.	91°53′
» восходящаго »	271°53′
Наклонность.	61°20′$\frac{1}{3}$
Разстояніе перигелія до узла. . . .	8°38′
Долгота перигелія	267°43′
Широта перигелія.	7°34′
Параметръ	236,8

Площадь, описываемая въ сутки радіусомъ проведеннымъ къ солнцу 93585, принимая, что квадратъ большой полуоси земной орбиты равенъ 100000000. Комета движется по этой орбитѣ по порядку знаковъ и *декабря 8-го 0 ч. 4 м. пополудни* проходила черезъ вершину своей орбиты, т.-е. черезъ перигелій.

Все это я опредѣлилъ графически, пользуясь раздѣленнымъ на равныя части масштабомъ и таблицею натуральныхъ синусовъ для нанесенія угловъ по ихъ хордамъ. Чертежъ я построилъ достаточныхъ размѣровъ, большая полуось земной орбиты (10000 частей) изображалась на немъ длиною въ 16$\frac{1}{3}$ англійскихъ дюймовъ.

Затѣмъ, чтобы убѣдиться дѣйствительно ли комета движется по найденной такимъ образомъ орбитѣ, я вывелъ частью вычисленіемъ, частью чертежомъ мѣста кометы для нѣкоторыхъ изъ моментовъ наблюденій, какъ показано въ слѣдующей таблицѣ.

	Разстояніе ком. до солнца.	Вычисленная долгота.	Вычисленная широта.	Наблюденная долгота.	Наблюденная широта.	Разность долготъ.	Разность широтъ.
Дек. 12	2792	276°32′	8°18′$\frac{1}{2}$	276°31′$\frac{1}{3}$	8°26′	+1′	— 7′$\frac{1}{2}$
29	8403	343 13$\frac{2}{3}$	28 0	343 11$\frac{3}{4}$	28 10$\frac{1}{12}$	+2	—10$\frac{1}{12}$
Февр. 5	16669	47 0	15 29$\frac{2}{3}$	46 59$\frac{7}{8}$	15 27$\frac{2}{5}$	+0	+ 2$\frac{1}{4}$
Март. 5	21737	59 19$\frac{3}{4}$	12 4	59 20$\frac{6}{7}$	12 3$\frac{1}{2}$	—1	+$\frac{1}{2}$

Послѣ того *Галлей* опредѣлилъ эту орбиту при помощи вычисленій болѣе точно, нежели это было возможно выполнить чертежомъ и получилъ также, что:

Долгота узловъ . . . 91°53′ и 271°53′
Наклонность . . . . 61°20′⅓

Время прохожденія черезъ перигелій декабря 8-го 0 ч. 4 м. Разстояніе же перигелія отъ узла, считаемое въ плоскости орбиты кометы оказалось 9°20′ и параметръ параболы 2430, принимая большую полуось земной орбиты за 100000. По этимъ даннымъ, примѣнивъ также точный разсчетъ, онъ вычислилъ мѣста кометы въ моменты наблюденій показанные въ слѣдующей таблицѣ:

Среднее время.	Разстояніе кометы отъ солнца.	Вычисленная долгота.	Вычисленная широта.	Погрѣшности	
				Долгота.	Широта.
Дек. 12с 4ч46м	28028	276°29′25″	8°26′ 0″N	—3′ 5″	—2′ 0″
11 6 37	61076	305 6 30	21 43 20	—1 42	+1 7
24 6 18	70008	318 48 20	25 22 40	—1 3	—0 25
26 5 21	75576	328 22 45	27 1 36	—1 28	+0 44
29 8 3	84021	343 12 40	28 10 10	+1 59	+0 12
30 8 10	86661	347 40 5	28 11 20	+1 45	—0 33
Янв. 5 6 1½	101440	8 49 49	26 15 15	+0 56	+0 8
9 7 0	110959	18 44 36	24 12 54	+0 32	+0 58
10 6 6	113162	20 41 0	23 44 10	+0 10	+0 18
13 7 9	120000	26 0 21	22 17 30	+0 33	+0 2
25 7 59	145370	39 33 40	13 57 55	—1 20	+1 25
30 8 22	155303	43 17 41	16 42 7	—2 10	--0 11
Февр. 2 6 35	160951	45 11 11	16 4 15	—2 42	+0 14
5 7 4½	166686	46 58 25	15 29 13	—0 41	+2 10
25 8 40	202570	56 15 46	12 48 0	—2 49	+1 14
Март. 5 11 39	216205	59 18 35	12 5 40	+0 35	+2 24

Эта комета появилась въ ноябрѣ мѣсяцѣ 1680 г. и была наблюдена въ *Кобургѣ* въ *Саксоніи* *г. Готфридомъ Киршемъ* 4-го, 6-го и 11-го того мѣсяца по старому стилю. По положеніямъ кометы относительно ближайшихъ неподвижныхъ звѣздъ, наблюденныхъ достаточно точно телескопомъ

частью 2-хъ футовымъ, частью десятифутовымъ, принимая разность долготъ Кобурга и Лондона въ 11° и пользуясь мѣстами звѣздъ, опредѣленными *Поундомъ*, *Галлей* опредѣлилъ мѣста кометы.

Ноября 3 д. 17 ч. 2 м. истиннаго *лондонскаго* времени, долгота кометы $149^\circ 51'$, широта $1^\circ 17' 45'' N$.

Ноября 5 д. 15 ч. 58 м.—долгота $153^\circ 23'$, широта $1^\circ 6' N$.

Ноября 10 д. 16 ч. 21 м. комета находилась въ равныхъ разстояніяхъ отъ звѣздъ σ Leonis и τ Leonis (по кат. *Bayer*), но при этомъ лежала не вполнѣ на прямой ихъ соединяющей, а немного отъ нея отстояла. По каталогу звѣздъ Флемстида положеніе этихъ звѣздъ таково:

σ Leonis . . . . $164^\circ 15'$ и широта . . . . $1^\circ 41' N$
τ » . . . . $167^\circ 3'\frac{1}{2}$ $9^\circ 34' S$

Положеніе средней между ними точки есть:

Долгота . . . . $165^\circ 39'\frac{1}{4}$ и широта . . . . $0^\circ 33'\frac{1}{2} N$

Если разстояніе кометы отъ упомянутой прямой было $10'$ или $12'$, то разность долготъ кометы и сказанной средней точки составляла около $7'$ и разность широтъ около $7'\frac{1}{2}$, поэтому мѣсто кометы находилось приблизительно:

Долгота . . . . $165^\circ 33'$ и широта . . . . $0^\circ 26' N$.

Первое наблюденіе по положенію занимаемому кометою, относительно нѣкоторыхъ малыхъ неподвижныхъ звѣздъ, было вполнѣ достаточной точности. Второе также было достаточно точно. Въ третьемъ, которое было менѣе точно, могла остаться погрѣшность въ $6'$ или $7'$ или немногимъ болѣе. Вычисленное мѣсто кометы при движеніи ея по указанной выше орбитѣ въ моментъ перваго наблюденія, которое точнѣе прочихъ было:

Долгота . . . $149^\circ 30' 22''$ и широта . . . $1^\circ 25' 7''$
Разстояніе отъ солнца . . . 115546.

Галлей замѣтилъ, что большая комета появлялась четыре раза черезъ промежутки по 575 лѣтъ, а именно: въ *сентябрѣ* мѣсяцѣ послѣ убійства *Юлія Цезаря*, въ 531 году послѣ Р. Хр. въ консульство *Лампадія* и *Ореста*, въ 1106 году въ *февралѣ* мѣсяцѣ и въ концѣ 1680 года. Эти кометы обладали длиннымъ и яркимъ хвостомъ (кромѣ той, которая была послѣ смерти *Цезаря*, у которой хвостъ вслѣдствіе неудачнаго расположенія земли представлялся меньшимъ); тогда Галлей разыскалъ такую эллиптическую орбиту, большая ось которой равнялась 1382957, принимая среднее разстояніе земли до солнца за 10000, ибо по такой орбитѣ комета можетъ обращаться въ 575 лѣтъ,—оказалось:

Долгота восходящаго узла . . . . $92^\circ 2'$
Наклонность . . . . $61^\circ 6' 48''$
Долгота перигелія . . . . $262^\circ 44' 25''$

Время прохожденія черезъ перигелій декаб. . 7 д. 23 ч. 9 м.
Разстояніе перигелія до узла (по плоск. орбитѣ) 9°17′35″
Малая ось 18481,2

Среднее время.	Наблюденная долгота.	Наблюденная широта.	Вычисленная долгота.	Вычисленная широта.	Погрѣшности Долгота.	Погрѣшности Широта.
Нояб. 3д16ч47м . . .	149°51′ 0″	1°17′45′	149°51′ 22″	1°17′32″ *N*	+ 0′22″	— 0′13″
5 15 37 . . .	153 23 0	1 6 0	153 24 32	1 6 3	+ 1 32	+ 0 9
10 16 18 . . .	165 32 0	0 27 0	165 33 2	0 25 7	+ 1 2	— 1 53
16 17 0 . . .			188 16 45	0 53 7 *S*		
18 21 34 . . .			198 52 15	1 26 54		
20 17 0 . . .			208 10 36	1 53 35		
23 17 5 . . .			223 22 42	2 29 0		
Дек. 12 4 46 . . .	276 32 30	8 28 0	276 31 20	8 29 6 *N*	— 1 10	+ 1 6
21 6 37 . . .	305 8 12	21 42 13	305 6 14	21 44 42	— 1 58	+ 2 29
24 6 18 . . .	318 49 23	25 23 5	318 47 30	25 23 35	— 1 53	+ 0 30
26 5 21 . . .	328 24 13	27 0 52	328 21 42	27 2 1	— 2 31	+ 1 9
29 8 3 . . .	343 10 41	28 9 58	343 11 14	28 10 38	+ 0 33	+ 0 40
30 8 10 . . .	347 38 20	28 11 53	347 38 27	28 11 37	+ 0 7	— 0 16
Янв. 5 6 1½ . . .	8 48 53	26 15 7	8 48 51	26 14 57	— 0 2	— 0 10
9 7 1 . . .	18 44 4	24 11 56	18 43 51	24 12 17	— 0 13	+ 0 21
10 6 6 . . .	20 40 50	23 43 32	20 40 23	23 43 25	— 0 27	— 0 7
13 7 9 . . .	25 59 48	22 17 28	26 0 8	22 16 32	+ 0 20	— 0 56
25 7 59 . . .	39 35 0	17 56 30	39 34 11	17 56 6	— 0 49	— 0 24
30 8 22 . . .	43 19 51	16 42 18	43 18 28	16 40 5	— 1 23	— 2 13
Февр. 2 6 35 . . .	45 13 53	16 4 1	45 11 59	16 2 7	— 1 54	— 1 54
5 7 4½ . . .	46 59 6	15 27 3	46 59 17	15 27 0	+ 0 11	— 0 3
25 8 41 . . .	56 18 35	12 46 46	56 16 59	12 45 22	— 1 36	— 1 24
Мар. 1 11 10 . . .	57 52 42	12 23 40	57 51 47	12 22 28	— 0 55	— 1 12
5 11 39 . . .	59 18 0	12 3 16	59 20 11	12 2 50	+ 2 11	— 0 26
6 8 38 . . .	60 43 4	11 45 52	60 42 43	11 45 30	— 0 21	— 0 17

Онъ вычислилъ движеніе кометы по этому эллипсу; полученныя имъ по вычисленію мѣста и наблюденныя приводятся въ предыдущей таблицѣ, изъ которой видно, что наблюденія этой кометы отъ начала ея появленія и до конца согласуются съ движеніемъ кометы по ея орбитѣ не хуже, чѣмъ обыкновенно согласуются движенія планетъ съ ихъ теоріями. Это согласіе доказываетъ, что это была одна и та же комета, которая появлялась все это время и что ея орбита опредѣлена правильно.

Въ предыдущей таблицѣ опущены наблюденія 16, 18, 20 и 23 ноября какъ менѣе точныя. Комета же была наблюдена и въ эти дни. А именно: *Понтеусъ* съ помощниками ноября 17-го въ шестомъ часу утра въ *Римѣ*, т.-е. въ 5 ч. 10 м. Лондонскаго времени по наблюденіямъ при помощи нитей направляемыхъ черезъ неподвижныя звѣзды, опредѣлилъ мѣсто кометы подъ 188°30′ долготы и 0°40′ *S* широты. Эти наблюденія приведены въ сочиненіи изданномъ *Понтеусомъ* объ этой кометѣ. *Целліусъ*, который былъ при этомъ и сообщилъ свои наблюденія въ письмѣ *Кассини*, опредѣлилъ мѣсто кометы въ тотъ же часъ въ долготѣ 188°30′ и широтѣ 0°30′ *S*. Въ томъ же часу (т.-е. 5 ч. 42 м. утра *Лондонскаго* времени) *Галлетіусъ* въ *Авиньонѣ* наблюдалъ комету въ долготѣ 188°, безъ широты. По теоріи же комета тогда находилась въ долготѣ 188°16′45″ и широтѣ 0°53′7″ *S*.

Ноября 18-го въ 6 ч. 30 м. утра въ *Римѣ* (т.-е. въ 5 ч. 40 м. *Лондонскаго* времени) *Понтеусъ* наблюдалъ комету въ долготѣ 193°30′ и въ широтѣ 1°20′ *S*. *Целліусъ* въ долготѣ 193°30′ и широтѣ 1°00′ *S*. *Галлетіусъ* въ 5 ч. 30 м. утра въ *Авиньонѣ* наблюдалъ комету въ долготѣ 193°00′ и широтѣ 1°00′ *S*. Наконецъ, о. *Анго* въ *Ла-Флешъ* во *Франціи* въ пятомъ часу утра (т.-е. 5 ч. 9 м. *Лондонскаго* времени наблюдалъ положеніе кометы по серединѣ между двумя малыми звѣздами, изъ коихъ одна есть средняя изъ трехъ лежащихъ на прямой линіи въ лѣвой рукѣ Дѣвы (ψ по *Байеру*), другая же послѣдняя въ крылѣ ея (θ по *Байеру*), такъ что мѣсто кометы было 192°46′ и 50′ южной широты.

Въ тотъ же день въ *Бостонѣ* въ *Новой Англіи* въ широтѣ 42½° въ пятомъ часу утра (т.-е. въ 9 ч. 44 м. утра Лондонскаго времени), комета была наблюдена приблизительно въ долготѣ 194° и южной широтѣ 1°30′, какъ мнѣ сообщено знаменитымъ *Галлеемъ*.

Ноября 19 въ 4½ часа утра въ *Кэмбриджѣ* (по наблюденіямъ одного студента), комета отстояла отъ *Колоса Дѣвы* приблизительно на 2° на сѣверо-западъ. Положеніе Колоса было: долгота 199°23′47″ и широта *S* 2°1′59″. Въ тотъ же день въ 5 ч. утра по наблюденіямъ въ *Бостонѣ* въ *Новой Англіи* разстояніе кометы до Колоса составляло 1° и разность широтъ 40′. Въ тотъ же день, по наблюденіямъ на *Ямайкѣ*, разстояніе кометы до Колоса составляло около 1°. Въ тотъ же день г. *Артуръ Стореръ* на рѣкѣ *Патуксентъ* близъ *Гунтингъ Крика* въ *Мэриландѣ* по близости къ *Виргиніи* въ широтѣ 38½° въ пятомъ часу утра (т.-е. въ 10-мъ по Лондонскому времени), наблюдалъ комету надъ Колосомъ и почти соединенной съ этою звѣздою, такъ какъ разстояніе между ними было около ¾°. Сопо-

ставляя эти наблюденія между собою, я заключаю, что въ 9 ч. 44 м. по *Лондонскому* времени, комета находилась приблизительно въ долготѣ 198°50′ и южной широтѣ 1°25′. По теоріи же ея положеніе должно быть:

Долгота 198°52′15″. Широта 1°26′54″ *S*.

Ноября 20. Г. *Монтенари*, профессоръ астрономіи въ *Падуѣ* въ шестомъ часу утра Венеціанскаго времени (т.-е. 5 ч. 10 м. Лондонскаго времени), наблюдалъ комету въ долготѣ 203° и широтѣ южной 1°30′. Въ тотъ же день въ Бостонѣ комета наблюдалась въ разстояніи отъ Колоса 4° по долготѣ къ востоку, слѣдовательно, была приблизительно въ долготѣ 203°24′.

Ноября 21. *Понтеусъ* съ помощниками въ $7\frac{1}{2}$ ч. утра наблюдали комету въ долготѣ 207°50′ и широтѣ южной 1°16′. *Целліусъ* въ долготѣ 208°, *Анго* въ пятомъ часу утра въ долготѣ 207°45′, *Монтенари* въ долготѣ 207°51′. Въ тотъ же день на *Ямайкѣ* комета наблюдалась въ началѣ созвѣздія Скорпіона, и широта ея была приблизительно одинакова съ широтою Колоса Дѣвы, т.-е. 2°2′. Въ тотъ же день въ пятомъ часу утра въ *Баласорѣ* въ *Индіи* (т.-е. 11 ч. 20 м. ночи предыдущаго числа Лондонскаго времени), взято разстояніе кометы отъ Колоса въ 7°35′ къ востоку. Она находилась на прямой линіи между Колосомъ и Вѣсами, слѣдовательно, она была въ долготѣ 206°58′ и широтѣ южной 1°11′, по прошествіи 5 ч. 40 м. (т.-е. въ пятомъ часу утра *Лондонскаго* времени) она находилась въ долготѣ 208°12′ и широтѣ южной 1°16′. По теоріи мѣсто кометы должно было тогда быть:

Долгота 208°10′36″. Широта 1°53′35″ *S*.

Ноября 22. Комета наблюдалась *Монтенари* въ долготѣ 212°33′. Въ *Бостонѣ* же въ *Новой Англіи* ея долгота опредѣлена въ 213° при той же приблизительно широтѣ 1°30′ *S*. Въ тотъ же день въ пятомъ часу утра въ *Баласорѣ* комета наблюдалась въ долготѣ 211°50′, поэтому, въ 5 ч. утра Лондонскаго времени комета находилась приблизительно въ долготѣ 213°5′. Въ этотъ день въ Лондонѣ въ $6\frac{1}{2}$ часовъ утра, *Гукъ* наблюдалъ комету въ долготѣ около 213°30′ на прямой линіи проходящей черезъ колосъ Дѣвы и Сердце Льва, однако не вполнѣ точно на этой линіи, а немного къ сѣверу. *Монтенари* также замѣтилъ, что линія проведенная отъ кометы черезъ Колосъ проходила немного южнѣе Сердца Льва, такъ, что между этой линіей и Сердцемъ Льва былъ лишь весьма малый промежутокъ. Прямая линія проведенная черезъ Сердце Льва и Колосъ Дѣвы пересѣкаетъ эклиптику въ долготѣ 153°46′ подъ угломъ 2°51′, поэтому, если комета находилась на этой линіи въ долготѣ 213°, широта ея была 2°26′. Но такъ какъ согласно *Гуку* и *Монтенари* комета находилась немного къ сѣверу отъ этой линіи, то ея широта была немного менѣе. По наблюденіямъ Монтенари 20-го ноября широта кометы равнялась широтѣ Колоса, слѣдовательно, была около 1°30′ и согласно *Гуку*, *Монтенари* и *Анго* все время возрастала, слѣ-

довательно, 22-го ноября была чувствительно больше 1°30′. Среднее между предѣлами 2°26′ и 1°30′ составляетъ 1°58′. Хвостъ кометы согласно *Гуку* и *Монтенари* направлялся къ Колосу Дѣвы немного уклоняясь отъ этой звѣзды по *Гуку* къ югу, по *Монтенари* къ сѣверу, слѣдовательно, это уклоненіе было едва замѣтно, значитъ хвостъ, будучи почти параллеленъ экватору, уклонялся отъ противустоянія солнца къ сѣверу.

Ноября 23 ст. ст. въ 5 ч. утра въ Нюрнбергѣ (т.-е. въ $4\frac{1}{4}$ часа Лондонского времени), г. *Циммерманъ* наблюдалъ комету въ долготѣ 218°8′ и широтѣ южной 2°31′, взявъ ея разстоянія до неподвижныхъ звѣздъ.

Ноября 24, передъ восходомъ солнца *Монтенари* наблюдалъ комету въ долготѣ 222°52′ по сѣверную сторону прямой проходящей черезъ Сердце Льва и Колосъ Дѣвы, слѣдовательно, широта кометы была немного менѣе 2°38′. Какъ уже сказано, по наблюденіямъ *Монтенари*, *Анго* и *Гука* широта кометы все время возрастала, поэтому была теперь нѣсколько болѣе 1°58′, и значитъ безъ значительной погрѣшности можно взять среднюю величину 2°18′. *Понтеусъ* и *Галлетіусъ* показываютъ, что широта уже убывала, *Целліусъ* и наблюдатель въ *Новой Англіи*,—что она удерживала почти постоянное значеніе около $1\frac{1}{2}$°. Наблюденія *Понтеуса* и *Целліуса* болѣе грубы, ибо они производились измѣряя азимуты и высоты, также какъ и *Галлетіуса*; лучше тѣ наблюденія, гдѣ положеніе кометы относилось къ неподвижнымъ звѣздамъ, какъ это дѣлали: *Монтенари*, *Гукъ* и *Анго*, наблюдатель въ *Новой Англіи* и иногда *Понтеусъ* и *Целліусъ*. Въ тотъ же день въ пять часовъ утра комета наблюдалась въ *Баласорѣ* въ долготѣ 221°45′, такъ, что ея долгота въ пять часовъ утра Лондонскаго времени была кругло 223°. По теоріи долгота кометы должна была быть 223°22′42″.

Ноября 25, передъ восходомъ солнца *Монтенари* наблюдалъ комету въ долготѣ около $227\frac{3}{4}$°. *Целліусъ* замѣтилъ, что въ это время комета находилась на прямой между яркою звѣздою праваго бедра Дѣвы и южною частью коромысла Вѣсовъ, прямая эта пересѣкаетъ путь кометы въ долготѣ 228°36′. По теоріи комета тогда находилась приблизительно въ долготѣ $228\frac{1}{3}$°.

Итакъ, всѣ эти наблюденія согласуются съ теоріею по столько же по скольку они согласуются между собою, и этимъ согласіемъ доказываютъ, что это была одна и та же комета, которая и появлялась отъ 4-го ноября до 9-го марта. Орбита этой кометы дважды пересѣкаетъ плоскость эклиптики и, слѣдовательно, не можетъ быть прямолинейной. Пересѣченіе съ эклиптикою лежатъ не въ двухъ противоположныхъ частяхъ неба, а въ концѣ знака Дѣвы (150° до 180°) и въ началѣ Козерога (270° до 300°) съ промежуткомъ между ними около 98°, слѣдовательно, путь кометы весьма сильно отклоняется отъ большого круга; такъ въ *ноябрѣ* мѣсяцѣ ея путь отстоялъ отъ эклиптики къ югу на 3° съ лишнимъ, а затѣмъ въ *декабрѣ* мѣсяцѣ проходилъ въ 29° къ сѣверу отъ эклиптики, причемъ, тѣ двѣ части орбиты, по одной изъ которыхъ комета приближалась къ солнцу, по другой

удалялась, составляли между собою кажущійся уголъ наклона болѣе 30°, какъ наблюдалъ *Монтенари*. Эта комета прошла черезъ девять знаковъ, именно, отъ послѣдняго градуса Льва (149°) до начала Близнецовъ (60°), не считая знака Льва, который она прошла раньше нежели стала видимой. Нѣтъ никакой другой теоріи, по которой комета проходила бы закономѣрнымъ движеніемъ такую большую часть неба. Движеніе ея было весьма неравномѣрно, ибо около 20-го *ноября* она описывала въ сутки около 5°, затѣмъ, замедленнымъ движеніемъ отъ 26-го *ноября* по 12-ое *декабря* въ продолженіе $15\frac{1}{2}$ сутокъ она прошла всего 40°, затѣмъ, двигаясь опять ускоренно, она проходила въ сутки около 5°, до того, какъ движеніе ея стало вновь замедляться. Теорія, по которой столь неравномѣрное движеніе простирающееся черезъ большую часть неба, теорія основанная на тѣхъ же законахъ какъ и теорія планетъ и въ точности согласная съ точными астрономическими наблюденіями не можетъ быть не истинной.

Путь описанный кометой и положеніе отбрасываемаго ею хвоста показаны на приложенномъ чертежѣ (фиг. 209), изображенномъ на плоскости орбиты, причемъ ABC представляетъ орбиту кометы, D солнце, DE ось орбиты, DF линію узловъ, GH пересѣченіе сферы описанной радіусомъ равнымъ полуоси земной орбиты съ плоскостью орбиты кометы. Мѣста кометы показаны слѣдующія:

J . . .	ноября	4-го	1680 г.	P . . .	января	5-го	1681 г.
K . . .	»	11	»	Q . . .	»	25	»
L . . .	»	19	»	R . . .	февраля	5	»
M . . .	декабря	12	»	S . . .	»	25	»
O . . .	»	29	»	T . . .	марта	5	»
				V . . .	»	9	»

Я присовокупляю еще слѣдующія наблюденія, опредѣляющія положеніе хвоста.

Ноября 4 и 9 хвостъ не замѣчался.

Ноября 11 хвостъ былъ едва замѣтенъ въ 10-ти-футовую трубу и не болѣе $\frac{1}{2}$° длиною.

Ноября 17 хвостъ представлялся Понтеусу длиною болѣе 15°.

Ноября 18 хвостъ длиною въ 30° направленный въ сторону противоположную солнцу, простирался до Марса, который тогда былъ въ долготѣ 159°54′, какъ то наблюдали въ *Новой Англіи*.

Ноября 19 хвостъ представлялся наблюдателемъ въ Мэриландѣ въ 15° или 20° длиною.

Декабря 10 (по наблюденіямъ *Флэмстида*), хвостъ проходилъ по серединѣ разстоянія между хвостомъ змѣи въ созвѣздіи Змѣеносца и звѣздою δ южнаго крыла Орла и исчезалъ близъ звѣздъ A, ω и b таблицъ *Байера*. Слѣдовательно, конецъ хвоста былъ приблизительно въ долготѣ $289\frac{1}{2}$° и широтѣ $34\frac{1}{4}$° N.

Декабря 11 хвостъ простирался почти до острія Стрѣлы (*Байеръ* α и β), исчезая въ долготѣ 296°43′ и широтѣ 38°34′ *N*.

Декабря 12 хвостъ проходилъ черезъ середину Стрѣлы, не простираясь далеко за нее и исчезалъ въ долготѣ 304° и широтѣ 42½°.

Все это относится до длины болѣе яркой части хвоста кометы, ибо менѣе свѣтлая его часть, а можетъ быть и благодаря большей ясности неба, *декабря 12-го* въ 5 ч. 40 м. въ Римѣ, по наблюденіямъ *Понтеуса*, простиралась на 10° за блестящую звѣзду тѣла Лебедя и эта звѣзда отстояла отъ края хвоста къ сѣверо-западу на 45′. Въ эти дни ширина хвоста составляла близъ его верхняго конца 3°, слѣдовательно, средина хвоста проходила отъ этой звѣзды въ разстояніи 2°15′ къ югу верхній же конецъ былъ въ долготѣ 352° и въ широтѣ 61° *N*, такимъ образомъ длина хвоста составляла около 70°.

Декабря 21 хвостъ простирался почти до каѳедры *Кассіопеи*, проходя въ равныхъ разстояніяхъ между β и *Шедиромъ*, причемъ разстояніе до каждой изъ этихъ звѣздъ было равно разстоянію между ними, такъ, что хвостъ исчезалъ въ долготѣ 24° и широтѣ 47½°.

Декабря 29 хвостъ касался *Шеата*, проходя справа отъ этой звѣзды и въ точности заполнялъ промежутокъ между двумя звѣздами сѣверной ноги *Андромеды*. Длина его была 54°, такъ, что онъ прекращался въ долготѣ 49° и широтѣ 35°.

Января 5 хвостъ касался звѣзды π груди *Андромеды* правымъ своимъ краемъ и звѣзды μ ея пояса лѣвымъ краемъ и (по моимъ наблюденіямъ), былъ длиною въ 40°. Но онъ былъ изогнутъ и выпуклая его сторона была обращена къ югу. Съ кругомъ проведеннымъ черезъ голову кометы и солнце онъ составлялъ уголъ около 4° близъ головы кометы, у конца же своего онъ былъ наклоненъ къ этому кругу подъ угломъ 10° или 11°, хорда же хвоста образовала съ этимъ кругомъ уголъ въ 8°.

Января 13 довольно яркая часть хвоста оканчивалась между *Аламехомъ* и *Альголемъ*, тончайшій же его свѣтъ прекращался въ области звѣзды κ бока *Персея*. Разстояніе конца хвоста отъ круга соединяющаго комету и солнце составляло 3°50′, наклоненіе же хорды хвоста къ этому кругу 8½°.

Января 25 и 26 хвостъ обозначался тончайшимъ свѣтомъ на длинѣ 6° или 7°, въ слѣдующія же двѣ ночи, когда небо было весьма ясное, его нѣжнѣйшій и едва замѣтный свѣтъ достигалъ до 12° и даже немного болѣе. Ось хвоста направлялась въ точности на яркую звѣзду лѣваго плеча *Возничаго*, слѣдовательно, онъ отклонялся отъ направленія противоположнаго солнцу къ сѣверу на уголъ въ 10°.

Затѣмъ, *10-го февраля* хвостъ представлялся вооруженному глазу длиною въ 2°, ибо вышеупомянутый весьма нѣжный свѣтъ не могъ быть различаемъ черезъ стекла. *Понтеусъ* же пишетъ, что онъ видѣлъ хвостъ длиною до 12°.

Февраля 25 и послѣдующее время комета казалась безъ хвоста.

Разсматривая орбиту этой кометы и сопоставляя прочія явленія ею

представляемыя было бы не трудно придти къ заключенію, что тѣла кометъ плотныя, сплошныя, прочныя и выносливыя, подобно тѣламъ планетъ, ибо, если бы онѣ были бы ничѣмъ инымъ какъ парами или выдѣленіями земли солнца и планетъ, то, проходя поблизости къ солнцу, онѣ немедленно должны бы разсѣиться. Дѣйствительно, теплота солнца пропорціональна плотности лучей, т.-е. обратно пропорціональна удаленіямъ мѣстъ отъ солнца, а такъ какъ разстояніе кометы отъ центра солнца 8-го декабря, когда она проходила черезъ перигелій составляло лишь $\frac{6}{1000}$ разстоянія земли до солнца то, нагрѣваніе кометы солнцемъ въ это время относилось къ нагрѣванію земли у насъ лѣтомъ какъ 1000000 къ 36, т.-е. какъ 28000 къ 1. Но теплота кипящей воды приблизительно въ три раза болѣе, нежели теплота, которую принимаетъ сухая земля на солнцѣ лѣтомъ, какъ я самъ испытывалъ, теплота же краснѣющаго желѣза въ три или четыре раза болѣе теплоты кипящей воды; поэтому теплота принимаемая отъ солнечныхъ лучей сухою почвою кометы при прохожденіи ея черезъ перигелій, должна бы быть приблизительно въ 2000 разъ болѣе, нежели теплота краснѣющаго желѣза. При такомъ жарѣ всякіе пары и выдѣленія и всякія летучія вещества должны немедленно сгорѣть и разсѣиться.

Слѣдовательно, комета въ своемъ перигеліи испытываетъ громадное нагрѣваніе отъ солнца, и можетъ весьма долго сохранять это тепло. Ибо желѣзный раскаленный до красна шаръ діаметромъ въ одинъ дюймъ, едва утрачиваетъ весь свой жаръ на воздухѣ въ продолженіе часа. Шаръ же большаго діаметра, сохранялъ бы свое тепло болѣе продолжительно, пропорціонально діаметру, ибо поверхность (соотвѣтственно величинѣ которой онъ охлаждается отъ соприкосновенія съ окружающимъ воздухомъ), отнесенная къ заключенному внутри ея нагрѣтому количеству вещества уменьшается въ этомъ отношеніи. Слѣдовательно, накаленный до красна желѣзный шаръ, равный земному, т.-е. діаметромъ около 40000000 футъ во столько же дней, т.-е. приблизительно въ 50000 лѣтъ едва бы охладился. Однако, я подозрѣваю, что продолжительность сохраненія тѣлами тепла вслѣдствіе побочныхъ причинъ возрастаетъ въ меньшемъ отношеніи, нежели ихъ діаметры, и я бы желалъ, чтобы истинная пропорція была изслѣдована опытами.

Кромѣ того надо замѣтить, что въ *декабрѣ* мѣсяцѣ комета, послѣ того какъ она была накалена такимъ образомъ солнцемъ, испускала гораздо болѣе длинный и сіяющій хвостъ, нежели въ *ноябрѣ* мѣсяцѣ, пока она еще не достигла перигелія.

Вообще хвосты всѣхъ кометъ становятся больше и свѣтлѣе тотчасъ же послѣ прохожденія ихъ черезъ область солнца. Слѣдовательно, нагрѣваніе кометы влечетъ за собою увеличеніе величины хвоста ея. Отсюда можно заключить, что хвостъ есть не что иное какъ тончайшій паръ испускаемый головой или ядромъ кометы вслѣдствіе его теплоты.

Впрочемъ, мнѣніе о хвостахъ кометъ троякое. Одни полагаютъ, что

это не что иное, какъ отблескъ лучей солнца, распространяемый прозрачными головами кометъ, другіе, что хвосты происходятъ отъ преломленія свѣта при распространеніи его отъ кометы до земли, и наконецъ, третьи, что это есть облако или паръ непрестанно поднимающійся съ головы кометы и уходящій въ сторону противоположную солнцу.

Первое мнѣніе высказывается тѣми, кто совершенно не знакомъ съ ученіемъ объ оптическихъ явленіяхъ. Ибо отблескъ солнечныхъ лучей распознается въ темной комнатѣ, лишь постолько, посколько свѣтъ отражается частицами пыли и дыма носящимися въ воздухѣ, поэтому отблескъ ярче въ воздухѣ заполненномъ болѣе густымъ дымомъ, и тогда онъ сильнѣе дѣйствуетъ на глазъ, въ болѣе чистомъ воздухѣ этотъ отблескъ нѣжнѣе и труднѣе ощущается, въ небесныхъ же пространствахъ безъ всякаго отражающаго вещества его совершенно быть не можетъ. Свѣтъ распознается не по собственному отблеску, а по тому, посколько онъ отражается въ нашъ глазъ, ибо зрѣніе происходитъ не иначе какъ при посредствѣ лучей падающихъ на глазъ. Слѣдовательно, необходимо, чтобы въ области хвоста находилось бы какое-либо отражающее вещество, иначе все освѣщенное солнцемъ небо сіяло бы одинаково.

Второе мнѣніе представляетъ также много трудностей. Хвосты кометъ никогда не кажутся окрашенными, преломленіе свѣта непремѣнно сопровождается измѣненіемъ цвѣтовъ. Ясное распространеніе свѣта до насъ отъ планетъ и неподвижныхъ звѣздъ доказываетъ, что небесная среда не обладаетъ преломляющей силой, сообщенія же о томъ, что неподвижныя звѣзды представлялись иногда *Египтянамъ* косматыми, что бываетъ весьма рѣдко, должно быть приписываемо случайному преломленію свѣта облаками. Мерцаніе и лучистость неподвижныхъ звѣздъ надо приписывать преломленію лучей въ глазу и дрожаніямъ воздуха, ибо они исчезаютъ, когда глазъ смотритъ черезъ телескопъ. Вслѣдствіе дрожаній воздуха и поднимающихся паровъ происходитъ, что лучи поочередно легко уклоняются отъ входа въ узкое пространство зрачка, отъ болѣе же широкаго отверстія объектива—никогда, поэтому въ первомъ случаѣ и происходитъ мерцаніе, во второмъ прекращается. Это прекращеніе мерцанія во второмъ случаѣ доказываетъ правильное распространеніе свѣта черезъ небесныя пространства безъ всякаго чувствительнаго преломленія. Не слѣдуетъ также думать, что иногда потому не видно хвостовъ у кометъ, что ихъ свѣтъ недостаточно силенъ, чтобы восприниматься нашимъ глазамъ, и что поэтому не различаются и хвосты неподвижныхъ звѣздъ—надо знать, что свѣтъ неподвижныхъ звѣздъ можетъ быть увеличенъ при помощи телескоповъ болѣе чѣмъ въ сто разъ, и все-таки у нихъ хвостовъ незамѣтно.

Свѣтъ планетъ гораздо обильнѣе, хвостовъ же совершенно у нихъ нѣтъ, кометы же часто имѣютъ весьма большіе хвосты и тогда, когда свѣтъ ихъ головъ весьма нѣженъ и слабъ. Такъ комета 1680 года въ *декабрѣ* мѣсяцѣ, когда свѣтъ ея головы едва равнялся свѣту звѣзды второй величины, испускала хвостъ имѣвшій замѣтное сіяніе на протяженіи 40°,

50°, 60°, 70° и даже болѣе. Затѣмъ, въ *январѣ* 27 и 28 голова представлялась звѣздою не болѣе седьмой величины, хвостъ же, правда, по его нѣжнѣйшему, но все же чувствительному свѣту, замѣчался на протяженіи 6° или 7°, и по весьма слабому едва различимому даже до 12° или немного болѣе, какъ сказано выше. Наконецъ, *февраля* 9 и 10 голову нельзя было видѣть простымъ глазомъ, хвостъ же длиною въ 2° я наблюдалъ въ телескопъ. Затѣмъ, если бы хвостъ происходилъ отъ преломленія въ небесной средѣ и вслѣдствіе формы небеснаго пространства отклонялся бы отъ противоположнаго солнцу направленія, то это отклоненіе должно бы происходить для той же области неба всегда въ ту же самую сторону. Между тѣмъ, комета 1680 года 28-го декабря въ $8\frac{1}{2}$ ч. вечера *Лондонскаго* времени находилась въ долготѣ 338°41′ и широтѣ 28°6′ *N*, солнце же въ долготѣ 288°26′. Комета 1577 года *декабря* 29 находилась въ долготѣ 338°41′ и широтѣ 28°40′ *N* и солнце приблизительно въ долготѣ 288°26′, слѣдовательно, въ обоихъ случаяхъ земля находилась въ томъ же самомъ мѣстѣ, и комета представлялась въ той же самой части неба, однако въ первомъ случаѣ (какъ по моимъ, такъ и другимъ наблюденіямъ) хвостъ кометы отклонялся на $4\frac{1}{2}$° отъ противоположнаго солнцу направленія къ сѣверу, во второмъ же случаѣ (по наблюденіямъ *Тихо*), отклоненіе составляло 21° къ югу. Слѣдовательно, послѣ того какъ происхожденіе кометныхъ хвостовъ отъ преломленія свѣта въ небесномъ пространствѣ опровергнуто, остается вывести явленія, представляемыя хвостами изъ отраженія свѣта нѣкоторымъ веществомъ.

Хвосты происходятъ изъ головъ кометъ и направляются въ сторону противоположную солнцу, это подтверждается тѣми законами, которымъ они слѣдуютъ. Такъ, располагаясь всегда въ плоскости орбиты проходящей черезъ солнце, они уклоняются отъ направленія прямопротивоположнаго солнцу всегда въ ту сторону, которая при движеніи головы кометы по ея орбитѣ ею уже пройдена. Наблюдателю, находящемуся въ плоскости орбиты хвосты представляются направленными прямо отъ солнца, когда же наблюдатель удаляется отъ этой плоскости, отклоненіе постепенно становится чувствительнѣе и ежедневно увеличивается. При прочихъ одинаковыхъ условіяхъ отклоненіе меньше когда хвостъ наклоннѣе къ орбитѣ кометы и когда голова ближе подходитъ къ солнцу, въ особенности если уголъ отклоненія разсматривать близъ головы кометы. Хвосты не отклоняющіеся представляются прямыми, отклоненные искривляются. Кривизна больше, когда отклоненіе больше и замѣтнѣе когда хвостъ длиннѣе, у короткихъ хвостовъ кривизна едва замѣтна. Уголъ отклоненія меньше вблизи головы кометы, больше близь противоположнаго конца хвоста, потому что выпуклая сторона хвоста обращена въ ту сторону, отъ которой хвостъ отклоняется и которая совпадаетъ съ прямой линіей проведенной отъ солнца черезъ голову кометы. Хвосты болѣе длинные и широкіе и испускающіе болѣе сильный свѣтъ съ выпуклой своей стороны ярче и рѣзче ограничены нежели съ вогнутой своей стороны.

Такимъ образомъ, представляемыя хвостами явленія зависятъ отъ движенія головы кометы, а не отъ той области неба, въ которой голова усматривается, поэтому они происходятъ не отъ преломленія свѣта въ небесныхъ пространствахъ, а отъ вещества доставляемаго головой кометъ. Подобно тому, какъ у насъ въ воздухѣ дымъ какого-либо горящаго тѣла идетъ вверхъ и притомъ отвѣсно, когда тѣло въ покоѣ, и наклонно, когда тѣло движется, такъ и въ небесныхъ пространствахъ, гдѣ тѣла тяготѣютъ къ солнцу дымъ и пары должны подниматься отъ солнца (какъ уже сказано), и стремиться прямо вверхъ, когда дымящее тѣло находится въ покоѣ, или же наклонно, когда тѣло при своемъ движеніи постоянно уходитъ отъ тѣхъ мѣстъ, гдѣ поднялись верхнія части дыма или пара. Этотъ уклонъ тамъ меньше, гдѣ скорость поднимающагося пара больше, т.-е. въ близости къ солнцу и самому дымящему тѣлу. Вслѣдствіе различія въ наклонности столбъ пара искривляется, и такъ какъ паръ съ передней стороны столба немного свѣжѣе и поэтому и немного плотнѣе, то онъ отражаетъ свѣтъ обильнѣе и ограниченъ менѣе неопредѣленно. О внезапныхъ и сомнительныхъ движеніяхъ хвостовъ, а также и о ихъ неправильныхъ формахъ, описываемыхъ нѣкоторыми авторами, я ничего не прибавлю, ибо они происходятъ или отъ возмущеній въ нашемъ воздухѣ и отъ движущихся облаковъ закрывавшихъ части хвостовъ, а можетъ быть отъ частей млечнаго пути, которыя могли быть ошибочно приняты за проходящія передъ ними части хвостовъ кометъ.

Что изъ атмосферъ кометъ можетъ получаться достаточно паровъ для наполненія столь громадныхъ пространствъ, можно понять по разрѣженію нашего воздуха. У поверхности земли воздухъ занимаетъ пространство приблизительно въ 850 разъ большее нежели такое же по вѣсу количество воды, такъ что столбъ воздуха высотою 850 футъ вѣситъ столько же какъ столбъ воды того же сѣченія и высотою въ одинъ футъ. Столбъ же воздуха достигающій до верху атмосферы равенъ вѣсу столба воды высотою около 33 футъ, поэтому, если бы отнять нижнюю часть воздушнаго столба высотою въ 850 футъ, то остающаяся часть по своему вѣсу равнялась бы столбу воды въ 32 фута высотою. Отсюда (на основаніи подтвержденнаго многочисленными опытами закона, что сжатіе воздуха пропорціонально вѣсу давящей атмосферы, и что сила тяжести обратно пропорціональна квадратамъ разстояній мѣстъ до центра земли), производя вычисленіе по слѣд. пред. XXII кн. 2-й, я нашелъ, что если бы воздухъ поднялся отъ поверхности земли на высоту равную одному ея полудіаметру, то онъ по сравненію съ нашимъ воздухомъ былъ бы разрѣженъ въ отношеніи гораздо большемъ нежели отношеніе объема шара описаннаго радіусомъ орбиты Сатурна къ шару діаметромъ въ одинъ дюймъ. Слѣдовательно, количество нашего воздуха въ объемѣ шара діаметромъ въ одинъ дюймъ при томъ разрѣженіи, которое воздухъ имѣлъ бы на высотѣ земного радіуса надъ ея поверхностью, было бы достаточно, чтобы заполнить всю область планетъ до сферы Сатурна и даже гораздо дальше. Такъ какъ

воздухъ по вышесказанному при бо̀льшихъ возвышеніяхъ разрѣжается въ громадной степени, атмосфера же кометъ возвышается надъ центромъ ядра до 10 разъ выше нежели его поверхность, а затѣмъ хвостъ возвышается еще гораздо болѣе, поэтому хвостъ долженъ быть въ высшей степени разрѣженный. Хотя вслѣдствіе гораздо большей густоты атмосферы кометы и бо̀льшей силы тяготѣнія къ солнцу и взаимнаго притяженія частицъ воздуха и паровъ другъ къ другу, и возможно, что воздухъ въ кометныхъ хвостахъ не настолько разрѣженъ какъ въ небесныхъ пространствахъ, но все-таки самаго малаго количества воздуха и паровъ вполнѣ достаточно для всѣхъ явленій наблюдаемыхъ въ кометныхъ хвостахъ, какъ то показываетъ приведенный выше разсчетъ. О весьма сильной разрѣженности кометныхъ хвостовъ можно также заключить по просвѣчиванію черезъ нихъ звѣздъ. Земная атмосфера при своей толщинѣ въ немного миль, сіяя отъ свѣта солнца, тушитъ полностью не только всѣ свѣтила но и самую луну, между тѣмъ черезъ громадную толщу кометныхъ хвостовъ также освѣщенную солнцемъ, самыя малыя звѣзды просвѣчиваютъ безъ утраты яркости. Вмѣстѣ съ тѣмъ, яркость большей части хвостовъ обыкновенно не больше яркости слоя нашего воздуха толщиною въ одинъ или въ два дюйма отражающаго свѣтъ солнца своимъ блескомъ въ темной комнатѣ.

Время, въ продолженіе котораго паръ восходитъ отъ головы кометы до конца хвоста можетъ быть найдено, проведя прямую линію отъ конца хвоста къ солнцу, и замѣтивъ мѣсто ея пересѣченія съ орбитою, ибо паръ при концѣ хвоста, поднимаясь прямо отъ солнца, началъ свой подъемъ изъ головы въ то время, когда голова находилась въ этомъ пересѣченіи. Правда, паръ поднимается не вполнѣ прямо отъ солнца, ибо удерживая то движеніе, которое онъ ранѣе имѣлъ вмѣстѣ съ кометою, онъ поднимается наклонно, вслѣдствіе сложенія этого своего движенія съ движеніемъ отъ солнца, поэтому, рѣшеніе задачи будетъ точнѣе, если проводить указанную сѣкущую параллельно длинѣ хвоста или еще лучше, вслѣдствіе криволинейности движенія кометы, подъ небольшимъ угломъ къ этой линіи. Такимъ образомъ я нашелъ, что паръ, бывшій въ концѣ хвоста *25-го января* началъ подниматься отъ головы *11-го декабря*, и слѣдовательно, время его подъема составляло около 45 дней. Весь же тотъ хвостъ, который былъ виденъ *10-го декабря* поднялся въ продолженіе тѣхъ двухъ дней, которые прошли послѣ прохожденія кометъ черезъ перигелій. Слѣдовательно, паръ въ началѣ по близости съ солнцемъ поднимался всего скорѣе, затѣмъ, вслѣдствіе постояннаго замедленія его движенія силою тяготѣнія, продолжалъ подниматься медленнѣе; своимъ поднятіемъ онъ увеличивалъ длину хвоста. Хвостъ во все послѣдующее время, пока былъ виденъ, состоялъ почти только изъ того пара, который поднялся при прохожденіи черезъ перигелій, тотъ паръ, который поднялся раньше всего и составлялъ конецъ хвоста, исчезъ не ранѣе какъ переставъ быть видимымъ вслѣдствіе большого разстоянія до нашего глаза, такъ и вслѣдствіе меньшаго освѣщенія солнцемъ. Поэтому и такіе хвосты кометъ, которые коротки, не

поднимаются быстро и непрестанно отъ головъ и вскорѣ затѣмъ пропадаютъ, а суть долго сохраняющіеся столбы паровъ и выдѣленій, распространяющіеся отъ головъ весьма медленно въ продолженіе многихъ дней, они раздѣляютъ движеніе самихъ головъ при началѣ своего выхода и продолжаютъ двигаться черезъ небесныя пространства вмѣстѣ съ головами. Отсюда обратно заключаемъ, что небесныя пространства лишены силы сопротивленія, ибо черезъ нихъ свободно совершаютъ и долго сохраняютъ свои движенія съ огромными скоростями не только твердыя массы планетъ и кометъ, но и разрѣженнѣйшіе пары хвостовъ.

Поднятіе хвостовъ изъ атмосферъ головъ и ихъ распространеніе въ сторону противоположную солнцу *Кэплеръ* приписываетъ дѣйствію лучей солнца, захватывающихъ съ собою вещество хвостовъ.

Что нѣжнѣйшія испаренія въ свободныхъ пространствахъ уступаютъ дѣйствію лучей, не противорѣчитъ здравому смыслу, не смотря на то, что въ нашихъ областяхъ грубыя вещества не воспринимаютъ замѣтныхъ движеній отъ дѣйствія лучей солнца. Другой авторъ полагаетъ, что могутъ существовать частицы какъ легкія такъ и тяжелыя, и что вещество хвостовъ не тяготѣетъ а отталкивается, и вслѣдствіе этой своей легкости поднимается отъ солнца. Но такъ какъ тяжесть земныхъ тѣлъ пропорціональна ихъ массамъ, и слѣдовательно, при сохраненіи количества вещества не можетъ быть ни увеличена ни уменьшена, то мнѣ кажется, что подъемъ хвостовъ долженъ быть скорѣе приписанъ разрѣженію ихъ вещества. Дымъ въ трубѣ поднимается вслѣдствіе напора воздуха, въ которомъ онъ находится. Воздухъ разрѣженный нагрѣваніемъ поднимается вслѣдствіе уменьшившагося его удѣльнаго вѣса и уноситъ съ собою заключенный въ немъ дымъ. Почему бы и кометному хвосту не подниматься по такой же причинѣ отъ солнца? Ибо лучи солнца не иначе возмущаютъ среду, черезъ которую они проникаютъ, какъ своимъ отраженіемъ и преломленіемъ. Отражающія частицы, нагрѣтыя этимъ дѣйствіемъ, нагрѣваютъ эфирную среду, въ которой онѣ содержается. Эта послѣдняя отъ сообщаемой ей теплоты нагрѣвается и разрѣжается, и вслѣдствіе уменьшившагося отъ этого разрѣженія удѣльнаго ея тяготѣнія къ солнцу, она поднимается и уноситъ съ собою отражающія частицы, изъ которыхъ составляется хвостъ. Поднятію паровъ способствуетъ также ихъ обращеніе вокругъ солнца, вслѣдствіе котораго они стремятся удалиться отъ солнца, тогда какъ атмосфера солнца и вещество небесныхъ пространствъ или находится въ полномъ покоѣ, или же обладаетъ меньшею скоростью въ томъ движеніи, которое ему сообщается вращеніемъ солнца. Таковы причины поднятія хвостовъ поблизости къ солнцу, гдѣ кривизна орбитъ больше и кометы находятся въ болѣе плотной, а потому и болѣе тяжелой атмосферѣ солнца, и тотчасъ же выдѣляютъ весьма длинные хвосты.

Хвосты, такъ образовавшіеся, сохраняютъ свое движеніе и, тяготѣя вмѣстѣ съ тѣмъ къ солнцу, движутся затѣмъ вокругъ солнца по эллипсамъ подобно головамъ и въ этомъ своемъ движеніи сопровождаютъ головы и совершенно

свободно примыкаютъ къ нимъ, ибо тяготѣніе паровъ къ солнцу заставляетъ ихъ отходить отъ головъ кометъ къ солнцу не болѣе того сколько тяготѣніе головъ заставляетъ ихъ самихъ отходить отъ хвостовъ. Вслѣдствіе одинаковаго общаго тяготѣнія они или совмѣстно падаютъ къ солнцу или же совмѣстно замедляются въ своемъ удаленіи отъ него, поэтому это тяготѣніе нисколько не препятствуетъ тому, чтобы хвосты и головы вслѣдствіе вышеуказанныхъ или какихъ иныхъ причинъ приняли бы другъ относительно друга какое-либо положеніе и затѣмъ свободно его бы сохраняли.

Слѣдовательно, хвосты кометъ, которые зарождаются въ перигеліяхъ уходятъ вмѣстѣ съ кометами въ весьма отдаленныя области и затѣмъ послѣ длиннаго ряда лѣтъ вмѣстѣ съ ними вновь возвращаются, или вѣрнѣе тамъ разрѣжаясь постепенно пропадаютъ. Затѣмъ, съ приближеніемъ головъ кометъ къ солнцу отъ нихъ должны распространяться сперва медленно коротенькіе хвосты, которые затѣмъ, въ перигеліяхъ тѣхъ кометъ, которыя опускаются до солнечной атмосферы, возрастаютъ до громадныхъ размѣровъ. Паръ въ этихъ свободныхъ пространствахъ постоянно разрѣжается и расширяется, вслѣдствіе чего всякій хвостъ въ верхнемъ своемъ концѣ шире нежели у самой головы кометъ. Представляется небезосновательнымъ, что вслѣдствіе сказаннаго постояннаго разрѣженія и расширенія паръ разсѣивается и распространяется по всему небесному пространству, затѣмъ, постепенно притягиваясь вслѣдствіе своего тяготѣнія планетами, онъ смѣшивается съ ихъ атмосферами. Такъ какъ моря безусловно необходимы для строенія земли, ибо изъ нихъ вслѣдствіе нагрѣванія солнцемъ выдѣляются обильные пары, которые или собираясь въ тучи затѣмъ падаютъ въ видѣ дождей и орошаютъ и питаютъ землю, производя произрастаніе растеній, или же сгущаясь на холодныхъ вершинахъ горъ (какъ нѣкоторые основательно разсуждаютъ), стекаютъ въ видѣ источниковъ и рѣкъ, то для сохраненія морей и влаги на планетахъ, повидимому, требуются кометы, изъ сгущенныхъ выдѣленій и паровъ коихъ всякая жидкость, поглощаемая растеніями и гніеніемъ ихъ превращаемая въ сухую землю, можетъ непрерывно восполняться и образовываться вновь. Всѣ растенія произрастаютъ непремѣнно изъ жидкостей, и затѣмъ, гніеніемъ превращаются по большей части въ сухую землю, изъ гніющихъ же жидкостей постоянно осаждается илъ, поэтому, количество сухой земли изо дня въ день возрастаетъ, количество же жидкостей, если бы оно не получало восполненія извнѣ, должно бы безпрерывно убывать и наконецъ исчезнуть. Кромѣ того я подозрѣваю, что тотъ газъ, который составляетъ меньшую но тончайшую и лучшую часть нашего воздуха и который требуется для поддержанія жизни во всемъ живущемъ, также происходитъ главнымъ образомъ изъ кометъ.

Атмосферы кометъ при движеніи ихъ къ солнцу, уходя въ видѣ хвостовъ, уменьшаются, и (въ той части конечно, которая обращена къ солнцу) становятся уже, и наоборотъ, при удаленіи кометъ отъ солнца, когда атмосферы слабѣе уходятъ въ хвосты, онѣ становятся полнѣе, если только *Гевеліусъ* пра-

вильно подмѣтилъ эти явленія. Наименьшими же онѣ представляются, когда головы раскалены солнцемъ и онѣ уходятъ въ видѣ весьма большихъ и блестящихъ хвостовъ, ядра же въ это время, можетъ быть, окружены въ нижнихъ слояхъ атмосферы болѣе густымъ и чернымъ дымомъ, ибо дымъ обыкновенно бываетъ болѣе густой и черный при болѣе сильномъ жарѣ. Такъ голова той кометы, о которой мы разсуждали, при равныхъ разстояніяхъ отъ солнца и отъ земли представлялась болѣе темной послѣ прохожденія черезъ перигелій нежели до того.

Въ декабрѣ мѣсяцѣ она относилась къ звѣздамъ третьей величины, въ ноябрѣ къ звѣздамъ первой и второй. Тѣ же, кто видѣлъ и ту и другую, описываютъ первую какъ болѣе яркую. Такъ, кэмбриджскому студенту 19-го ноября эта комета, несмотря на свой нѣсколько сѣроватый и неясный свѣтъ, представлялась равной Колосу Дѣвы и болѣе свѣтлой, нежели впослѣдствіи. 20 ноября ст. ст. комета казалась Монтенари больше звѣзды первой величины, имѣя при этомъ хвостъ длиною въ 2°. Въ попавшихъ въ мои руки письмахъ г. *Стореръ* сообщаетъ, что въ *декабрѣ* мѣсяцѣ голова кометы, когда она испускала наибольшій и самый яркій хвостъ, она была малая и по видимой своей величинѣ много уступала той кометѣ, которая появлялась въ ноябрѣ мѣсяцѣ передъ восходомъ солнца; о причинѣ этого явленія онъ выражалъ догадку, что вещество головы было въ началѣ болѣе обильное, и постепенно расходовалось.

Склоняться къ такому же объясненію заставляетъ также и то, что головы другихъ кометъ, которыя испускали весьма большіе и яркіе хвосты представлялись полутемными и малыми. Такъ, 5 марта нов. ст. 1668 года въ 7 ч. вечера о. *Валентинъ Естанцій*, находившійся въ *Бразиліи*, видѣлъ вблизи горизонта на юго-западѣ комету имѣвшую малую и едва замѣтную голову, хвостъ же ея былъ необыкновенно блестящъ, такъ что стоявшіе на берегу легко различали его отраженіе въ морѣ; этотъ хвостъ представлялся въ видѣ огненнаго столба длиною въ 23° почти параллельнымъ горизонту съ юга къ западу. Такой блескъ его продолжался только три дня, постепенно затѣмъ убывая; при убываніи блеска величина хвоста возрастала, такъ что даже въ *Португаліи* хвостъ казался имѣвшимъ замѣтный блескъ и простирающимся почти черезъ четверть неба (т.-е. 45°) съ запада на востокъ, хотя здѣсь хвостъ не былъ виденъ цѣликомъ, ибо голова кометы въ этихъ широтахъ была скрыта подъ горизонтомъ. По увеличенію длины хвоста и уменьшенію его блеска можно заключить, что голова кометы удалялась отъ солнца и была къ нему всего ближе въ началѣ, подобно кометѣ 1680 года. Въ *Саксонской* лѣтописи монаха *Симеона Дургамскаго* какъ указалъ *Гевелій*, можно прочесть, что у кометы 1106 года *«звѣзда которой была малая и темная (какъ у кометы 1680 года), но сіяніе, которое изъ нея исходило было весьма ясное и распространялось отъ востока къ сѣверу, подобно огненному столбу»*. Комета появлялась въ началѣ *февраля* мѣсяца и впослѣдствіи вечеромъ на юго-западѣ. На основаніи этого и по положенію хвоста можно заключить, что голова была вблизи солнца.

«Отъ солнца», пишетъ Матвѣй Парижанинъ, *«она отстояла примѣрно на одинъ локоть и испускала изъ себя лучъ длиною отъ третьяго* (правильнѣе шестого) *до девятаго часа»*. Такова же была и та весьма яркая комета, которую описываетъ Аристотель (кн. 1 Метеоры, 6): *«голова ея въ первый день не была усмотрѣна потому, что она зашла раньше солнца или тотчасъ же послѣ него въ лучахъ его, въ слѣдующій же день она была усмотрѣна насколько это возможно, ибо она была въ самомъ незначительномъ разстояніи отъ солнца и тотчасъ же зашла. Вслѣдствіе весьма сильной яркости* (очевидно хвоста), *разсѣянный свѣтъ головы не былъ виденъ, но съ теченіемъ времени* (говоритъ Аристотель), *такъ какъ сіяніе хвоста стало меньше, у головы возстановился ея видъ. Свой блескъ она распространяла на треть неба* (т.-е. 60°); *она появилась зимою* [4-го года 101-ой олимпіады] *и поднималась до пояса Оріона, гдѣ и исчезла.*

Комета 1618 года, которая вышла изъ лучей солнца весьма хвостатою, едва равнялась или немногимъ превосходила звѣзды первой величины; появлялось также не мало кометъ большей величины съ весьма короткими хвостами. Про нѣкоторыя изъ нихъ сообщается, что онѣ равнялись Юпитеру, другія Венерѣ, нѣкоторыя даже лунѣ.

Мы сказали, что кометы составляютъ родъ планетъ обращающихся вокругъ солнца по весьма эксцентричнымъ эллипсамъ. Такъ какъ въ ряду неимѣющихъ хвостовъ планетъ меньше тѣ, которыя обращаются по меньшимъ и ближайшимъ къ солнцу орбитамъ, то можно небезосновательно полагать, что и тѣ кометы, которыя въ своихъ перигеліяхъ ближе подходятъ къ солнцу меньше прочихъ и своимъ притяженіемъ нисколько не возмущаютъ солнца. Опредѣленіе поперечныхъ осей орбитъ и временъ обращенія по сопоставленію кометъ, возвращающихся черезъ долгіе промежутки времени по тѣмъ же самымъ орбитамъ, я предоставляю другимъ.

Слѣдующее же предложеніе можетъ бросить свѣтъ на это дѣло.

Предложеніе XLII. Задача XXII.

Исправить найденную орбиту кометы.

Дѣйствіе 1. Принимаютъ положеніе плоскости орбиты найденное по предыдущему предложенію, и выбираютъ три мѣста кометы опредѣленныя самыми точными наблюденіями и сколь можно далекія другъ отъ друга. Пусть A есть промежутокъ времени между первымъ и вторымъ, B между вторымъ и третьимъ наблюденіемъ. При этомъ удобно, чтобы при одномъ изъ наблюденій комета находилась въ перигеѣ или отстояла недалеко отъ перигея. По этимъ тремъ наблюденнымъ мѣстамъ тригонометрически вычисляютъ истинныя мѣста кометы въ принятой плоскости ея орбиты. Послѣ того какъ эти мѣста найдены, опредѣляютъ ариѳметическими дѣйствіями установляемыми по пред. XXI, кн. 1 коническое сѣченіе черезъ нихъ проходящее и имѣющее свой фокусъ въ центрѣ солнца. Пусть площади огра-

ниченныи имъ и радіусами проведенными отъ солнца къ найденнымъ мѣстамъ, суть D и E, именно D площадь между первымъ и вторымъ наблюденіемъ, E между вторымъ и третьимъ. Пусть T есть полное время въ продолженіе котораго площадь $D+E$ должна бы описываться при скорости кометы согласно пред. XVI кн. 1.

Дѣйствіе 2. Долгота узловъ плоскости траекторіи увеличивается придавъ къ ней 20′ или 30′, которыя обозначимъ черезъ P, наклоненіе же плоскости орбиты къ плоскости эклиптики сохраняется. По тремъ наблюденнымъ мѣстамъ находятъ три истинныхъ мѣста кометы въ этой новой плоскости какъ и выше, затѣмъ опредѣляютъ орбиту проходящую черезъ эти три мѣста и ея площади между первымъ и вторымъ, и вторымъ и третьимъ наблюденіями, которыя пусть будутъ d и e, а также и полное время t, въ которое площадь $d+e$ должна бы быть описываема.

Дѣйствіе 3. Сохраняя ту же долготу узловъ какъ и при первомъ дѣйствіи, увеличиваютъ наклоненіе плоскости орбиты къ плоскости эклиптики, придавъ къ этому наклоненію 20′ или 30′, которыя обозначимъ черезъ Q. Затѣмъ, по упомянутымъ выше наблюденіямъ трехъ видимыхъ мѣстъ кометы, находятъ три ея истинныхъ мѣста въ этой новой плоскости и орбиту черезъ нихъ проходящую, а также и ея площади между первымъ и вторымъ и вторымъ и третьимъ наблюденіями, пусть эти площади суть δ и ε и пусть τ есть полное время, въ продолженіе котораго должна бы описываться площадь $\delta+\varepsilon$.

Пусть будетъ:

$$C:1=A:B \qquad G:1=D:E$$
$$g:1=d:e \qquad \gamma:1=\delta:\varepsilon$$

и пусть S есть истинный промежутокъ времени между первымъ и третьимъ наблюденіемъ. Соблюдая правила дѣйствій съ знаками $+$ и $-$ ищутъ числа m и n такъ чтобы было:

$$2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$$
$$2T-2S=mT-mt+nT-n\tau.$$

Если J означаетъ наклоненіе плоскости орбиты къ плоскости эклиптики при первомъ дѣйствіи и K долготу одного изъ узловъ, то $J+nQ$ представитъ истинное наклоненіе и $K+mP$ истинную долготу узла.

Затѣмъ, если при первомъ, второмъ и третьемъ дѣйствіи обозначимъ соотвѣтственно черезъ R, r и ρ параметры и черезъ $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ малыя оси орбитъ, то истинный параметръ той орбиты, которую комета описываетъ будетъ:

$$R+mr-mR+n\rho-nR$$

и истинная длина малой полуоси:

$$\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$$

Послѣ того какъ малая ось найдена, находится и время обращенія кометы.

Впрочемъ, времена обращеній и малыя оси орбитъ опредѣляются съ недостаточною точностью, если только не сопоставить между собою кометъ, которыя появлялись въ различное время.

Если нѣсколько кометъ черезъ одинаковые промежутки времени описываютъ, какъ оказывается, одну и ту же орбиту, то надо будетъ заключить, что онѣ представляютъ ту же самую комету обращающуюся по этой орбитѣ. Тогда по временамъ обращеній опредѣляются малыя оси орбитъ, по этимъ же осямъ опредѣляются и эллиптическія орбиты.

Съ этою цѣлью надо вычислить орбиты многихъ кометъ въ предположеніи, что онѣ параболическія, ибо орбиты такого рода весьма близко соотвѣтствуютъ явленіямъ. Это слѣдуетъ не только изъ сдѣланнаго сопоставленія параболической орбиты кометы 1680 года, но также и по той большой кометѣ, которая была наблюдена *Гевеліемъ* въ 1664 и 1665 гг. Онъ самъ вычислилъ изъ своихъ наблюденій долготы и широты этой кометы, но съ меньшею точностью. Изъ тѣхъ же наблюденій *Галлей* вычислилъ вновь мѣста кометы и затѣмъ, по найденнымъ такимъ образомъ мѣстамъ опредѣлилъ орбиту кометы.

Онъ нашелъ, что

Долгота узла	$= 81°13'55''$
Наклонность	$= 21°18'40''$
Разстояніе перигелія до узла	$= 49°27'30''$
Долгота перигелія	$=128°40'30''$
Широта перигелія	$= 16°\ 1'15''$ (южная геліоцентрическая).

Прохожденіе черезъ перигелій ноября мѣсяца 24 с. 11 ч. 52 м. средняго времени Лондонскаго или 13 ч. 8 м. Данцигскаго по старому стилю.

Параметръ параболы 410286 причемъ большая полуось земной орбиты принята за 100000.

Насколько хорошо согласуются вычисленныя по этой орбитѣ мѣста съ наблюденными показано въ слѣдующей таблицѣ составленной *Галлеемъ* (см. таблицу на стр. 581).

1665 г. въ *февралѣ* мѣсяцѣ первая звѣзда Овна, которая въ дальнѣйшемъ обозначена черезъ γ имѣла долготу $28°30'15''$ и широту $N\ 7°8'58''$. Вторая звѣзда Овна была въ долготѣ $29°17'18''$ и широтѣ $N\ 8°28'16''$ и еще одна звѣзда 7-й величины, которую называю A была въ долготѣ $28°24'45''$ и широтѣ $N\ 8°28'33''$. Февраля 7 с. 7 ч. 30 м. *Парижскаго* времени, т.-е. 7 с. 8 ч. 37 м. Данцигскаго по старому стилю комета образовала треугольникъ съ звѣздами γ и A прямоугольный при γ, причемъ ея разстояніе до звѣзды γ было равно разстоянію звѣздъ γ и A между собою, т.-е. $1°19'46''$ по большому кругу, слѣдовательно, $1°20'26''$ по параллели звѣзды γ. Поэтому, если изъ долготы звѣзды γ вычесть $1°20'26''$, то остается долгота

Истинное время. Данцигъ.	Наблюденныя разстоянія кометы.		Долгота		Широта	
			Наблюд.	Вычисл.	Наблюд.	Вычисл.
Декабрь	Отъ Сердца Льва	Отъ Колоса Дѣвы			S	S
3с18ч29½м	46°24′20″	22°52′10″	187° 1′ 0″	187° 1′29″	21°39′ 0″	21°38′50″
4 18 1½	46 2 45	23 52 40	186 15 0	186 16 5	22 24 0	22 24 0
7 17 48	44 48 0	27 56 40	183 6 0	183 7 33	25 22 0	25 21 40
		Огъ прав. плеч. Оріона				
17 14 43	53 15 15	45 43 30	122 56 0	122 56 0	49 25 0	49 25 0
	Отъ Проціона	Отъ свѣт. въ Чел. Кита				
19 9 35	35 13 50	52 56 0	88 40 30	88 43 0	45 48 0	45 46 0
20 9 53½	40 49 0	40 4 0	73 3 0	73 5 0	39 54 0	39 53 0
	Отъ прав. пл. Оріона					
21 9 9½	26 21 25	29 28 0	62 16 0	62 18 30	33 41 0	33 39 40
22 9 0	29 47 0	20 29 30	54 24 0	54 37 0	27 45 0	27 46 0
	Отъ Яркой Овна	Отъ Альдебарана				
26 7 58	23 20 0	26 44 0	39 0 0	39 2 28	12 36 0	12 34 13
27 6 45	20 45 0	28 10 0	37 5 40	37 8 45	10 23 0	10 23 13
		Отъ Палилиція				
28 7 39	18 29 0	29 37 0	35 24 45	35 27 52	8 22 50	8 23 37
	Отъ пояса Андром.					
31 6 45	30 48 10	32 53 30	32 7 40	32 8 20	4 13 0	4 16 25
Янв. 1665					N	N
7 7 37½	25 11 0	37 12 25	28 24 47	28 24 0	0 54 0	0 53 0
	Отъ Голов. Андром.					
13 7 0	28 7 10	38 55 20	27 6 54	27 6 39	3 6 50	3 7 40
	Отъ пояса Андром.					
24 7 29	20 32 15	40 5 0	26 29 15	26 28 50	5 25 50	5 26 0
Февраль						
7 8 37			27 4 46	27 24 55	7 3 29	7 3 15
22 8 46			28 29 46	28 29 58	8 12 36	8 10 25
Мартъ						
1 8 16			29 18 15	29 18 20	8 36 26	8 36 12
7 8 37			30 2 48	30 2 42	8 56 30	8 56 56

кометы равная 27°9′49′. Auzout на основаніи этого наблюденія имъ произведеннаго принялъ долготу кометы въ 27°0′. По чертежу же составленному *Гукомъ* ея долгота была тогда даже 26°59′24″. Взявъ среднее я принялъ ее въ 27°4′46″. По тому же наблюденію Auzout я принялъ широту кометы въ 7°4′ или 7°5′ *N*. Было бы правильнѣе принять ее въ 7°3′29″, ибо разность широтъ кометы и звѣзды равнялась разности долготъ звѣздъ γ и *A*.

Февраля 22 с. 7 ч. 30 м. Лондонскаго времени, т.-е. 8 ч. 46 м. Данцигскаго, разстояніе кометы отъ звѣзды *A* по наблюденію *Гука* нанесенному имъ самимъ на чертежъ и по наблюденіямъ Auzout и Petit также нанесеннымъ на чертежъ, равнялось $\frac{1}{5}$ разстоянія звѣзды *A* и первой звѣзды Овна, т.-е. было 15′57″; разстояніе кометы отъ линіи соединяющей звѣзду *A* съ первою Овна равнялось $\frac{1}{4}$ отъ сказанной пятой части, т.-е. 4′. Поэтому, комета была въ долготѣ 28°29′46″ и широтѣ *N* 8°12′36″.

Марта 1 с. 7 ч. 0 м. Лондонскаго времени, т.-е. 8 ч. 16 м. Данцигскаго, комета была наблюдена близъ второй звѣзды Овна, причемъ разстояніе между ними относилось къ разстоянію между первою и второю звѣздами Овна, т.-е. къ 1°33′ какъ 4 : 45 по *Гуку* или 2 : 23 по *Готтигніесу*. Отсюда слѣдуетъ, что разстояніе кометы до второй звѣзды Овна было 8′16″ по *Гуку* или 8′5″ по *Готтигніесу* или взявъ среднее 8′10″. Согласно *Готтигніесу* комета почти прошла передъ второю звѣздою Овна въ разстояніи около $\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{5}$ пути проходимаго ею въ сутки, т.-е. 1′35″ (съ чѣмъ согласно наблюденіе Auzout) или немного ближе по *Гуку*, т.-е. около 1′. Поэтому, если къ долготѣ первой звѣзды Овна придать 1′ и къ широтѣ ея 8′10″, то получится долгота кометы 29°18′ и широта ея *N* 8°36′26″.

Марта 7 с. 7 ч. 30 м. *Парижскаго* времени, т.-е. 8 ч. 37 м. Данцигскаго по наблюденіямъ Auzout разстояніе кометы отъ второй звѣзды Овна равнялось разстоянію этой звѣзды до звѣзды *A*, т.-е. 52′59″, разность же долготъ кометы и второй звѣзды Овна составляла 45′ или 46′ или взявъ среднее 45′30″. Значитъ долгота кометы была 30°2′48″. По составленному *Petit* чертежу наблюденій *Auzout*, *Гевелій* вывелъ широту кометы въ 8°54′. Но граверъ неправильно искривилъ путь кометы въ концѣ движенія ея, почему *Гевелій* на составленномъ имъ самимъ чертежѣ наблюденій *Auzout* исправилъ неправильное искривленіе и получилъ широту кометы 8°55′30″. Если же исправить неправильность еще болѣе, то широта можетъ оказаться въ 8°56′ или 8°57′.

Эта комета была также видна и *марта 9*, и тогда мѣсто ея должно было быть: долгота 30°18′ и широта 9°3½′ *N* приблизительно.

Эта комета была видима въ продолженіе трехъ мѣсяцевъ и прошла почти черезъ 6 знаковъ зодіака, причемъ въ одинъ изъ дней она описала почти 20°. Путь ея весьма сильно отклонялся отъ большого круга и движеніе ея подъ конецъ изъ попятнаго обратилось въ прямое. Несмотря однако на столь необычный путь, теорія отъ начала до конца согласуется

Среднее время 1683 г.	Долгота солнца.	Вычисленная долгота кометы.	Вычисленная широта кометы.	Наблюденная долгота кометы.	Наблюденная широта кометы.	Разности	
						Долгота.	Широта.
			N		*N*		
Іюль $13^{с}12^{ч}55^{м}$	121° 2′30″	103° 5′42″	29°28′13′	103° 6′42′	29°28′20″	+1′ 0″	+0′ 7′
15 11 15	122 53 12	101 37 48	29 34 0	101 39 43	29 34 50	+1 55	+0 50
17 10 20	124 45 45	100 7 6	29 33 30	100 8 40	29 34 0	+1 34	+0 30
23 13 40	130 38 21	95 10 27	28 51 42	95 11 30	28 50 28	+1 3	—1 14
25 14 5	132 35 23	93 27 53	24 24 47	93 27 0	28 23 40	—0 53	—1 7
31 9 42	138 9 22	87 55 3	26 22 52	87 54 24	26 22 25	—0 59	—0 27
31 14 55	138 21 53	87 41 7	26 16 57	87 41 8	26 14 50	+0 1	—2 7
Авг. 2 14 56	140 17 16	85 29 32	25 16 19	85 28 46	25 17 28	—0 46	+1 9
4 10 49	142 2 50	83 18 20	24 10 49	83 16 55	24 12 19	—1 25	+1 30
6 10 9	143 56 45	80 42 23	22 47 5	80 40 32	22 49 5	—1 51	+2 0
9 10 26	146 50 52	76 7 57	20 6 37	76 5 55	20 6 10	—2 2	—0 27
15 14 1	152 47 13	63 30 48	11 37 33	63 26 18	11 32 1	—4 30	—5 32
16 15 10	153 48 2	60 43 7	9 34 16	60 41 55	9 34 13	—1 12	—0 3
18 15 44	155 45 33	54 52 53	5 11 15	54 49 5	5 9 11	—3 48	—2 4
			S		*S*		
22 14 44	159 35 49	41 7 14	5 16 53	41 7 12	5 16 50	—0 2	—0 3
23 15 52	160 36 48	37 2 18	8 17 9	37 1 17	8 16 41	—1 1	—0 28
26 16 2	163 31 10	24 45 31	16 38 0	24 44 0	16 38 20	—1 31	—0 29

съ наблюденіями не хуже нежели теорія планетъ обыкновенно согласуется съ наблюденіями ихъ, какъ это явствуетъ изъ разсмотрѣнія таблицъ ихъ движеній. Однако надо вычитать около двухъ минутъ тамъ, гдѣ движеніе кометы самое быстрое, что можетъ быть достигнуто отнимая 12″ отъ угла между восходящимъ узломъ и перигеліемъ, т.-е. полагая этотъ уголъ равнымъ 49°27′18″. Годовой паралаксъ какъ этой такъ и предыдущей кометы былъ весьма значителенъ, чѣмъ доказывается движеніе земли по ея орбитѣ

Теорія кометъ подтверждается также движеніемъ кометы появившейся въ 1683 году. Оно было попятное и происходило по орбитѣ, плоскость которой составляла съ плоскостью эклиптики почти прямой уголъ. Для этой кометы по вычисленіямъ *Галлея* было:

Долгота восходящаго узла . . . 173°23′
Наклонность . . . . 83°11′

Долгота перигелія . . . . 65°29′30″
Разстояніе перигелія до солнца . 56020 (при полуоси земной орбиты = 100000).
Время прохожденія черезъ перигелій *іюля* 2 с. 3 ч. 50 м.

Сличеніе мѣстъ кометы на этой орбитѣ вычисленныхъ *Галлемъ* и наблюденныхъ *Фламстидомъ* показано въ предыдущей таблицѣ.

Теорія кометъ подтверждается также попятнымъ движеніемъ кометы появившейся въ 1682 году. По вычисленію *Галлея* для этой кометы:

Долгота восходящаго узла . . 51°16′30″
Наклонность . . . . 17°56′ 0″
Долгота перигелія . . . . . 302°52′50″
Разстояніе перигелія до солнца 58328 (при $a = 100000$).

Среднее время прохожденія черезъ перигелій *сентября* 4 с. 7 ч. 39 м.

Сличеніе мѣстъ по наблюденіямъ *Фламстида* и вычисленныхъ по теоріи показано въ слѣдующей таблицѣ.

Истинное время 1682 г.	Долгота солнйа.	Вычисленная долгота кометы.	Вычисленная широта кометы.	Наблюденная долгота кометы.	Наблюденная широта кометы.	Разность	
						Долгота.	Широта.
			N				
Авг. 19с16ч38м	157° 0′ 7″	138°14′28″	25°50′ 7″	138°14′40″	25°49′55″	—0′12″	+0′12′
20 15 38	157 55 52	144 46 23	26 14 42	144 46 22	26 12 52	+0 1	+1 50
21 8 21	158 36 14	149 37 15	26 20 3	149 38 2	26 17 37	—0 47	+2 26
22 8 8	159 33 55	156 29 53	26 8 42	156 30 3	26 7 12	—0 10	+1 30
29 8 20	166 22 40	192 37 54	18 37 47	192 37 49	18 34 5	+0 5	+3 42
30 7 45	167 19 41	195 36 1	17 26 43	195 35 18	17 27 17	+0 43	—0 34
Снт. 1 7 33	169 16 9	200 30 53	15 13 0	200 27 4	15 9 49	+3 49	+3 11
4 7 22	172 11 28	205 42 0	12 23 48	205 40 58	12 22 0	+1 2	+1 48
5 7 32	173 10 29	207 0 46	11 33 8	206 59 24	11 33 51	+1 22	—0 43
8 7 16	176 5 58	209 58 44	9 26 46	209 58 45	9 26 43	—0 1	+0 3
9 7 26	177 5 9	210 44 10	8 49 10	210 44 4	8 48 25	—0 6	+0 45

Теорія подтверждается также попятнымъ движеніемъ кометы появившейся въ 1723 году. Для этой кометы по вычисленію *Брадлея* (профессора астрономіи въ *Оксфордѣ* по каѳедрѣ *Савиля*).

Долгота восходящаго узла . . 14°16′
Наклонность . . . . 49°59′

Долгота перигелія . . . . . 42°15′20″
Разстояніе перигелія до солнца 998651 ($a = 1000000$).

Среднее время прохожденія черезъ перигелій *сентября* 16 с. 16 ч. 10 м.

Сличеніе вычисленныхъ въ этой орбитѣ *Брадлеемъ* мѣстъ кометы съ наблюденными какъ имъ самимъ, такъ его дядею *Поундомъ* и *Галлеемъ* показано въ слѣдующей таблицѣ.

Среднее время 1723 г.	Наблюденная долгота кометы.	Наблюденная широта кометы.	Вычисленная долгота кометы.	Вычисленная широта кометы.	Разность	
					Долгота.	Широта.
Окт. 9с 8ч 5м. . .	307°22′15″	5° 2′ 0″N	307°21′26″	5° 2′47″N	+49″	−47″
10 6 31 . . .	306 41 12	7 44 13	306 41 42	7 43 18	−50	+55
12 7 22 . . .	305 39 58	11 55 0	305 40 19	11 54 55	−21	+ 5
14 8 57 . . .	304 59 49	14 43 50	305 0 37	14 44 1	−48	−11
15 6 35 . . .	304 47 41	15 40 51	304 47 45	15 40 55	− 4	− 4
21 6 22 . . .	304 2 32	19 41 49	304 2 21	19 42 3	+11	−14
22 6 24 . . .	303 59 2	20 8 12	303 59 10	20 8 17	− 8	− 5
24 8 2 . . .	303 55 29	20 55 18	303 55 11	20 55 9	+18	+ 9
29 8 56 . . .	303 56 17	22 20 27	303 56 42	22 20 10	−25	+17
30 6 20 . . .	303 58 9	22 32 28	303 58 17	22 32 12	− 8	+16
Нбр. 5 5 53 . . .	304 16 30	23 38 33	304 16 23	23 38 7	+ 7	+26
8 7 6 . . .	304 29 36	24 4 30	304 29 54	24 4 40	−18	−10
14 6 20 . . .	305 2 16	24 48 46	305 2 51	24 48 16	−35	+30
20 7 45 . . .	305 42 20	25 24 45	305 43 13	25 25 17	−53	−32
Дек. 7 6 45 . . .	308 4 13	26 54 18	308 3 55	26 53 42	+18	+36

Этихъ примѣровъ вполнѣ достаточно для убѣжденія въ томъ, что движеніе кометъ по изложенной нами теоріи представляется не менѣе точно, нежели движеніе планетъ по теоріямъ ихъ [206]).

[206]) Тиссеранъ заканчиваетъ свою Небесную Механику слѣдующими словами: «Законъ Ньютона представляетъ въ общемъ съ весьма большою точностью поступательныя движенія всѣхъ небесныхъ тѣлъ. Обращаясь къ сказанному въ концѣ III тома, можно поражаться, что столь многочисленныя, столь сложныя и нѣкоторыя столь значительныя неравенства движенія луны представляются въ такой мѣрѣ точно теоріею. Правда, коечто остается: — въ промежутокъ времени около двухъ съ половиною столѣтій луна постепенно уклоняется отъ вычисленнаго мѣста до наибольшей величины этого уклоненія въ 15″, такъ что въ продолженіе этого

Поэтому на основанiи этой теорiи могутъ быть перечислены орбиты кометъ и найдены времена обращенiй тѣхъ кометъ которыя движутся по эллиптическимъ орбитамъ, послѣ чего найдутся ихъ малыя оси и разстоянiя афелiевъ отъ солнца.

Комета появившаяся въ 1607 году и имѣвшая попятное движенiе описала орбиту, для которой по вычисленiямъ *Галлея* было:

Долгота восходящаго узла . . .	50°21′
Наклонность	17° 2′
Долгота перигелiя	302°16′
Разстоянiе перигелiя до солнца .	58680 ($a = 100000$).

Время прохожденiя черезъ перигелiй: *октября* 16 с. 3 ч. 50 м.

Эта орбита весьма близко сходится съ орбитою кометы появившейся въ 1682 году. Если это была одна и та же комета появившаяся дважды, то время ея оборота составляетъ 75 лѣтъ и большая ось ея орбиты относится тогда къ большой оси земной орбиты какъ $\sqrt[3]{75 . 75 : 1}$, т.-е. какъ 1778 къ 100. Разстоянiе афелiя этой кометы до солнца относится къ среднему разстоянiю земли до солнца кругло какъ 35 къ 1. Зная это нетрудно будетъ опредѣлить эллиптическую орбиту этой кометы. Но это будетъ вѣрно если черезъ семьдесятъ пять лѣтъ комета дѣйствительно возвратится по этой орбитѣ [207]). Остальные кометы какъ кажется обращаются въ бóльшiе перiоды и значитъ отходятъ дальше отъ солнца.

Впрочемъ кометы вслѣдствiе большого ихъ числа и медленности ихъ движенiй въ афелiяхъ должны нѣсколько возмущать другъ друга и ихъ эксцентриситеты и времена обращенiй должны то нѣсколько увеличиваться, то уменьшаться. Поэтому нельзя ожидать, чтобы та же самая комета возвращалась въ точности черезъ одинаковые перiоды по той же самой ор-

---

столь длиннаго промежутка времени освѣщенный край луны будетъ проходить или немного ранѣе, или немного позднѣе передъ нитями трубы меридiаннаго круга, но это упрежденiе или опозданiе не будетъ превосходить одной секунды во времени.

Точно также положенiя планетъ въ продолженiе полутора столѣтiй точныхъ наблюденiй представляются съ точностью до 2″. Есть одно исключенiе: Меркурiй можетъ имѣть упрежденiе или опозданiе на величину, составляющую въ нѣкоторыхъ мѣстахъ его орбиты до 8″ или около полусекунды во времени къ концу ста лѣтъ. Несогласiя для узла Венеры или перигелiя Марса гораздо менѣе значительны.

Въ заключенiе чувствуется глубокое восхищенiе передъ генiемъ Ньютона и его преемниковъ, передъ громадными работами Леверрье, который въ продолженiе свыше тридцати лѣтъ производилъ свои послѣдовательныя изысканiя надъ всею областью планетной системы, передъ тѣми изысканiями, которыя затѣмъ столь искусно продолжены и развиты Ньюкомбомъ».

[207]) Какъ извѣстно это оправдалось, и комета 1682 года носитъ названiе Галеевой.

битѣ. Достаточно если происходящія измѣненія будутъ не болѣе тѣхъ, какія могутъ быть вызваны этими причинами.

Отсюда можно судить также о причинѣ, почему кометы не заключаются подобно планетамъ въ Зодіакѣ, но блуждаютъ повсюду и носятся съ разнообразными движеніями во всѣхъ областяхъ неба. Это происходитъ на тотъ конецъ, чтобы въ своихъ афеліяхъ, гдѣ движеніе ихъ весьма медленно, онѣ какъ можно дальше отстояли бы другъ отъ друга и притягивались бы взаимно какъ можно слабѣе. По этой причинѣ тѣ кометы, которыя болѣе удаляются отъ солнца, и слѣдовательно медленнѣе движутся въ афеліяхъ, должны и ближе приближаться къ солнцу.

Комета появившаяся въ 1680 году отстояла отъ солнца въ своемъ перигеліи менѣе нежели на одну шестую діаметра солнца, и вслѣдствіе огромной скорости въ такой отъ него близости и нѣкоторой плотности солнечной атмосферы должна была испытать нѣкоторое сопротивленіе, нѣсколько замедлиться и нѣсколько приблизиться къ солнцу; приближаясь при каждомъ ѳборотѣ къ солнцу она наконецъ упадетъ на солнце. Также и въ афеліи, гдѣ она движется весьма медленно, она можетъ быть нѣсколько замедленна притяженіемъ другихъ кометъ и послѣ того упасть на солнце. Такимъ образомъ неподвижныя звѣзды, которыя постепенно истратились на свѣтъ и пары, могутъ возстановляться падающими на нихъ кометами и, получивъ новый запасъ горючаго, могутъ быть приняты за новыя звѣзды. Такого рода тѣ неподвижныя звѣзды, которыя появляются внезапно и въ началѣ имѣютъ весьма сильный блескъ и затѣмъ постепенно пропадаютъ. Такова была звѣзда въ Каѳедрѣ *Кассіопеи*, которую *Корнелій Гемма*, наблюдавшій 8-го ноября 1572 г. эту часть неба, ясной ночью совершенно не видѣлъ, въ слѣдующую же ночь 9-го ноября онъ видѣлъ ее превосходящей своимъ блескомъ всѣ неподвижныя звѣзды и едва уступающей по своему свѣту Венерѣ. *Тихо-Браге* видѣлъ эту звѣзду 11-го числа того же мѣсяца, когда ея блескъ былъ наибольшій, съ тѣхъ поръ онъ наблюдалъ какъ она постепенно убывала и черезъ 16 мѣсяцевъ исчезла совсѣмъ. Въ *ноябрѣ* мѣсяцѣ, когда она впервые появилась, она равнялась по свѣту Венерѣ. Въ *декабрѣ*, нѣсколько ослабѣвъ, она равнялась Юпитеру. Въ январѣ 1573 года она была слабѣе Юпитера но сильнѣе Сиріуса, съ которымъ она сравнялась въ концѣ *февраля* и въ началѣ *марта*. Въ *апрѣлѣ* и *маѣ* она равнялась звѣздамъ второй величины, въ *іюнѣ*, *іюлѣ* и *августѣ* звѣздамъ третьей величины, въ *сентябрѣ*, *октябрѣ* и *ноябрѣ* звѣздамъ четвертой величны. Въ *декабрѣ* 1573 г. и въ *январѣ* 1574 г. звѣздамъ пятой величины, въ *февралѣ* казалась равной звѣздамъ шестой величины и въ *мартѣ* перестала быть видимой. Ея цвѣтъ былъ въ началѣ свѣтлый, бѣловатый и блестящій, затѣмъ желтоватый и въ мартѣ 1573 года красноватый, на подобіе Марса или Альдебарана. Въ маѣ она стала блѣдновато-бѣлой, подобно тому оттѣнку, который наблюдается у Сатурна, этотъ цвѣтъ она сохранила до конца становясь постоянно слабѣе. Такова же была и звѣзда въ правой ногѣ Змѣи, появленіе которой ученики *Кэплера* наблю-

дали 30 сентября ст. ст. 1604 года, и которая превосходила своимъ свѣтомъ Юпитеръ, тогда какъ въ предыдущую ночь совершенно не появлялась. Съ того времени она постепенно убывала и черезъ 15 или 16 мѣсяцевъ совершенно исчезла изъ глазъ.

Говорятъ, что *Гиппархъ* былъ побужденъ къ наблюденіямъ неподвижныхъ звѣздъ и составленію ихъ каталога подобнаго рода новою звѣздою необыкновенно блестящей. Но неподвижныя звѣзды, которыя поочередно появляются и исчезаютъ и блескъ которыхъ наростаетъ постепенно, и которыя по свѣту своему лишь иногда превосходятъ звѣзды третьей величины, представляются относящимися къ другому роду, именно, онѣ вращаясь, то обращены къ землѣ своею свѣтлою, то темною частью.

Пары производимые солнцемъ, неподвижными звѣздами и кометными хвостами могутъ отъ своего тяготѣнія падать въ атмосферы планетъ, здѣсь сгущаться и превращаться въ воду и въ влажные спирты и затѣмъ отъ медленнаго нагрѣванія постепенно переходить въ соли, въ сѣры, въ тинктуры, въ илъ, въ тину, въ глину, въ песокъ, въ камни, въ кораллы и въ другія земныя вещества.

Общее поученіе.

Гипотеза вихрей подавляется многими трудностями. Чтобы планета могла описывать радіусомъ проведеннымъ къ солнцу площади пропорціональныя времени, надо чтобы времена обращеній частей вихря были пропорціональны квадратамъ разстояній ихъ до солнца. Чтобы времена обращеній планетъ находились въ полукубическомъ отношеніи ихъ разстояній до солнца, и времена обращеній частей вихря должны находиться въ полукубическомъ же отношеніи ихъ разстояній до солнца. Чтобы меньшіе вихри вокругъ Сатурна, Юпитера и другихъ планетъ могли сохранять свое обращеніе и спокойно плавать въ вихрѣ солнца, времена обращенія частей солнечнаго вихря должны быть между собою равны. Вращеніе солнца и планетъ вокругъ своихъ осей, которое должно бы согласоваться съ движеніями вихрей, совершенно не согласуется съ этими пропорціями. Движенія кометъ вполнѣ правильны и слѣдуютъ тѣмъ же законамъ какъ и движенія планетъ и не могутъ быть объяснены вихрями. Кометы переносятся по весьма эксцентрическимъ орбитамъ во всѣхъ областяхъ неба чего быть не можетъ, если только вихрей не уничтожить.

Тѣла брошенныя въ нашемъ воздухѣ испытываютъ единственно только сопротивленіе воздуха. Когда воздухъ удаленъ, какъ напр. въ *Бойлевой* пустотѣ, сопротивленіе прекращается, такъ что нѣжнѣйшее перышко и кусочекъ золота падаютъ въ этой пустотѣ съ одинаковою скоростью. Таковы же условія и въ небесныхъ пространствахъ, которыя находятся надъ земною атмосферою. Всѣ тѣла въ этихъ пространствахъ должны двигаться совершенно свободно, поэтому планеты и кометы непрестанно

обращаются, слѣдуя изложеннымъ выше законамъ по орбитамъ постояннаго рода и положенія. По законамъ тяготѣнія онѣ продолжаютъ оставаться на своихъ орбитахъ, но получить первоначальнаго расположенія орбитъ лишь по этимъ законамъ онѣ совершенно не могли.

Шесть главныхъ планетъ обращается вокругъ солнца приблизительно по кругамъ концентрическимъ съ солнцемъ по тому же направленію и приблизительно въ той же самой плоскости. Десять лунъ обращается вокругъ Земли, Юпитера и Сатурна по концентрическимъ кругамъ по одному направленію и приблизительно въ плоскости орбитъ самихъ планетъ. Всѣ эти правильныя движенія не имѣютъ своимъ началомъ механическихъ причинъ, ибо кометы носятся во всѣхъ областяхъ неба по весьма эксцентрическимъ орбитамъ. Вслѣдствіе движенія такого рода кометы проходятъ черезъ орбиты планетъ весьма быстро и легко, въ своихъ же афеліяхъ, гдѣ онѣ движутся медленнѣе и остаются дольше, онѣ весьма далеко отстоятъ другъ отъ друга и весьма мало притягиваютъ другъ друга.

Такое изящнѣйшее соединеніе солнца планетъ и кометъ не могло произойти иначе какъ по намѣренію и по власти могущественнаго и премудраго существа. Если и неподвижныя звѣзды представляютъ центры подобныхъ же системъ, то всѣ онѣ будучи построенны по одинаковому намѣренію подчинены и власти *Единаго*: въ особенности принявъ въ соображеніе, что свѣтъ неподвижныхъ звѣздъ той же природы какъ и свѣтъ солнца и всѣ системы испускаютъ свѣтъ другъ на друга, а чтобы системы неподвижныхъ звѣздъ отъ своего тяготѣнія не падали другъ на друга, онъ ихъ расположилъ въ такихъ огромныхъ одна отъ другой разстояніяхъ.

Сей управляетъ всѣмъ не какъ душа міра, а какъ властитель вселенной, и по господству своему долженъ именоваться Господь Богъ Вседержитель (Παντοκράτωρ) *).

Ибо Богъ есть слово относительное и относится къ рабамъ; божественность есть господство Бога не надъ самимъ собою, какъ думаютъ полагающіе, что Богъ есть душа міра, но надъ рабами. Богъ величайшій есть существо вѣчное, безконечное, вполнѣ совершенное, но существо сколь угодно совершенное безъ господства не есть Господь Богъ. Такъ мы говоримъ: Богъ мой, Богъ вашъ, Богъ *Израиля*, Богъ боговъ и Господь господствующихъ, но мы не говоримъ: мой вѣчный, вашъ вѣчный, вѣчный *Израиля,* вѣчный боговъ, не говоримъ безконечный мой, или совершенный мой, такія наименованія не имѣютъ отношенія къ рабамъ. Слово Богъ обыкновенно означаетъ властитель **) но всякій не властитель есть

---

*) Что означаетъ Повелитель вселенной. (*Прим. автора*).

**) *Пококъ* производитъ латинское слово *deus* (богъ) отъ арабскаго *du* (въ родительномъ падежѣ di) означающемъ господина. Въ этомъ смыслѣ князья называются «dii» (Псал. 84, 6, Іоан. X, 45) и *Моисей* называется «*deus*» брата *Аарона* и *deus* Фараона (Исх. IV, 16 и VII, 1). Въ этомъ же смыслѣ души умершихъ князей прежде язычниками именовались богами, но ложно, ибо они не обладали господствомъ. (*Прим. автора*).

Богъ. Господство духовнаго существа составляетъ сущность божества, истинное—истиннаго, высшее—высшаго, мнимое—мнимаго. Изъ истиннаго господства слѣдуетъ, что истинный Богъ есть живой, премудрый и всемогущій, въ остальныхъ совершенствахъ онъ высшій иначе всесовершеннѣйшій. Онъ вѣченъ и безконеченъ, всемогущъ и всевѣдущъ, т.-е. существуетъ изъ вѣчности въ вѣчность и пребываетъ изъ безконечности въ безконечность, всѣмъ управляетъ и все знаетъ, что было, и что можетъ быть. Онъ не есть вѣчность или безконечность, но онъ вѣченъ и безконеченъ, онъ не есть продолжительность или пространство, но продолжаетъ быть и всюду пребываетъ. Онъ продолжаетъ быть всегда и присутствуетъ всюду, всегда и вездѣ существуя; онъ установилъ пространство и продолжительность. Такъ какъ любая частица пространства существуетъ *всегда* и любое недѣлимое мгновеніе длительности существуетъ *вездѣ*, то несомнѣнно, что творецъ и властитель всѣхъ вещей, не пребываетъ *гдѣ либо* и *когда либо* (а *всегда* и *вездѣ*) Всякая душа обладающая чувствами въ разное время при разныхъ органахъ чувствъ и движеній составляетъ то же самое недѣлимое лицо. Въ длительности находятся послѣдовательныя части, существующія совмѣстно въ пространствѣ, но нѣтъ ни тѣхъ ни другихъ въ личности человѣка, т.-е. его въ мыслящемъ началѣ, и тѣмъ менѣе въ мыслящей сущности Бога. Всякій человѣкъ, поскольку онъ есть предметъ чувствующій, есть единый и тотъ же самый человѣкъ въ продолженіе своей жизни, во всѣхъ своихъ отдѣльныхъ органахъ чувствъ. Богъ есть единый и тотъ же самый Богъ всегда и вездѣ. Онъ вездѣсущъ не по свойству только, но по самой сущности, ибо свойство не можетъ существовать безъ сущности. Въ немъ все содержится и все вообще движется, но безъ дѣйствія другъ на друга *). Богъ не испытываетъ воздѣйствія отъ движущихся тѣлъ, движущіяся тѣла не испытываютъ сопротивленія отъ вездѣсущія Божія. Признано, что необходимо существованіе высшаго божества, поэтому, необходимо чтобы онъ былъ *вездѣ* и *всегда*. Поэтому онъ весь себѣ подобенъ, весь глазъ, весь ухо, весь мозгъ, весь рука, весь сила чувствованія, разумѣнія и дѣйствованія, но по способу совершенно не человѣческому, совершенно не тѣлесному, по способу для насъ совершенно невѣдомому. Подобно тому какъ слѣпецъ не имѣетъ представленія о цвѣтахъ, такъ и мы не имѣемъ представленія о тѣхъ способахъ, коими всемудрѣйшій Богъ все чувствуетъ и все постигаетъ. Онъ совершенно не обладаетъ

---

*) Такого мнѣнія придерживались также древніе. Такъ *Пиѳагоръ* (Cicero, De Natura Deorum lib. I). *Ѳалесъ*, *Анаксагоръ* (Virgilius Georg l. IV, 220) et Aeneid lib. VI, 721); *Philo*, Alleg. lib. I въ началѣ; *Aratus* Phoen. въ началѣ. Также и Свящ. Писаніе. Дѣян. XVII, 27, 28; Іон. XIV, 2. Втор. IV, 39; X, IV. Псал. CXXXIX, 7, 8, 9. Цар. 1-ая, VIII, 27; Іова XII, 12, 13, 14; Іеремія XXIII, 23, 24. Идолопоклонники измышляли, что солнце, луна, звѣзды, души людей и другія части міра суть части высшаго божества, почему имъ слѣдовало поклоняться, но сіе ложно. (*Прим. автора*).

тѣломъ и тѣлеснымъ видомъ, поэтому его нельзя ни видѣть, ни слышать, ни ощущать, вообще его не должно почитать подъ видомъ какой-либо тѣлесной вещи. Мы имѣемъ представленіе о его свойствахъ, но какого рода его сущность совершенно не знаемъ. Мы видимъ лишь образы и цвѣта тѣлъ, слышимъ лишь звуки, ощущаемъ лишь наружныя поверхности, чуемъ лишь запахи и чувствуемъ вкусы: внутреннюю же сущность никакимъ чувствомъ, никакимъ дѣйствіемъ мысли не постигаемъ, тѣмъ меньшее можемъ мы имѣть представленіе о сущности Бога. Мы познаемъ его лишь по его качествамъ и свойствамъ и по премудрѣйшему и превосходнѣйшему строенію вещей и по конечнымъ причинамъ, и восхищаемся по совершенству всего, почитаемъ же и поклоняемся по господству. Ибо мы поклоняемся ему какъ рабы, и Богъ безъ господства, провидѣнія и конечныхъ причинъ, былъ бы ничѣмъ инымъ какъ судьбою и природою. Отъ слѣпой необходимости природы, которая повсюду и всегда одна и та же не можетъ происходить измѣненія вещей. Всякое разнообразіе вещей сотворенныхъ по мѣсту и времени можетъ происходить лишь отъ мысли и воли существа необходимо существующаго. Иносказательно лишь говорится, что Богъ видитъ, слышитъ, говоритъ, смѣется, любитъ, ненавидитъ, желаетъ, даетъ, принимаетъ, радуется, гнѣвается, борется, изготовляетъ, созидаетъ, строитъ, ибо всякая рѣчь о Богѣ складывается по подобію дѣлъ человѣческихъ, конечно несовершенному, а лишь частному.

Вотъ что можно сказать о Богѣ, разсужденіе о которомъ на основаніи совершающихся явленій конечно относится къ предмету Натуральной Философіи.

До сихъ поръ я изъяснялъ небесныя явленія и приливы нашихъ морей на основаніи силы тяготѣнія, но я не указывалъ причины самого тяготѣнія. Эта сила происходитъ отъ нѣкоторой причины, которая проникаетъ до центра солнца и планетъ безъ уменьшенія своей способности и которая дѣйствуетъ не пропорціонально величинѣ *поверхности* частицъ на которыя она дѣйствуетъ (какъ это обыкновенно имѣетъ мѣсто для механическихъ причинъ) но пропорціонально количеству *твердаго* вещества; дѣйствіе которой распространяется повсюду на огромныя разстоянія, убывая пропорціонально квадратамъ разстояній. Тяготѣніе къ солнцу составляется изъ тяготѣнія къ отдѣльнымъ частицамъ его и при удаленіи отъ солнца убываетъ въ точности пропорціонально квадратамъ разстояній даже до орбиты Сатурна, что слѣдуетъ изъ покоя афеліевъ планетъ, и даже до крайнихъ афеліевъ кометъ, если только эти афеліи находятся въ покоѣ. Причину же этихъ свойствъ силы тяготѣнія я до сихъ поръ не могъ вывести изъ явленій, гипотезъ же я не измышляю. Все же, что не выводится изъ явленій должно называться *гипотезою*, гипотезамъ же метафизическимъ, физическимъ, механическимъ, скрытымъ свойствамъ, не мѣсто въ экспериментальной философіи.

Въ такой философіи предложенія выводятся изъ явленій и обоб-

щаются помощію наведенія. Такъ были изучены непроницаемость, подвижность и напоръ тѣлъ, законы движенія и тяготѣніе. Довольно того, что тяготѣніе на самомъ дѣлѣ существуетъ и дѣйствуетъ согласно изложеннымъ нами законамъ и вполнѣ достаточно для объясненія всѣхъ движеній небесныхъ тѣлъ и моря.

Теперь слѣдовало бы кое-что добавить о нѣкоторомъ тончайшемъ эфирѣ проникающемъ всѣ сплошныя тѣла и въ нихъ содержащемся, коего силою и дѣйствіями частицы тѣлъ при весьма малыхъ разстояніяхъ взаимно притягиваются, а при соприкосновеніи сцѣпляются, наэлектризованныя тѣла дѣйствуютъ на бо̀льшія разстоянія, какъ отталкивая такъ и притягивая близкія малыя тѣла, свѣтъ испускается, отражается, преломляется, уклоняется и нагрѣваетъ тѣла, возбуждается всякое чувствованіе, заставляющее члены животныхъ двигаться по желанію, передаваясь именно колебаніями этого эфира отъ внѣшнихъ органовъ чувствъ мозгу и отъ мозга мускуламъ. Но это не можетъ быть изложено вкратцѣ, къ тому же нѣтъ и достаточнаго запаса опытовъ, коими законы дѣйствія этого эфира были бы точно опредѣлены и показаны.

О Ньютоновой теоріи луны.

(Глава III третьяго тома Небесной Механики Тиссерана).

---

§ 1. Въ примѣчаніи 116 данъ выводъ формулъ измѣненія элементовъ эллиптическаго движенія и приведены выраженія проекцій возмущающей силы на радіусъ векторъ возмущаемой планеты $fm'S$, на перпендикуляръ къ нему въ плоскости ея орбиты $fm'T$ и на нормаль къ этой плоскости $fm'W$.

Обозначивъ черезъ a, n, e, p, φ, θ, ω, ε, m, r, w, u, Υ — большую полуось, среднее движеніе, эксцентриситетъ, параметръ, наклонность, долготу узла, долготу перигелія, долготу эпохи, массу, радіусъ векторъ, истинную аномалію, эксцентрическую аномалію и, наконецъ, аргументъ широты возмущаемой планеты P, черезъ m' массу возмущающаго тѣла S и принимая массу T за единицу, будемъ имѣть такія формулы:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m'}{1+m} \cdot \frac{na^3}{\sqrt{1-e^2}}\left(Se\sin w + T\frac{p}{r}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{m'}{1+m} \cdot na^2 \sqrt{1-e^2}\,[S\sin w + T(\cos u + \cos w)] \quad . \; . \; . \quad (2)$$

$$\frac{d\sqrt{p}}{dt} = \frac{m'}{1+m} \cdot na^{\frac{2}{3}}\, Tr \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{m'}{1+m}\,\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\, Wr\cos\Upsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)\,(A)$$

$$\sin\varphi\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{m'}{1+m}\,\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\, Wr\sin\Upsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

$$e\frac{d\omega}{dt} = \frac{m'}{1+m}\, na^2\sqrt{1-e^2}\left[-S\cos w + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin w\right] +$$

$$+ 2e\sin^2\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\theta}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2m'}{1+m}\, naSr + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\frac{d\omega}{dt} + 2\sqrt{1-e^2}\,\sin^2\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad . \; . \quad (7)$$

Условившись означать черезъ λ и λ_1 долготы тѣла P и тѣла S, считаемыя въ плоскости орбиты тѣла P и черезъ β—широту тѣла S отъ той же плоскости, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} S &= -\frac{r}{\rho^3} + \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \cos\beta \cos(\lambda_1 - \lambda) \\ T &= \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \cos\beta \sin(\lambda_1 - \lambda) \\ W &= \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \sin\beta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

причемъ:

$$\rho = PS \quad \text{и} \quad r_1 = TS$$

суть разстоянія отъ возмущающаго тѣла S до планеты P и до главнаго тѣла T, принимаемаго за неподвижное.

§ 2. При разсмотрѣніи движенія луны необходимо сперва имѣть въ виду общія соображенія, высказанныя въ предл. LXVI первой книги и его слѣдствіяхъ, причемъ при разсмотрѣніи дѣйствія силъ T и S можно принимать, что само тѣло S лежитъ въ этой плоскости.

Послѣ этихъ замѣчаній все дальнѣйшее представляетъ переводъ § 14—20 третьяго тома Небесной Механики Тиссерана, причемъ сдѣланы лишь нѣкоторыя отступленія въ обозначеніяхъ, чтобы согласовать ихъ съ принятыми въ нашемъ примѣчаніи 116.

§ 3. Точкою S какъ центромъ (фиг. 210) и радіусомъ ST опишемъ кругъ, пересѣкающій орбиту въ точкахъ C и D, для которыхъ, слѣдовательно, будетъ $\rho = r_1$.

Когда тѣло S весьма удаленное, такъ что отношеніе $TC:TS$ малое, то углы CTS и DTS будутъ близки къ 90° и положенія C и D тѣла P будутъ близки къ квадратурамъ.

Формула (3) напишется въ этомъ случаѣ такъ:

$$\frac{d\sqrt{p}}{dt} = \frac{m'}{1+m} n a^{\frac{3}{2}} r \left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right] r_1 \sin(\lambda_1 - \lambda) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

При переходѣ тѣла P черезъ точки C и D множитель $\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}$ перемѣняетъ знакъ; при переходѣ этого тѣла черезъ точки A и B мѣняетъ знакъ $\sin(\lambda_1 - \lambda)$. Отсюда легко заключить, что площадь, описываемая въ заданное время радіусомъ векторомъ PT, получаетъ свое наибольшее увеличеніе въ сизигіяхъ и свое наибольшее уменьшеніе въ квадратурахъ. Ньютонъ показываетъ это непосредственно въ сл. 2 пред. LXVI, замѣчая, что лишь та слагающая возмущающей силы, которая параллельна ST, производитъ измѣненія въ быстротѣ описанія площади и что между C и A и между A и D эта слагающая на нашемъ чертежѣ направлена влѣво, на другой же половинѣ орбиты—вправо. Разложивъ ее на двѣ силы—одну направленную по радіусу вектору, другую перпендикулярно ему, увидимъ что эта послѣдняя увеличиваетъ описанную площадь отъ C до A и отъ D до B, и уменьшаетъ ее въ двухъ другихъ четвертяхъ.

Ньютонъ отсюда заключаетъ (сл. 3), что при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ тѣло P движется быстрѣе въ сизигіяхъ, нежели въ квадратурахъ и что (сл. 4) кривизна его орбиты въ сизигіяхъ больше, нежели въ квадратурахъ. Въ этихъ предложеніяхъ предполагается, что эксцентриситетъ орбиты равенъ нулю. Обозначая черезъ V и V' скорости въ C и въ A, и черезъ R и R' соотвѣтствующіе радіусы кривизны и черезъ N и N' нормальныя слагающія силы, имѣемъ:

$$\frac{V^2}{R} = N \quad \text{и} \quad \frac{V'^2}{R'} = N'$$

откуда

$$R = \frac{V^2}{N} \quad \text{и} \quad R' = \frac{V'^2}{N'}$$

но $V' > V$; въ точкѣ C нормальная слагающая возмущающей силы равна нулю, въ A эта слагающая отрицательная, слагающая же силы притяженія къ T одинакова въ обоихъ случаяхъ, слѣдовательно

$$N' < N \quad \text{и значитъ} \quad R' > R,$$

поэтому (слѣд. 6) при прочихъ равныхъ условіяхъ тѣло P въ сизигіяхъ удаляется больше отъ тѣла T, нежели въ квадратурахъ.

Большая часть остальныхъ Ньютоновыхъ слѣдствій доставляетъ данныя объ измѣненіи эллиптическихъ элементовъ, когда двѣ изъ трехъ слагающихъ S, T, W возмущающей силы равны нулю.

Положимъ сперва: $T = 0$, $W = 0$, $S < 0$, такъ что тѣло P подвержено дѣйствію центральной возмущающей силы формулы (2), (3), (6) принимаютъ видъ:

$$\frac{de}{dt} = \frac{m'}{1+m} na^2 \sqrt{1-e^2}\, S \sin w$$

$$\frac{dp}{dt} = 0$$

$$e\frac{d\omega}{dt} = -\frac{m'}{1+m} na^2 \sqrt{1-e^2}\, S \cos w.$$

Слѣдовательно, эксцентриситетъ возрастаетъ при переходѣ тѣла отъ перигелія къ афелію, и убываетъ на другой половинѣ орбиты.

Пусть A и B суть концы большой оси, C и D точки орбиты, расположенныя на перпендикулярѣ къ AB, проведенномъ черезъ T, тогда для дуги DBC будетъ

$$\cos w > 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\omega}{dt} > 0$$

большая ось вращается въ прямомъ направленіи.

Для дуги CAD:

$$\cos w < 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\omega}{dt} < 0$$

вращеніе большой оси попятное.

Перемѣна знака S производитъ взаимную замѣну двухъ предыдущихъ заключеній.

Положимъ теперь что $S = 0$, $W = 0$, $T > 0$, т.-е. возмущающая сила перпендикулярна радіусу вектору и дѣйствуетъ въ сторону движенія планеты. Форм. (А) даютъ:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m'}{1+m} \cdot \frac{na^3}{\sqrt{1-e^2}} T \cdot \frac{p}{r}$$

$$\frac{d\sqrt{p}}{dt} = \frac{m'}{1+m} na^{\frac{3}{2}} T \cdot r$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{m'}{1+m} na^2 \sqrt{1-e^2}\, T \cdot (\cos u + \cos w)$$

$$e\frac{d\omega}{dt} = \frac{m'}{1+m} na^2 \sqrt{1-e^2}\, T \cdot \left(1 + \frac{r}{p}\right) \sin w.$$

Значитъ: a и p постоянно возрастаютъ, также какъ и время обращенія. Между перигеліемъ и афеліемъ большая ось вращается въ прямомъ направленіи, на другой половинѣ орбиты это вращеніе попятное.

Имѣемъ:

$$\cos u + \cos w = \frac{e\cos^2 w + 2\cos w + e}{1 + e\cos w} = \frac{e(\cos w + \alpha)(\cos w + \beta)}{1 + e\cos w}$$

причемъ:

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}; \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{1 - e^2}}{e}.$$

Точки для которыхъ $\cos w = -\alpha$, т.-е. такія для которыхъ:

$$\cos u + \cos w = 0 \quad \text{и} \quad \frac{de}{dt} = 0$$

расположены по близости къ C и D, о которыхъ упомянуто выше, когда эксцентриситетъ e малый: поэтому можно сказать, что на протяженіи дуги DBC эксцентриситетъ увеличивается и на протяженіи дуги CAD— уменьшается.

Слѣдствія 6—10 заключаютъ бо́льшую часть этихъ выводовъ.

Положивъ наконецъ: $S = 0$, $T = 0$, $W < 0$, будемъ имѣть формулы:

$$\sin\varphi \frac{d\theta}{dt} = \frac{m'}{1+m} \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} Wr\sin\Upsilon$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{m'}{1+m} \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} Wr\cos\Upsilon$$

даютъ возможность опредѣлить знаки $\frac{d\theta}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$ по знакамъ $\sin\Upsilon$ и $\cos\Upsilon$. Такъ, пока планета остается выше основной плоскости, то $\sin\Upsilon = 0$, $\frac{d\theta}{dt} > 0$ и движеніе узла попятное.

Когда P переходитъ подъ основную плоскость и W сохраняетъ знакъ —, то движеніе узла прямое.

То, что будетъ сказано ниже, доказываетъ, что Ньютону было извѣстно выраженіе $\frac{d\omega}{dt}$ черезъ слагающія S и T возмущающей силы и, весьма вѣроятно, что онъ имѣлъ также и выраженія $\frac{d\theta}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$. Я склоненъ думать (это говоритъ Тиссеранъ), что ему были извѣстны всѣ формулы (A), но что вмѣсто ихъ опубликованія онъ предпочелъ вывести изъ нихъ большое число геометрическихъ слѣдствій, которыя онъ получалъ разсматривая всякій разъ лишь дѣйствіе одной изъ слагающихъ.

§ 4. Прежде чѣмъ показать прекрасные результаты имъ полученные въ теоріи луны, умѣстно напомнить то, что по отношенію къ движенію нашего спутника было установлено наблюденіями.

Было извѣстно, что можно принять, что луна движется по эллиптической орбитѣ, два элемента которой испытываютъ значительныя измѣненія: линія узловъ обладаетъ почти равномѣрнымъ попятнымъ движеніемъ, вслѣдствіе котораго она описываетъ эклиптику приблизительно въ $18\frac{2}{3}$ года (6793 дня); кромѣ того есть небольшое періодическое неравенство, которое можетъ уклонять восходящій узелъ отъ средняго его положенія на $1^\circ 26'$ въ ту и другую сторону. Наклонность сохраняетъ постоянную среднюю величину и колеблется отъ $5^\circ 0'$ до $5^\circ 18'$.

Эллипсъ вращается въ своей плоскости въ прямомъ направленіи почти равномѣрно, вслѣдствіе чего перигей совершаетъ полный оборотъ въ продолженіе 9 лѣтъ (3233 дня); кромѣ того есть періодическое неравенство, которое можетъ уклонять перигей отъ средняго его положенія до 8°41′ въ ту и другую сторону.

Долгота луны подвержена тремъ главнымъ неравенствамъ, которыя суть:

1⁰) *эвекція*

$$1°16'26'' \sin[2(\odot - ☾) - \zeta]$$

гдѣ черезъ ⊙ и ☾ обозначены среднія долготы солнца и луны и черезъ ζ средняя аномалія луны.

2⁰) *варіація*

$$39'30'' \sin 2(\odot - ☾)$$

3⁰) *годовое уравненіе*

$$-11'10'' \sin \zeta'$$

гдѣ ζ′ есть средняя аномалія солнца.

Отсюда видно, что неравенства движенія луны значительны и совершаются въ сравнительно короткіе періоды.

§ 5. Изъ числа лунныхъ неравенствъ по долготѣ Ньютонъ развилъ лишь варіацію, способъ имъ примѣненный представляется Лапласу однимъ изъ самыхъ замѣчательныхъ мѣстъ въ «Началахъ»; мы дадимъ о немъ представленіе пользуясь теперешними обозначеніями и, выражая результаты формулами.

Ньютонъ не разсматриваетъ ни эксцентриситета орбиты ни наклонности ея.

Пусть на фиг. 211 S солнце, T земля, P луна, $ABCD$ ея орбита, точка L взята такъ, чтобы было:

$$SL : ST = ST^2 : SP^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Притяженія солнцемъ единицъ массы земли и луны могутъ быть представлены прямыми ST и SL. Чтобы изучать относительное движеніе луны вокругъ земли надо приложить къ лунѣ силу ST равную и противоположную притяженію солнцемъ земли. Равнодѣйствующая LT силъ LS и ST разлагается Ньютономъ на двѣ другихъ силы LE и ET, изъ коихъ одна перпендикулярна, другая параллельна PT. Составляющая LE есть единственная сила, измѣняющая описываемыя радіусомъ векторомъ луны площади. Найдемъ ея величину. Отложивъ $SK = ST$, имѣемъ:

$$ST = SP + PK; \quad SL = SP + PL$$

подставляя въ пропорцію (1) по упрощеніи имѣемъ:

$$3SP^2 \,.\, PK + 3SP \,.\, PK^2 + PK^3 = PL \,.\, SP^2$$

откуда въ виду малости отношенія $PK : PS$ получаемъ

$$PL = 3PK.$$

Затѣмъ въ прямоугольномъ треугольникѣ PEL

$$LE = PL \,.\, \sin EPL = 3PK \,.\, \sin TPK$$
$$TE + TP = PL \,.\, \cos EPL = 3PK \,.\, \cos TPK.$$

Отсюда замѣтивъ, что уголъ TKP весьма близокъ къ 90°, слѣдуетъ:

$$LE = 3PK \cdot \frac{TK}{TP}; \quad TE = 3PK \frac{PK}{TP} - TP.$$

Пусть λ и λ_1 суть геоцентрическія долготы луны и солнца r, радіусъ векторъ TP, уголъ TPK можно принять за $\lambda_1 - \lambda$, тогда будетъ:

$$LE = 3TP \cdot \sin(\lambda_1 - \lambda)\cos(\lambda_1 - \lambda)$$
$$TE = TP[3\cos^2(\lambda_1 - \lambda) - 1].$$

Чтобы получить абсолютныя величины слагающихъ, надо взять отношенія длинъ LE и TE къ ST и умножить эти отношенія на

$$\frac{m'}{ST^2} = n'^2 ST$$

гдѣ m' означаетъ массу солнца и n' его среднее движеніе. Такимъ образомъ получится:

$$3n'^2 TP \cdot \sin(\lambda_1 - \lambda)\cos(\lambda_1 - \lambda)$$
$$n'^2 TP[3\cos^2(\lambda_1 - \lambda) - 1].$$

Центростремительная сила, производящая обращеніе луны по кругу, равна $n^2 TP$; обозначимъ черезъ m отношеніе $n' : n$ средняго движенія солнца къ среднему движенію луны. Можно будетъ взять

$$\lambda_1 = m\lambda$$

ибо эксцентриситетомъ пренебрегаютъ, тогда принявъ за единицу среднюю величину притяженія луны землею, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} &\text{сила } LE = 3m^2 \sin(m-1)\lambda \cdot \cos(m-1)\lambda = (T) \\ &\text{сила } ET = m^2[3\cos^2(m-1)\lambda - 1] = (S) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Полная центростремительная сила получится вычтя силу ET изъ притяженія $\frac{k}{r^2}$ луны землею, и тогда будетъ:

$$\text{центростремительная сила} = \frac{k}{r^2}[1 + m^2 - 3m^2\cos^2(m-1)\lambda] = F.$$

Ньютонъ опредѣляетъ затѣмъ приращеніе элементарной площади, производимое слагающими (S) и (T). Первая не производитъ никакого измѣненія, вторая вызываетъ измѣненіе перпендикулярной къ радіусу вектору слагающей скорости $r\frac{d\lambda}{dt}$ и будетъ:

$$\frac{d\left(r\frac{d\lambda}{dt}\right)}{dt} = T$$

величина же r отъ дѣйствія силы T не измѣняется; при такомъ условіи будетъ

$$\frac{d\left(r^2\frac{d\lambda}{dt}\right)}{dt} = r \cdot T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Примѣненный Ньютономъ пріемъ въ сущности сводится къ изложенному выше. Соотношеніе (4) равносильно форм. (3) группы А.

Замѣнивъ затѣмъ T его величиною (2), имѣемъ:

$$d\left(\frac{r^2 d\lambda}{dt}\right) = \frac{3}{2} m^2 r \sin 2(m-1)\lambda \,.\, dt \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Если за единицу разстояній взять среднее значеніе r и замѣтить, что средняя величина центростремительной силы $\frac{V^2}{\rho} = 1$, то надо будетъ принять и среднюю скорость луны равной единицѣ. Слѣдовательно, въ правой части форм. (5) можно принять $dt = d\lambda$, тогда получится:

$$r^2 \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3}{2} m^2 \int \sin 2(m-1)\lambda \,.\, d\lambda.$$

Ньютонъ выполняетъ эту квадратуру косвеннымъ путемъ, мы же напишемъ непосредственно ея значеніе, обозначая черезъ h постоянную произвольную:

$$r^2 \frac{d\lambda}{dt} = h + \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-m} \cos 2(m-1)\lambda.$$

Постоянная h весьма близка къ 1, ибо таковы значенія r и $\frac{d\lambda}{dt}$, слѣдовательно будетъ:

$$r^2 \frac{d\lambda}{dt} = h\left[1 + \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-m} \cos 2(m-1)\lambda\right] \quad \ldots\ldots \quad (5')$$

Можно замѣтить, что h есть среднее значеніе $r^2 \frac{d\lambda}{dt}$, оно соотвѣтствуетъ октантамъ, ибо для этихъ точекъ

$$\cos 2(m-1)\lambda = \cos 2(\lambda_1 - \lambda) = 0.$$

§ 6. Квадратъ скорости V луны есть:

$$V^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\lambda^2}{dt^2}.$$

Но если пренебречь эксцентриситетомъ, то $\frac{dr^2}{dt^2}$ того же порядка, какъ квадратъ возмущающей силы и можетъ быть отброшенъ; такимъ образомъ получится, принимая во вниманіе форм. (6) и пренебрегая m^4

$$V^2 = \frac{h^2}{r^2}\left[1 + \frac{3}{2} \frac{m^2}{1-m} \cos 2(m-1)\lambda\right].$$

Пусть $1-x$ и $1+x$ суть значенія r въ сизигіяхъ ($\lambda_1 - \lambda = 0$ или $180°$) и въ квадратурахъ ($\lambda_1 - \lambda = \pm 90°$), V_1, V_0 соотвѣтствующія значенія скорости V, тогда будетъ:

$$V_1^2 = \frac{h^2}{(1-x)^2}\left(1 + \frac{3}{2} \frac{m^2}{1-m}\right)$$

$$V_0^2 = \frac{h^2}{(1+x)^2}\left(1 - \frac{3}{2} \frac{m^2}{1-m}\right)$$

$$\frac{V_1^2}{V_0^2} = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \cdot \frac{1 + \frac{3}{2} \frac{m^2}{1-m}}{1 - \frac{3}{2} \frac{m^2}{1-m}}.$$

Пусть ρ_1 и ρ_0 суть значенія радіуса кривизны въ сизигіяхъ и въ квадратурахъ; по теоремѣ Гюйгенса отношеніе соотвѣтствующихъ центростремительныхъ силъ будетъ:

$$\frac{V_1^2}{V_0^2}\cdot\frac{\rho_0}{\rho_1}=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\left(1+\frac{3m^2}{1-m}\right)\frac{\rho_0}{\rho_1}=\frac{F_1}{F_0}.$$

Но по форм. (3)

$$F_1=k\frac{1-2m^2}{(1-x)^2};\quad F_0=k\frac{1+m^2}{(1+x)^2}$$

подставляя эти величины F_1 и F_0 въ предыдущую формулу, получимъ:

$$\left(1+\frac{3m^2}{1-m}\right)\frac{\rho_0}{\rho_1}=1-3m^2$$

откуда слѣдуетъ

$$\frac{\rho_0}{\rho_1}=1-3m^2\left(1+\frac{1}{1-m}\right).$$

Такимъ образомъ Ньютонъ опредѣлилъ отношеніе радіусовъ кривизны орбиты въ сизигіяхъ и въ квадратурахъ.

Чтобы опредѣлить x Ньютонъ разсматриваетъ лунную орбиту, о которой здѣсь идетъ дѣло (собственный эксцентриситетъ здѣсь отброшенъ) какъ подвижной эллипсъ, въ центрѣ коего находится земля и коего перигелій слѣдитъ за солнцемъ, такъ что малая ось эллипса все время соотвѣтствуетъ сизигію, большая—квадратурѣ.

Лапласъ говоритъ по этому поводу: «такое разсмотрѣніе правильно. но оно требовало бы доказательства (Ньютонъ доказалъ, замѣчаетъ Тиссеранъ, что радіусъ векторъ луны въ квадратурахъ больше, нежели въ сизигіяхъ)... такія предположенія для разсчетовъ, основанныя на представляющихся вѣроятными соображеніяхъ, дозволительны изобрѣтателямъ, въ изысканіяхъ столь трудныхъ»... Въ этомъ предположеніи будетъ:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\sin^2(\lambda_1-\lambda)}{b^2}+\frac{\cos^2(\lambda_1-\lambda)}{a^2},\qquad a^2<b^2$$

откуда, ограничиваясь принятою степенью точности, слѣдуетъ

$$r=\frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[1-\frac{1}{2}\,\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\cos(2\lambda_1-2\lambda)\right]$$

или замѣчая, что среднее значеніе r принято за 1, и что въ сизигіяхъ должно быть $r=1-x$ и въ квадратурахъ $r=1+x$

$$r=1-x\cos 2(m-1)\lambda.$$

Легко найти, исходя изъ этого послѣдняго выраженія для r и пренебрегая x^2, что радіусъ кривизны ρ въ какой-либо точкѣ орбиты выражается такъ:

$$\rho=\frac{r^2}{r-\frac{d^2r}{d\lambda^2}}=\frac{1-2x\cos 2(\lambda_1-\lambda)}{1+[1+4(1-m^2)]x\cos 2(m-1)\lambda}$$

откуда слѣдуетъ:

$$\rho_1 = \frac{1-2x}{1-x[1+4(1-m)^2]}; \quad \rho_0 = \frac{1+2x}{1+x[1+4(1-m)^2]}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = 1 - 2x[4(1-m^2) - 1].$$

Сравнивая съ форм. (7) получаемъ

$$x = \frac{3}{2} m^2 \frac{1 + \frac{1}{1-m}}{4(1-m)^2 - 1} = \frac{3}{2} m^2 \frac{2-m}{(1-m)^2(3-2m)(1-2m)}.$$

Замѣнивъ m его численною величиною $m = 0{,}0748$ получимъ, что отношеніе полуосей эллипса

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{69}{70}.$$

§ 7. Чтобы отсюда вывести заключенія о неравенствѣ названномъ *варіаціей*, Ньютонъ замѣчаетъ, что оно происходитъ частью отъ неодинаковости элементарныхъ площадей, описываемыхъ радіусомъ векторомъ луны, частью отъ эллиптическаго вида орбиты. Предполагая, что луна движется по эллипсу $ABCD$ (фиг. 212) вокругъ находящейся въ покоѣ земли, помѣщенной въ центрѣ, онъ замѣчаетъ, что если радіусъ TP описываетъ площади CTP пропорціональныя времени, то тангенсъ угла CTP будетъ находиться къ тангенсу соотвѣтствующей средней долготы, считаемой отъ TC въ отношеніи

$$\frac{TA}{TC} = \frac{1-x}{1+x} = \frac{69}{70}$$

и затѣмъ, что описаніе площади CTP при переходѣ луны отъ квадратуры къ сизигіямъ должно ускоряться такъ, что ея скорость (секторіальная) въ сизигіяхъ относилась бы къ таковой же въ квадратурахъ какъ $\left(1+\frac{3}{4}m^2\right) : \left(1-\frac{3}{4}m^2\right)$ и чтобы избытокъ этой скорости въ любой моментъ надъ скоростью въ квадратурахъ былъ бы пропорпіоналенъ квадрату синуса угла CTP. Это можетъ быть, какъ онъ говоритъ, *достаточно точно* достигнуто если уменьшить тангенсъ угла CTP въ отношеніи $\sqrt{1-\frac{3}{4}m^2} : \sqrt{1+\frac{3}{4}m^2}$. Ньютонъ такимъ образомъ находитъ, что отношеніе тангенса угла CTP къ тангенсу средней долготы будетъ:

$$\frac{1-x}{1+x}\sqrt{\frac{1-\frac{3}{4}m^2}{1+\frac{3}{4}m^2}} = \frac{68{,}6877}{70}.$$

Разность этихъ двухъ угловъ будетъ наибольшею въ октантахъ, гдѣ средняя долгота равна 45°, такъ что тангенсъ истинной долготы будетъ $\frac{68{,}6877}{70}$ и истинная долгота составитъ 44°27′28″.

Вычитая эту величину изъ 45° получимъ 32′32″ для наибольшей величины варіаціи.

Такъ это было бы, если бы луна переходя отъ квадратуры къ сизигіямъ описывала бы уголъ CTA въ точности равный 90°. Но въ виду

движенія солнца надо предыдущее число увеличить въ отношеніи синодическаго оборота къ звѣздному, послѣ чего получится 35′10″, что мало отличается отъ величины, доставляемой наблюденіями.

Можно провѣрить первое утвержденіе Ньютона: Описаніе по закону площадей неподвижнаго эллипса даетъ мѣсто слѣдующимъ формуламъ:

$$c = r^2 \frac{dv}{dt}; \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 v}{a^2} + \frac{\cos^2 v}{b^2}$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{a}{b} \operatorname{tg} ht; \quad h = \frac{c}{ab}.$$

Положивъ:

$$\operatorname{tg} v' = \mu \operatorname{tg} ht; \quad \frac{1}{r'^2} = \frac{\sin^2 v'}{a^2} + \frac{\cos^2 v'}{b^2}$$

$$r'^2 \frac{dv'}{dt} = c'$$

легко найти:

$$c' = \frac{\mu h}{\frac{\cos^2 ht}{b^2} + \frac{\mu^2 \sin^2 ht}{a^2}} \quad \dots\dots\dots \quad (9)$$

слѣдовательно въ квадратурахъ, гдѣ $ht = 0$, будетъ

$$c' = b^2 \mu h = c_0'$$

и въ сизигіяхъ, гдѣ $h = 90°$

$$c' = \frac{a^2 h}{\mu} = c_1'$$

значитъ будетъ:

$$\frac{c_0'}{c_1'} = \frac{b^2 \mu^2}{a^2}; \quad \mu = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{c_0'}{c_1'}}$$

отсюда на основаніи форм. (6), дающей $\frac{c'_0}{c'_1}$ получается:

$$\operatorname{tg} v' = \frac{1-x}{1+x} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-m}\right) \operatorname{tg} ht.$$

Это и есть Ньютонова формула. Такъ какъ μ, a и b близки съ 1, то значеніе (9) величины c' измѣняется приблизительно пропорціонально $\sin^2 ht$, это же было однимъ изъ условій, которымъ надо было удовлетворить.

Чтобы получить выраженіе самаго неравенства проще поступить такъ, какъ это дѣлаетъ Лапласъ въ своемъ разборѣ Ньютоновой теоріи (Mecanique Celeste t. V livre XVI).

Уравненіе (6) даетъ, замѣнивъ r черезъ $1 - x \cos 2(m-1)\lambda$

$$\frac{d\lambda}{dt} = h\left[1 + \left(2x + \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-m}\right) \cos 2(m-1)\lambda\right].$$

Откуда:

$$\lambda = ht + \lambda_0 + \frac{2x + \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-m}}{2(1-m)} \sin 2(1-m)\lambda \quad \dots\dots \quad (c)$$

гдѣ λ_0 есть нѣкоторая постоянная. Періодическій членъ въ этой формулѣ и представляетъ искомое неравенство, наибольшая его величина есть:

$$\frac{2x + \frac{3}{4}\frac{m^2}{1-m}}{2(1-m)}$$

или замѣнивъ x его величиною и упрощая:

$$\frac{3m^2(11-12m+4m^2)}{8(1-m)^2(3-2m)(1-2m)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

§ 8. Ньютонъ разсматриваетъ также измѣненія наклонности и движеніе узловъ и на основаніи геометрическихъ соображеній находитъ слѣдующія выраженія величины часовыхъ измѣненій:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -3m^2 n \sin(\lambda-\theta)\sin(\lambda_1-\theta)\cos(\lambda-\lambda_1) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -3m^2 n \sin\varphi\cos(\lambda-\theta)\sin(\lambda_1-\theta)\cos(\lambda-\lambda_1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

причемъ n означаетъ часовое движеніе луны. Эти значенія равносильны доставляемымъ формулами (4) и (5) группы (A). Въ самомъ дѣлѣ пусть въ этихъ послѣднихъ z_1 представляетъ разстояніе солнца отъ плоскости орбиты луны, нетрудно видѣть изъ разсмотрѣнія прямоугольнаго треугольника легко замѣчаемаго, что

$$z_1 = -r_1 \sin\varphi \sin(\lambda_1-\theta)$$

кромѣ того, если пренебречь наклонностью, то будетъ:

$$\rho^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\lambda-\lambda_1)$$

откуда

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{r_1^3}\left[1 - \frac{2r}{r_1}\cos(\lambda-\lambda_1) + \frac{r^2}{r_1^2}\right]^{-\frac{3}{2}}$$

или разлагая по степенямъ $\frac{r}{r_1}$:

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{r_1^3}\left[1 + \frac{3r}{r_1}\cos(\lambda-\lambda_1)\right].$$

Такимъ образомъ:

$$W = -\frac{3r}{r_1^3}\sin\varphi\sin(\lambda_1-\theta)\cos(\lambda-\lambda_1)$$

и формулы (4) и (5) группы (A) даютъ, замѣчая, что $\Upsilon = \lambda - \theta$, и обозначивъ массу луны черезъ m_0

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{3m'}{1+m_0}\cdot\frac{n}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{ar^2}{r_1^3}\sin(\lambda-\theta)\sin(\lambda_1-\theta)\cos(\lambda-\lambda_1) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{3m'}{1+m_0}\cdot\frac{n}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{ar^2}{r_1^3}\sin\varphi\cos(\lambda-\theta)\sin(\lambda_1-\theta)\cos(\lambda-\lambda_1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (11)$$

Но

$$\frac{m'}{1+m_0} = \frac{n'^2 a'^3}{n^2 a^3} = m^2\frac{a'^3}{a^3}.$$

Откуда слѣдуетъ, что формулы (10) и (11) совпадаютъ если пренебречь эксцентриситетомъ.

Ньютонъ замѣчаетъ затѣмъ, что часовое движеніе узла то ускоряется, то замедляется въ продолженіе одного луннаго мѣсяца; онъ беретъ среднее значеніе, которое онъ называетъ *среднимъ часовымъ движеніемъ.*

Простое преобразованіе даетъ:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{2} m^2 n \sin(\lambda_1 - \theta)[\sin(\lambda_1 - \theta) + \sin(2\lambda - \lambda_1 - \theta)].$$

Членъ, коего аргументъ есть $2\lambda - \lambda_1 - \theta$ принимаетъ въ продолженіе луннаго мѣсяца положительныя и отрицательныя значенія, которыя приблизительно уничтожаются, поэтому, для средняго часового движенія будетъ:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{2} m^2 n \sin^2(\lambda_1 - \theta) = -\frac{3}{4} m^2 n + \frac{3}{4} m^2 n \cos 2(\lambda_1 - \theta)$$

т.-е. значеніе, которое никогда не бываетъ положительнымъ.

Ньютонъ вычисляетъ среднюю величину $\frac{d\theta}{dt}$ при помощи пріема, равносильнаго предположенію $\lambda_1 - \theta = \psi$, тогда пренебрегая эксцентриситетомъ земной орбиты будетъ:

$$mndt - d\theta = d\psi; \quad d\theta = -\frac{3}{2} m \frac{\sin^2\psi}{1 + \frac{3}{2} m \sin^2\psi} d\psi.$$

Между двумя послѣдовательными прохожденіями солнца черезъ узелъ, θ измѣняется на

$$-\frac{3}{2} m \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\psi}{1 + \frac{3}{2} m \sin^2\psi} d\psi = -\frac{3}{4} m \left(1 - \frac{9}{8} m + \ldots\right) 2\pi.$$

Ньютонъ нашелъ этотъ интегралъ особымъ пріемомъ.

Чтобы получить приращеніе θ въ продолженіе одного звѣзднаго оборота солнца надо предыдущую величину раздѣлить на $1 - \frac{3}{4} m$, что даетъ:

$$-\frac{3}{4} m \left(1 - \frac{3}{8} m + \ldots\right) 2\pi.$$

Умноживъ на $\frac{mn}{2\pi}$ получимъ среднее часовое движеніе:

$$-\frac{3}{4} m^2 n + \frac{9}{8} m^3 n - \ldots$$

найденное Ньютономъ, который добавляетъ сюда еще одинъ малый поправочный членъ порядка m^4, однако неточный. Окончательно оказывается, что имъ исчислена продолжительность оборота узловъ луны съ точностью до $\frac{1}{400}$ ея величины. Онъ нашелъ кромѣ того въ выраженіи θ членъ содержащій множитель $\sin 2(\lambda_1 - \theta)$, соотвѣтствующій неравенству открытому Тихо-Браге, съ коэффиціентомъ приблизительно такой же величины.

Что касается наклонности, то вторая изъ формулы (10) даетъ

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{3}{2} m^2 n \sin\varphi \sin(\lambda_1 - \theta)[\cos(\lambda_1 - \theta) + \cos(2\lambda - \lambda_1 - \theta)]$$

пренебрегая членомъ, содержащимъ $\cos(2\lambda - \lambda_1 - \theta)$, который при исчисленіи средняго приблизительно уничтожается, Ньютонъ находитъ для средней величины часового измѣненія наклонности въ продолженіе луннаго мѣсяца:

$$-\frac{3}{4} m^2 n \sin\varphi \sin 2(\lambda_1 - \theta).$$

Для всей совокупности положеній солнца это количество обращается въ нуль, такъ что среднее значеніе наклонности остается постояннымъ; имѣется лишь одно главное періодическое неравенство съ множителемъ $\cos 2(\lambda_1 - \vartheta)$, которое также хорошо согласуется съ наблюденіями.

Въ поученіи въ концѣ теоріи луны Ньютонъ говоритъ: «Я хотѣлъ предыдущими опредѣленіями движеній луны, показать какимъ образомъ они могутъ быть получены на основаніи производящей ихъ причины». Затѣмъ, онъ заявляетъ, что имъ найдено много другихъ неравенствъ, не излагая методы, которою онъ пользовался. Онъ упоминаетъ, что имъ замѣчено годовое уравненіе, найденное имъ равнымъ 11′50″ (истинное значеніе этого уравненія 11′10″).

§ 9. Недавно изданное сочиненіе бросаетъ новый свѣтъ на успѣхи достигнутые Ньютономъ въ его теоріи луны, заглавіе этого сочиненія: «*A Catalogue of the Portsmouth Collection of Books and Papers written by or belonging to Sir Isaac Newton*», Cambridge, 1888.

Рукописи Ньютона послѣ перехода черезъ разныя руки въ послѣднее время перешли во владѣніе графа Портсмутскаго, который передалъ ихъ Кэмбриджскому Университету, прося его сдѣлать разборъ ихъ и сохранить для себя все, что непосредственно относилось къ наукѣ.

6-го ноября 1872 г. была образована комиссія въ составѣ гг. Luard, Stokes, Adams, и Liveing чтобы разсмотрѣть и разобрать весьма многочисленныя бумаги Ньютона. Въ предисловіи къ упомянутому сочиненію *) сказано, что были найдены важные и не опубликованные результаты лишь относительно трехъ теорій: луны, атмосферной рефракціи и опредѣленія формы тѣла наименьшаго сопротивленія. Относящіяся сюда рукописи были во многихъ мѣстахъ въ плохомъ состояніи пострадавъ отъ огня и воды. Наибольшій интересъ представляетъ относящееся къ движенію луннаго апогея: Ньютонъ устанавливаетъ сперва двѣ леммы, которыми дается движеніе апогея для эллиптической орбиты весьма малаго эксцентриситета, вызываемое возмущающей силой дѣйствующей по направленію радіуса вектора и по направленію ему перпендикулярному. Эти двѣ леммы редактированы тщательно, какъ будто бы онѣ были предназначены для печати вѣроятно для включенія въ новое изданіе «Началъ». Ньютонъ прилагаетъ затѣмъ эти двѣ леммы чтобы найти часовое движеніе перигея и получаетъ результатъ, который можно представить формулою:

$$\frac{d\omega}{dt} = n \frac{1 + \frac{11}{2}\cos(2\lambda_1 - 2\omega)}{238{,}3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

---

*) Этого сочиненія мнѣ достать неудалось, почему я въ дальнѣйшемъ привожу относящееся сюда мѣсто изъ полнаго собранія сочиненій Adams'а. *А. Кр.*

Въ предисловіи указано, что выводъ этой формулы не вполнѣ удовлетворителенъ, и поправки въ рукописи показываютъ, что Ньютонъ не былъ вполнѣ увѣренъ въ величинѣ коэффиціента $\frac{11}{2}$.

Далѣе, говоритъ Тиссеранъ, будетъ показано, что точная формула, ограничиваясь въ ней двумя членами, есть

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} m^2 n [1 + 5\cos(2\lambda_1 - 2\omega)]$$

но

$$m = 0{,}07480; \quad \frac{3}{4} m^2 = \frac{1}{238{,}3}$$

такъ, что получается формула (13) за исключеніемъ того, что коэффиціентъ $\frac{11}{2}$ надо замѣнить черезъ 5. Въ предисловіи добавляется, что Ньютонъ вполнѣ правильно выводитъ изъ формулы (13), что годовое движеніе апогея составляетъ 38°51′51″, тогда какъ астрономическія таблицы даютъ 40°41′,5″.

Въ заключеніе упомянемъ, что сущность двухъ леммъ Ньютона постигается лучше если замѣтить, что формула (6) гр. A, полагая наклонность равной нулю, даетъ:

$$e\frac{d\omega}{dt} = H\left[-S\cos w + T\left(1 + \frac{r}{p}\right)\sin w\right]$$

гдѣ черезъ H обозначена нѣкоторая постоянная. Если во второмъ членѣ пренебречь эксцентриситетомъ, то эта формула принимаетъ видъ:

$$e\frac{d\omega}{dt} = H[-S\cos w + 2T\sin w].$$

Леммы Ньютона составляютъ доказательства этой формулы когда S или T равно нулю.

§ 10. Къ этому разбору теоріи луны Ньютона Тиссераномъ полезно добавить слѣдующія слова Лапласа, который упомянувъ, что Ньютонъ въ предложеніи XLV первой книги получилъ для движенія луннаго апогея въ первомъ приближеніи величину вдвое меньшую, нежели даютъ наблюденія, говоритъ: «но въ теоріи луны, данной имъ въ третьей книгѣ «Началъ» онъ не приводитъ вновь этого результата, который могъ бы нарушить стройность этой теоріи, и который дѣйствительно заставилъ Клэро предполагать, что она требуетъ измѣненій и прибавки въ законѣ притяженія члена обратно пропорціональнаго степени разстоянія выше второй. Этотъ членъ не чувствительный для планетъ становится замѣтнымъ на незначительныхъ разстояніяхъ, такихъ какъ разстояніе до луны.

Это заключеніе Клэро подверглось живымъ нападкамъ со стороны Бюффона, который основывался на соображеніяхъ, что первичные законы природы должны быть величайшей простоты, и ихъ выраженіе должно зависѣть лишь отъ одного модуля и значитъ содержать лишь одинъ членъ. Это соображеніе должно насъ несомнѣнно заставить не усложнять закона притяженія безъ крайней необходимости, но полная неизвѣстность, въ которой мы находимся относительно природы этой силы, не позволяетъ намъ высказываться съ увѣренностью, относительно выраженія ея. Какъ бы то ни было, метафизикъ былъ правъ, и математикъ призналъ свою ошибку и сдѣлалъ важное замѣчаніе, что если продолжить приближенія, то Нью-

тоновъ законъ даетъ весьма близко и движеніе апогея. Этотъ результатъ доложенный Клэро Академіи 17-го мая 1749 года разсѣялъ всѣ сомнѣнія относительно закона тяготѣнія, который Эйлеръ въ своей статьѣ о движеніи Сатурна и Юпитера, вслѣдствіе вкравшейся ошибки въ вычисленіи, призналъ несогласнымъ съ наблюденіями Сатурна».

Движеніе луннаго апогея являлось такимъ образомъ какъ бы пробнымъ камнемъ не только для тооріи луны но и для теоріи тяготѣнія вообще, понятно поэтому, что Ньютонъ по собственному свидѣтельству, затратилъ громадный трудъ въ продолженіе своей жизни на установленіе теоріи луны.

Излагая въ § 6 содержаніе предложенія XXVIII, Тиссеранъ нѣсколько отступаетъ отъ изложенія Ньютона, поэтому здѣсь приводятся относящіеся сюда разсчеты по статьѣ Адамса: «Studies on Newton's lunar Theory (Adams, Scientific Papers, t. II, стр. 228), лишь нѣсколько измѣнивъ обозначенія, чтобы привести ихъ въ соотвѣтствіе съ принятыми выше.

Адамсъ пишетъ: «Примемъ, какъ это дѣлаетъ Ньютонъ въ предложеніи XXVIII, что орбита есть эллипсъ коего малая ось направлена къ сизигію, такъ что его уравненіе будетъ вида:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\cos^2(\lambda-\lambda_1)}{a^2(1-x)^2}+\frac{\sin^2(\lambda-\lambda_1)}{a^2(1-x^2)}=\frac{1}{a^2(1-x^2)}[1+x^2+2x\cos 2(\lambda-\lambda_1)].$$

Если бы линія сизигій сохраняла постоянное направленіе, то кривизна въ концѣ малой оси (A) (фиг. 188), была бы

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\cdot\frac{1}{a(1-x)}=\frac{1}{a(1-x)}\left[1-\frac{4x}{(1+x)^2}\right].$$

Но если принять $\frac{d\lambda_1}{d\lambda}=m$, то кривизна въ той же вершинѣ эллипса (теперь вращающагося) получится, какъ то слѣдуетъ изъ дифференцированія вышеприведеннаго выраженія r:

Въ A—ближней вершинѣ $\frac{1}{a(1-x)}\left[1-\frac{4x}{(1+x)^2}(1-m)^2\right]$.

Въ C—дальней » $\frac{1}{a(1+x)}\left[1+\frac{4x}{(1-x)^2}(1-m)^2\right]$.

Отношеніе первой изъ этихъ кривизнъ ко второй, равно:

$$(1-x)[(1-x)^2(1-m)^2+(1+x)^2(2m-m^2)]:(1+x)[(1+x)^2(1-m)^2+$$
$$+(1-x)^2(2m-m^2)].$$

что и согласуется съ выраженіемъ Ньютона (стр. 497).

Но силы дѣйствующія на луну въ точкахъ A и C суть:

Въ точкѣ A $\frac{\mu}{r^2}-2\frac{m'}{r'^3}$.

» » C $\frac{\mu}{r^2}+\frac{m'}{r'^3}$.

гдѣ μ есть сумма массъ земли и луны, m' — масса солнца, r разстояніе отъ луны до земли, r' разстояніе отъ общаго центра тяжести земли и луны до солнца.

Но:

$$\frac{\mu}{a^3}=n^2\left(1+\frac{1}{2}m^2\right);\quad \frac{m'}{r'^3}=n^2m^2$$

такъ, что отношеніе этихъ силъ равно:

$$\frac{1+\frac{1}{2}m^2}{(1-x)^2}-2m^2(1-x):\frac{1+\frac{1}{2}m^2}{(1+x)^2}+m^2(1+x).$$

Отношеніе это дается Ньютономъ (стр. 498) не вполнѣ правильно

$$\frac{1}{a^2(1-x)^2}-\frac{2m^2}{a^2(1+x)}:\frac{1}{a^2(1+x)^2}+\frac{m^2}{a^2(1-x)}.$$

Но скорости въ точкахъ A и C суть величины $H:r$ гдѣ

$$H=h\left[1+\frac{3}{4}\frac{m^2}{1-m}\cos 2(1-m)\lambda\right]$$

(см. формулу 5'), такъ что ихъ отношеніе есть:

$$\frac{1}{1-x}\cdot\left[1+\frac{3}{4}\frac{m^2}{1-m}\right]:\frac{1}{1+x}\left[1-\frac{3}{4}\frac{m^2}{1-m}\right].$$

Слѣдовательно, отношеніе кривизнъ орбиты въ A и C равно:

$$\frac{[(1+x)^2-2m^2(1-x)^2(1+x)](1-x)^2}{\left(1+\frac{3}{4}\frac{m^2}{1-m}\right)^2}:\frac{[(1-x)^2+m^2(1+x)^2(1-x)](1+x)^2}{\left(1-\frac{3}{4}\frac{m^2}{1-m}\right)^2}.$$

Это отношеніе должно быть равно найденному выше, т.-е.

$$(1-x)[(1-x)^2(1-m)^2+(1+x)^2(2m-m^2)]:(1+x)[(1+x)^2(1-m)^2+$$
$$+(1-x)^2(2m-m^2)]$$

слѣдовательно, получается пропорція, уравнивая въ которой произведенія среднихъ и крайнихъ членовъ имѣемъ:

$$\left(1-\frac{3}{4}\frac{m^2}{1-m}\right)^2[(1+x)^3(1-m)^2+(1-x)^2(1+x)(2m-m^2)-2m^2(1-m)^2(1-x)^2$$
$$(1+x)^2-2m^2(2m-m^2)(1-x)^4=\left(1+\frac{3}{4}\frac{m^2}{1+m}\right)^2[(1+x)^3(1-m)^2+(1-x)(1+x)$$
$$(2m-m^2)+m^2(1-m)^2(1-x)^2(1+x)^2+m^2(2m-m^2)(1+x)^4]$$

это и есть Ньютоново уравненіе стр. 498.

Это уравненіе можно развить въ слѣдующій видъ:

$$\left[1+\frac{9}{16}\frac{m^4}{(1-m)^2}\right]\{-3m^2+[6-4(2-m^2)(2m-m^2)]x+[6m^2-24m^2(2m-m^2)]x^2+$$
$$+[2+4m^2(2m-m^2)]x^3-3m^2x^4\}=\frac{3}{2}\frac{m^2}{1-m}\{2-m^2+12m^2(2m-m^2)x+$$
$$+[6-8(2m-m^2)+2m^2-8m^2(2m-m^2)]x^2+12m^2(2m-m^2)x^3-m^2x\}^4.$$

Пренебрегая сперва всѣми членами четвертаго порядка или членами порядка m^2x, получимъ:

$$x=\frac{3}{2}m^2\frac{2-m}{(1-m)(3-2m)(1-2m)}.$$

Принимая, какъ это дѣлаетъ Ньютонъ

$$m^2 = \frac{1}{178{,}725}$$

т.-е.

$$m = 0{,}0748011$$

имѣемъ

$$x = 0{,}00720475.$$

Въ первомъ изданіи «Началъ» Ньютонъ даетъ 0,0072036, принимая такимъ образомъ во вниманіе только первую степень x. Полное уравненіе для опредѣленія x есть:

$$0 = 0{,}03487783 - 4{,}851179x + 0.02978676x^2 - 2{,}003176x^3 + 0.016735x^4$$

которое весьма близко сходится съ даннымъ Котесомъ. (См. Edleston, Correspondence of Newton and Cotes p. 98). Принимая въ первомъ приближеніи значеніе 0,00719, данное во второмъ изданіи «Началъ», имѣемъ:

$$x = 0.00718973.$$

Уравненіе съ коэффиціентами Котеса даетъ

$$x = 0.00719000.$$

Что касается движенія луннаго апогея, то изъ той же замѣтки Адамса можно привести слѣдующее: «Установивъ двѣ леммы (помѣщенныя въ *Каталогѣ* стр. XXVI) дающія движеніе апогея эллиптической орбиты весьма малаго эксцентриситета производимое дѣйствіемъ весьма малой возмущающей силы: 1) по направленію радіуса вектора, 2) перпендикулярно къ нему Ньютонъ принимаетъ, что видъ орбиты дѣйствительно описываемой луною, находится къ овальной орбитѣ (производимой варіаціей), приблизительно въ такомъ же соотношеніи какъ эллиптическая орбита малаго эксцентриситета съ землею въ фокусѣ къ круговой орбитѣ съ землею въ центрѣ». (*Каталогъ*, стр. XII).

Затѣмъ, Адамсъ пишетъ: «если $\frac{\mu}{r^2} + P$ и Q суть силы направленныя по радіусу вектору и перпендикулярно къ нему, то мы имѣемъ для измѣненія эллиптическихъ элементовъ e, ω орбиты формулы»:

$$\frac{de}{dt}\cos(\lambda-\omega) + e\sin(\lambda-\omega)\frac{d\omega}{dt} = 2\frac{h}{\mu}Q$$

$$-\frac{de}{dt}\sin(\lambda-\omega) + e\cos(\lambda-\omega)\frac{d\omega}{dt} = \frac{h}{\mu}P - \frac{h}{\mu}Q\frac{e\sin(\lambda-\omega)}{1+e\cos(\lambda-\omega)}$$

«изъ которыхъ слѣдуетъ».

$$e\frac{d\omega}{dt} = \frac{h}{\mu}P\cos(\lambda-\omega) + \frac{h}{\mu}Q\sin(\lambda-\omega)\frac{2+e\cos(\lambda-\omega)}{1+e\cos(\lambda-\omega)} \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

Очевидно, что эта послѣдняя формула отличается лишь обозначеніями отъ формулы (6) § 1, т.-е. вмѣсто $-S$ написано P, вмѣсто T написано Q, и такъ какъ предположено $\varphi = 0$, то $w = \lambda - \omega$.

Формула (*) равносильна двумъ леммамъ Ньютона если пренебречь во второй части членами содержащими e.

«Попытаемся теперь», продолжаетъ Адамсъ: «найти на основанiи этого результата движенiе луннаго апогея по способу, которымъ имѣлъ въ виду воспользоваться Ньютонъ».

Пусть λ_0 и r_0 координаты луны при ея движенiи по эллиптической орбитѣ, λ и r дѣйствительныя ея координаты, примемъ, что λ и r связаны съ λ_0 и r_0 уравненiями:

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{11}{8} m^2 \sin 2\lambda_0$$

$$r = r_0(1 - m^2 \cos 2\lambda_0).$$

Это предположенiе приводитъ къ извѣстнымъ результатамъ, когда эллиптическая орбита обращается въ круговую». (См. форм. a и b § 6 и форм. c и d § 7, отбрасывая всѣ степени m выше второй).

«Для простоты солнце принимается неподвижнымъ и пусть h_0 и h суть удвоенныя секторiальныя скорости для этихъ орбитъ, такъ что

$$h_0 = na^2$$

а такъ какъ

$$\frac{d\lambda}{dt} = \left(1 + \frac{11}{4} m^2 \cos \lambda_0\right) \frac{d\lambda_0}{dt} = \frac{h_0}{r_0^2}\left(1 + \frac{11}{4} m^2 \cos 2\lambda_0\right)$$

$$r^2 = r_0^2(1 - 2m^2 \cos 2\lambda_0)$$

то

$$h = h_0\left(1 + \frac{3}{4} m^2 \cos 2\lambda_0\right).$$

Сила дѣйствующая на луну перпендикулярно радiусу вектору была бы при постоянномъ h_0

$$\frac{1}{r}\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{2} m^2 \frac{h_0^2}{r_0^3} \sin 2\theta_0.$$

Сила же на самомъ дѣлѣ по этому направленiю дѣйствующая, приблизительно составляетъ:

$$-\frac{3}{2} m^2 n^2 r \sin 2\lambda = -\frac{3}{2} m^2 . \frac{h_0^2}{a^4} r_0 \sin 2\theta_0$$

разность между этою величиною и предыдущею, если написать

$$r_0 = \frac{a}{1 + e\cos(\lambda - \omega)}$$

и пренебрегать e^2 составитъ:

$$6m^2 n^2 ae \sin 2\lambda_0 \cos(\lambda_0 - \omega).$$

Если бы эта разность равнялась нулю, то эллиптическiе элементы e и ω не претерпѣвали бы измѣненiй отъ силъ перпендикулярныхъ радiусу вектору; слѣдовательно, этою разностью измѣряется сила Q перпендикулярная къ радiусу вектору, которою возмущается эллиптическая орбита (r_0, λ_0).

Сяла дѣйствующая въ направленiи радiуса вектора есть:

$$\frac{h^2}{r^3} - \frac{d^2r}{dt^2} = n^2 a \left\{1 + 2e\cos(\lambda_0 - \omega) + \frac{1}{2} m^2 \cos 2\lambda_0 + \frac{5}{2} m^2 e \cos 2\lambda_0 \cos(\lambda_0 - \omega)\right\}$$

при постоянныхъ элементахъ эллиптической орбиты; но сила дѣйствующая на самомъ дѣлѣ есть:

$$\frac{\mu}{r^2}-\frac{1}{2}n'^2r-\frac{3}{2}n'^2r\cos 2\lambda=\frac{\mu}{a^2}[1+2m^2\cos 2\lambda_0].[1+2e\cos(\lambda_0-\omega)]$$
$$-\frac{1}{2}m^2n^2a[1-e\cos(\lambda_0-\omega)]-\frac{3}{2}m^2n^2a\cos 2\lambda_0[1-e\cos(\lambda_0-\omega)]$$

причемъ вмѣсто r подставлено r_0 и θ_0 вмѣсто θ въ членахъ содержащихъ m^2.

При

$$\frac{\mu}{a^2}=n^2a\left(1+\frac{1}{2}m^2\right)$$

членъ не содержащій e совпадаетъ съ таковымъ же въ первомъ выраженіи, и разность послѣдней силы безъ первой есть:

$$n^2a\left[\frac{3}{2}m^2e\cos(\lambda_0-\omega)+3m^2e\cos 2\lambda_0\cos(\lambda_0-\omega)\right].$$

Это и есть сила P.

Такимъ образомъ имѣемъ уравненіе:

$$\frac{d\omega}{d\lambda}=\cos(\lambda_0-\omega)\left[\frac{3}{2}m^2\cos(\lambda_0-\omega)\right](1+2\cos 2\lambda_0)+$$
$$+2\sin(\lambda_0-\omega).[6m^2\sin 2\lambda_0\cos\lambda_0-\omega)]=$$
$$\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^2\cos 2(\lambda_0-\omega)+\frac{3}{2}m^2\cos 2\lambda_0+\frac{15}{4}m^2\cos 2\omega-\frac{9}{4}m^2\cos(4\lambda_0-2\omega).$$

Въ лекціяхъ по теоріи луны (Лекція XIII), которыя Адамсъ читалъ, имъ получено слѣдующее болѣе точное выраженіе:

$$\frac{d\omega}{d\lambda}=\frac{3}{4}m^2+\frac{141}{16}m^4+\left(\frac{3}{4}m^2-\frac{147}{16}m^4\right)\cos 2(\lambda-\omega)$$
$$+\left(\frac{9}{4}m^2-6m^3+\frac{39}{8}m^2\right)\cos(2-2m)\lambda$$
$$+\left(\frac{15}{4}m^2+\frac{9}{2}m^3+\frac{63}{16}m^4\right)\cos(2m\theta-2\omega)$$
$$+\left(-\frac{3}{2}m^2+\frac{3}{2}m^3+\frac{15}{16}m^4\right)\cos[(4-2m)\theta-2\omega]$$

ссылаясь на которое онъ говоритъ: «сличая предыдущее выраженіе съ этимъ, видно, что періодическіе члены короткихъ періодовъ не правильны, коэффиціенты же членовъ оказывающихъ главное вліяніе правильны съ точностью до того порядка съ которымъ вычисленіе произведено, и припомнивъ, что съ самаго начала мы движеніемъ солнца пренебрегали.

Принявъ просто

$$\frac{d\omega}{d\lambda}=\frac{3}{4}m^2+\frac{15}{4}m^2\cos 2\omega$$

мы получимъ среднюю быстроту измѣненія ω по сравненію съ θ, по примѣненному въ лекціи XIII способу равной

$$\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{32}m^3$$

болѣе же точный результатъ есть

$$\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{32}m^3+\frac{4071}{128}m^4$$

т.-е. оба члена полученные Ньютономъ вѣрны.

Опыты надъ сопротивленіемъ воздуха качаніемъ маятниковъ.

Статья **С. В. Вяхирева.**

Лѣтомъ 1915 г. по предложенію [1]) проф. А. Н. Крылова были произведены въ Опытовомъ Бассейнѣ Морского Министерства опыты тождественные съ опытами Ньютона, при которыхъ онъ изслѣдовалъ сопротивленіе воздуха и опредѣлялъ его по величинѣ погашенія колебаній шароваго маятника.

При постановкѣ этихъ опытовъ имѣлось въ виду главнымъ образомъ сравнить полученные результаты съ данными Ньютона, поэтому, основныя величины, какъ-то: длина маятника, разстояніе отъ оси вращенія точки, отклоненія которой измѣрялись, величина начальнаго ея размаха, діаметръ шара и его удѣльный вѣсъ были взяты приблизительно такими же какъ у Ньютона. Главное вниманіе было обращено на возможно точное опредѣленіе величинъ послѣдовательныхъ размаховъ маятника и на исключеніе побочныхъ сопротивленій.

Для выполненія перваго требованія рѣшено было записывать послѣдовательныя амплитуды колебательнаго движенія шара на движущейся фотографической пластинкѣ; для исключенія же побочныхъ сопротивленій былъ примѣненъ методъ удваиванія дополнительныхъ сопротивленій.

Схема расположенія опыта была слѣдующая. Шаръ A (черт. 213) подвѣшенъ на тонкой нити въ точкѣ O, на этой нити точка B была свѣтящаяся, эту точку съ помощью аппарата K фотографировали на движущуюся равномѣрно пластинку,—такимъ образомъ на пластинкѣ получалась зигзагообразная кривая колебаній маятника; по этому снимку уже измѣрялись послѣдовательные размахи маятника.

Опыты были произведены съ деревянными и свинцовыми шарами; діаметръ деревяннаго шара былъ равенъ $6\frac{7}{8}$ дюйма или 17,46 ст., вѣсъ шара 1300,9 gr. или 41,82 римскихъ унцій, это соотвѣтствуетъ отношенію вѣса шара къ вѣсу такого же объема воды $=0{,}467$. Діаметръ свинцоваго шара былъ равенъ 1,988 дюйма или 5,05 ст., вѣсъ его былъ 770,4 gr. или 24,77 римскихъ унцій, отношеніе вѣса шара къ вѣсу такого же объема воды равно 11,43.

Разстояніе отъ оси вращенія точки, отклоненія которой записывались, въ томъ и другомъ случаѣ было равно $l=121{,}48$ дюйма или 308,55 ст. Величина начальнаго размаха этой точки была около 120 дюймовъ.

---

[1]) См. прим. 159, стр. 364.

Шары были подвѣшены на тонкихъ ($\lambda = 0{,}032$ ст.) стальныхъ проволокахъ; чтобы избѣжать ихъ скручиванія, эти проволоки, когда на нихъ былъ уже подвѣшенъ шаръ съ помощью электрическаго тока нагрѣвались до темнокраснаго каленія.

Ось вращенія и закрѣпленія нитей были осуществлены слѣдующимъ образомъ.

Призма 1 (черт. 214) опиралась на камень 2, укрѣпленный на массивной и очень жесткой подставкѣ (на чертежѣ не показана); къ призмѣ съ помощью перекладины 3 прикрѣплена обойма 4 изъ очень тонкой листовой красной мѣди, на эту обойму опиралась пластинка 5. Къ этой пластинкѣ и къ обоймѣ 4 прикрѣплялись нити 6, 7, 8, 9, 10, на которыхъ подвѣшивались шары. Какъ будетъ указано ниже, шары въ одной серіи опытовъ подвѣшивались на 3-хъ нитяхъ, а въ другой серіи — на пяти. Длинная, тонкая и легкая пластинка 5, укрѣпленная на очень гибкой обоймѣ 4, позволяла легко выравнивать длины нитей подвѣса, кромѣ того при помощи этой же пластинки нити подвѣса можно было удалить другъ отъ друга на опредѣленное разстояніе, а это даетъ право при равной почти длинѣ нитей считать сопротивленіе отдѣльныхъ нитей равноцѣнными. Свѣтящею точкою *B* (черт. 213) служила искра отъ разряда катушки Румкорфа. Въ нити 6 на опредѣленномъ разстояніи отъ оси вращенія была вставлена пластинка 11 (черт. 214) изъ тонкой фибры, въ срединѣ пластинки былъ сдѣланъ вырѣзъ 12, и къ ней прикрѣплялись двѣ проволочки 13 и 14. Проволочка 13 соединялась съ нитью 6, а отъ проволочки 14 шла проволочка, на которой былъ подвѣшенъ шаръ. Между этими проволочками 13 и 14 образовывался искровой промежутокъ, черезъ который происходилъ разрядъ отъ катушки Румкорфа.

Соединеніе съ катушкой было осуществлено такъ: одинъ конецъ проволоки подвѣса 6 черезъ обойму 4, призму 1 и камень 2 соединялся непосредственно съ однимъ концомъ вторичной обмотки катушки. Второй конецъ этой обмотки соединялся съ дугой (15), сдѣланной изъ толстой мѣдной проволоки, выгнутой по дугѣ радіуса равнаго длинѣ маятника и установленной противъ центра качающагося шара, такимъ образомъ во время движенія центръ шара всегда находился передъ дугой. Къ шару со стороны этой дуги противъ его центра была прикрѣплена стальная пластинка 16 (длина $= 7{,}8$ ст., ширина 0,293 ст. и толщина 0,009 ст.), которая проволочкою 17 соединялась съ подвѣсомъ. Въ дальнѣйшемъ эту пластинку будемъ называть разрядной пластинкою. Во время работы катушки Румкорфа искры разряда проскакивали между дугою 15 и разрядною пластинкою 16, а также между концами платиновыхъ проволочекъ 13 и 14 въ фибровой пластинкѣ, слѣдовательно, при непрерывной работѣ катушки между концами этихъ платиновыхъ проволочекъ постоянно появлялась искра; она и служила свѣтящейся точкою при фотографической записи качаній маятника. Какъ уже было сказано, фотографированіе производилось на движущейся пластинкѣ; это движеніе осуществлялось при помощи часового механизма, помѣщеннаго въ спеціально устроенной касетѣ.

При выборѣ фотографическаго объектива было обращено главное вниманіе на то, чтобы были выполнены условія ортоскопіи, т.-е. чтобы угловое увеличеніе системы для сопряженныхъ точекъ предмета и изображенія было величиною постоянною при всякихъ углахъ системы. Простѣйшій объективъ, удовлетворяющій этому требованію, будетъ двойной объективъ, состоящій изъ двухъ совершенно одинаковыхъ оптическихъ системъ, расположенныхъ симметрично относительно вещественной бленды съ очень ма-

ленькимъ отверстіемъ. Этому требованію удовлетворялъ, изъ бывшихъ въ распоряженіи, объективъ Цейса двойной протаръ сер. VII.

Для опредѣленія масштаба снимка, на каждую пластинку фотографировался рядъ нитей, подвѣшенныхъ въ плоскости качанія шара на опредѣленномъ (5 дюймовъ) разстояніи другъ отъ друга. Съ помощью этихъ же нитей провѣрялась правильность установки камеры, т.-е. параллельность плоскости фотографической пластинки и плоскости качанія шара. Эта провѣрка достигалась измѣреніемъ разстоянія между изображеніями нитей при помощи измѣрительной лупы со стеклянною шкалою.

Величина послѣдовательныхъ размаховъ на фотографическихъ пластинкахъ измѣрялась при помощи компаратора изготовленнаго въ Кембриджѣ по системѣ A.-R. Hinks (описаніе см. «The Gambridge Machine for measuring celestial photographs» by A.-R. Hinks, Monhtly notices, Royal astronomical Society, vol. LXI, p. 444). Въ этомъ компараторѣ пластинка помѣщается на рамѣ, которая можетъ перемѣщаться по желанію въ своей плоскости параллельно той или другой серіи линій. Измѣрительный микроскопъ укрѣпленъ неподвижно передъ подвижною рамою. Въ фокальной плоскости его помѣщена шкала съ дѣленіями въ 0,005 мм. Части дѣленій въ 0,005 мм. измѣряются перемѣщеніемъ шкалы въ фокальной плоскости при помощи микрометрическаго винта, съ дѣленіями барабана также въ 0,005 мм.

На измѣненіе величины амплитуды, кромѣ сопротивленія воздуха, приложеннаго къ движущемуся шару, вліяли сопротивленія воздуха приложенныя къ нитямъ и къ разрядной пластинкѣ, а также могла вліять и электрическая искра между разрядной пластинкою и проволочною дугою. Для исключенія этихъ сопротивленій были произведены записи качанія шаровъ на трехъ и на пяти нитяхъ, съ одной и двумя разрядными пластинками, помѣщенными на двухъ концахъ одного и того же діаметра шара (пластинка 18 на черт. № 214). Для исключенія возможнаго вліянія электрической искры были произведены записи качаній шара: во-первыхъ, когда катушка работала непрерывно и, во-вторыхъ, когда катушка работала только въ теченіе $\frac{1}{10}$ времени продолженія всего опыта. Такимъ образомъ, была произведена слѣдущая серія записей качаній шаровъ.

А) Опыты съ деревяннымъ шаромъ.

1) Шаръ былъ подвѣшенъ на трехъ нитяхъ, имѣлъ одну разрядную пластинку, катушка Румкорфа работала непрерывно; записывалось каждое колебаніе шара.

При непрерывной записи на каждой пластинкѣ помѣщалось только 100 колебаній; порядокъ записи былъ принятъ такой: на первой пластинкѣ отъ 1^{аго} до 100^{аго} колебанія; на второй—отъ 50^{аго} до 150^{аго} колебанія; на третьей отъ 100^{аго} до 200^{аго} колебанія и т. д.

2) Шаръ былъ подвѣшенъ на трехъ нитяхъ, имѣлъ одну разрядную пластинку, катушка Румкорфа работала непрерывно; записывались первыя два колебанія изъ каждыхъ 20 колебаній.

3) Шаръ подвѣшенъ на пяти нитяхъ, съ одною разрядною пластинкою, запись производилась непрерывно при постоянной работѣ катушки Румкорфа.

4) Шаръ былъ подвѣшенъ на трехъ нитяхъ, но имѣлъ двѣ разряднымъ пластинки, запись непрерывная при постоянной работѣ катушки.

5) Шаръ подвѣшенъ на трехъ нитяхъ, съ одною разрядною пластинкой,

записывались первые дни колебанія изъ каждыхъ 20 колебаній; катушка работала только во время записи.

В) Опыты съ свинцовыми шарами.

6) Шаръ подвѣшенъ на трехъ нитяхъ; разрядной пластинки не имѣлъ; катушка работала непрерывно; записывались первыя три колебанія изъ каждыхъ 10 колебаній.

Сводка наблюденій.

Результаты этихъ наблюденій приведены въ ниже помѣщаемой таблицѣ. Эта таблица составлена слѣдующимъ образомъ: въ первомъ столбцѣ помѣщены номера размаховъ по порядку; въ столбцѣ подъ цифрою I помѣщены результаты соотвѣтствующіе первому опыту, причемъ даны, какъ для этого опыта, и для всѣхъ остальныхъ величины размаховъ $1^{аго}$, $5^{аго}$ и $10^{аго}$ и т. д. до $250_{аго}$, а далѣе приведены величины для каждаго десятаго размаха т.-е. $250^{аго}$, $260^{аго}$, $270^{аго}$ и т. д. Въ столбцѣ II даны величины размаховъ соотвѣтствующихъ второму опыту; этотъ опытъ былъ произведенъ для контроля первой серіи опытовъ.

Въ столбцѣ III приведены данныя, полученныя при 3-мъ опытѣ.

Въ столбцѣ IV даны величины размаховъ для 4-го опыта.

Въ столбцѣ V даны величины размаховъ для 5-го опыта.

Въ столбцѣ VI даны величины размаховъ деревяннаго шара послѣ исключенія сопротивленій нитей подвѣса и разрядной пластинки.

Въ столбцѣ VII даны величины размаховъ соотвѣтствующія 6-му опыту.

Въ столбцѣ VIII даны величины размаховъ свинцоваго шара послѣ исключенія сопротивленія нитей подвѣса.

Періоды колебаній были для деревяннаго шара $t_1 = 3{,}608$ сек., для свинцоваго шара $t_2 = 3{,}623$ сек.

Эти величины періодовъ получены какъ среднія для 1200 полныхъ колебаній.

Сопротивленія нитей и разрядной пластинки были исключены слѣдующимъ образомъ.

Были построены кривыя (черт. Л. 38) соотвѣтствующія каждой серіи опытовъ, причемъ по оси абсциссъ откладывались величины размаховъ, а по оси ординатъ соотвѣтствующія погашенія размаховъ. Затѣмъ былъ взятъ первый размахъ въ 271,81 ст. для него опредѣлено было по кривымъ истинное погашеніе, отсюда опредѣлялась величина второго размаха, по кривымъ находилось для этого второго размаха истинное погашеніе, затѣмъ опредѣлялась величина третьяго размаха и т. д.

Таблица послѣдовательныхъ величинъ розмаховъ шаровыхъ маятниковъ по опытамъ, произведеннымъ въ Опытовомъ Судостроит. Бассейнѣ.

№№ розмаховъ.	Величины розмаховъ въ ст. — Для деревяннаго шара. I	II	III	IV	V	VI	Для свинц. шара. VII	VIII
1	271,42		271,81	271,81		271,81	279,99	279,99
5	258,56	258,54	257,14	258,51	258,07	262,09	274,18	277,98
10	243,88		240,44	243,41		251,02	268,70	275,98
15	230,48		225,42	229,71		240,53	263,64	274,00
20	218,23		211,97	217,31		230,60	258,84	272,04
25	207,05		199,88	206,01		221,21	254,25	270,09
30	196,79		188,97	195,66		212,34	249,83	268,16
35	187,33		179,10	186,16		203,97	245,56	266,24
40	178,60	178,51	170,19	177,46	178,34	196,07	241,42	264,34
45	170,52		162,09	169,46		188,61	237,40	262,46
50	163,06		154,70	162,06		181,55	233,49	260,58
55	156,12		147,93	155,16		174,85	229,68	258,73
60	149.67		141,68	148,76		168,50	225,97	256,89
65	143,70		135,91	142,81		162,48	222,37	255,06
70	138,10		130,52	137,26		156,77	218,87	253,26
75	132,89		125,50	132,06		151,35	215,46	251,46
80	128,00	127,94	120,81	127,16	127,92	146,21	212,14	249,68
85	123,43		116,42	122,56		141,34	208,91	247,92
90	119,13		112,31	118,26		136,74	205,77	246,16
95	115,07		108,44	114,21		132,40	202,71	244,43
100	111,20		104,80	110,41		128,31	199,13	242,70
105	107,54		101,36	106,86		124,46	196,83	240,99
110	104,10		98,13	103,51		120,84	194,00	239,30
115	100,84		95,11	100,36		117,40	191,25	237,62
120	97,76	97,76	92,27	97,41	97,81	114,21	188,56	235,95
125	94,84		89,60	94,61		111,21	185,93	234,30
130	92,08		87,11	91,96		108,38	183,35	232,66
135	89,46		84,76	89,46		105,70	180,82	231,03
140	87,00		82,53	87,06		103,15	178,32	229,42
145	84,68		80,40	84,76		100,72	175,87	227,82
150	82,48		78,37	82,56		98,40	173,47	226,23
155	80,44		76,45	80,46		96,18	171,12	224,66
160	78,53	78,53	74,59	78,46	78,57	94,06	168,82	223,10
165	76,71		72,85	76,56		92,03	166,56	221,55
170	75,00		71,19	74,76		90,08	164,34	220,01
175	73,37		69,61	73,06		88,20	162,16	218,49
180	71,82		68,10	71,46		86,39	160,02	216,98
185	70,34		66,65	69,96		84,65	157,90	215.48
190	68,92		65,25	68,56		82,97	155,84	214,00

№№ розмаховъ.	Величины розмаховъ въ ст. — Для деревяннаго шара. I	II	III	IV	V	VI	Для свинц. шара, VII	VIII
195	67,57		63,92	67,26		81,36	153,82	212,52
200	66,26	66,26	62,64	66,01	66,44	79,80	151,84	211,06
205	65,01		61,40	64,81		78,31	149,90	209,61
210	63,81		60,21	63,66		76,86	148,00	208,17
215	62,66		59,07	62,56		75,48	146,14	206,74
220	61,55		57,99	61,51		74,16	144,32	205,33
225	60,48		56,96	60,46		72,89	142,54	203,93
230	59,45		55,97	59,46		71,67	140,79	202,54
235	58,48		55,02	58,49		70,49	139,08	201,16
240	57,53	57,55	54,11	57,53	57,68	69,36	137,40	199,79
245	56,58		53,23	56,58		68,27	135,76	198,43
250	55,63		52,39	55,64		67,23	134,15	197,08
260	53,81		50,80	53,87		65,23	131,03	194,43
270	52,09		49,32	52,21		63,32	129,04	191,81
280	50,47	50,52	47,95	50,68	50,83	61,50	126,15	189,24
290	49,00		46,62	49,26		59,76	123,37	186,70
300	47,69		45,35	47,93		58,11	120,69	184,21
310	46,44		44,13	46,68		56,54	118,12	181,76
320	45,24	45,20	42,95	45,50	45,73	55,05	115,65	179,36
330	44,16		41,91	44,39		53,63	113,27	176,99
340	43,21		40,91	43,34		52,28	110,99	174,66
350	42,31		39,95	42,34		50,99	108,79	172,36
360	41,47	41,48	39,03	41,38	41,70	49,76	106,67	170,10
370	40,67		38,14	40,47		48,59	104,63	167,88
380	39,92		37,29	39,60		47,47	102,67	165,70
390	39,22		36,47	38,76		46,40	100,79	163,56
400	38,52	38,58	35,68	37,96	38,93	45,37	98,97	161,44
410	37,82		34,92	37,19		44,36	97,21	159,36
420	37,02		34,19	36,45		43,41	95,51	157,32
430	36,35		33,49	35,74		42,50	93,87	155,31
440	35,75	35,72	32,82	35,06	35,98	41,63	92,29	153,33
450	35,15		32,18	34,41		40,80	90,76	151,38
460	34,56		31,56	33,78		40,01	89,27	149,47
470	33,96		30,97	33,17		39,25	87,82	147,59
480	33,39	33,40	30,40	32,58	33,50	38,52	86,41	145,74
490	32,83		29,84	32,01		37,81	85,04	143,91
500	32,30		29,30	31,46		37,13	83,71	142,12
510	31,78		28,78	30,92		36,47	82,42	140,36
520	31,26	31,27	28,28	30,40	31,32	35,84	81,15	138,62

№№ розмаховъ.	Величины розмаховъ въ ст.							
	Для деревяннаго шара.						Для свинц. шара.	
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
530	30,75		27,79	29,90		35,23	79,92	136,92
540	30,27		27,32	29,41		34,64	78,71	135,24
550	29,81		26,86	28,94		34,07	77,53	133,59
560	29,36	29,38	26,41	28,48	29,38	33,52	76,37	131,96
570	28,93		25,97	28,03		32,98	75,23	130,37
580	28,50		25,54	27,60		32,46	74,12	128,80
590	28,08		25,14	27,18		31,95	73,03	127,25
600	27,66	27,67	24,74	26,77	27,72	31,46	71,96	125,73
610	27,26		24,35	26,37		30,98	70,91	124,24
620	26,86		23,97	25,98		30,52	69,88	122,76
630	26,48		23,60	25,60		30,07	68,86	121,32
640	26,11	26,10	23,24	25,23	26,16	29,63	67,86	119,89
650	25,75		22,88	24,87		29,20	66,88	118,49
660	25,39		22,53	24,52		28,78	65,92	117,11
670	25,04		22,19	24,18		28,37	64,98	115,34
680	24,70	24,66	21,86	23,85	24,70	27,97	64,05	114,42
690	24,37		21,53	23,53		27,58	63,14	113,11
700	24,05		21,21	23,21		27,20	62,24	111,82
710	23,74		20,90	22,90		26,83	61,36	110,56
720	23,43	23,44	20,59	22,60	23,53	26,47	60,50	109,31
730	23,13		20,29	22,31		26,12	59,65	108,08
740	22,83		20,00	22,02		25,78	58,81	106,87
750	22,54		19,71	21,74		25,44	57,99	105,68
760	22,26	22,21	19,43	21,46	22,28	25,11	57,18	104,51
770	21,98		19,16	21,19		24,78	56,38	103,36
780	21,71		18,89	20,93		24,46	55,60	102,23
790	21,45		18,63	20,67		24,14	54,84	101,12
800	21,19	20,72	18,37	20,42	21,23	23,83	54,09	100,02
810	20,94		18,12	20,17		23,53	53,35	98,95
820	20,64		17,87	19,93		23,23	52,63	97,89
830	20,46		17,63	19,69		22,94	51,92	96,85
840	20,22	20,24	17,39	19,46	20,25	22,65	51,22	95,82
850	19,98		17,16	19,23		22,37	50,54	94,82
860	19,76		16,93	19,01		22,10	49,87	93,83
870	19,54		16,71	18,79		21,85	49,21	92,85
880	19,32	19,38	16,49	18,57	19,43	21,60	48,56	91,89
890	19,10		16,28	18,36		21,36	47,92	90,94
900	18,89		16,07	18,15		21,13	47,30	90,02
910	18,69		15,87	17,95		20,90	46,68	89,11

№№ розмаховъ.	Величины розмаховъ въ ст.							
	Для деревяннаго шара.						Для свинц. шара.	
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
920	18,49	18,50	15,67	17,75	18,54	20,67	46,08	88,20
930	18,29		15,47	17,55		20,44	45,49	87,32
940	18,09		15,28	17,36		20,21	44,91	86,45
950	17,89		15,09	17,17		19,98	44,35	85,60
960	17,71	17,70	14.91	16,98	17,91	19,75	43,80	84,76
970	17,53		14,73	16,80		19,52	43,26	83,93
980	17,35		14,55	16,62		19,29	42,73	83,11
990	17,17		14,38	16,44		19,06	42,21	82,31
1000	16,99	17,00	14,21	16,26	17,03	18,84	41,71	81,52
1010	16,81		14,04	16,09		18,62	41,22	80,75
1020	16,63		13,88	15,92		18,41	40,74	80,02
1030	16,45		13,72	15,75		18,20	40,27	79,32
1040	16,29	16,28	13,56	15,59	16,34	17,99	39.81	78,62
1050	16,13		13,40	15,43		17,79	39,37	77,92
1060	15,97		13,25	15,27		17,61	38,93	77,23
1070	15,81		13,10	15,11		17,43	38,51	76,56
1080	15,65	15,64	12,95	14,95	15,68	17,25	38,09	75,89
1090	15,49		12,80	14,80		17,07	37,69	75,24
1100	15,33		12,65	14,65		16,89	37,29	74,59
1110	15,19		12,51	14,50		16,71	36,91	73,95
1120	15,05	15,10	12,37	14,35	15,21	16,53	36,53	73,32
1130	14,91		12,23	14,20		16,35	36.17	72,69
1140	14,77		12,09	14,06		16,19	35,81	72,08
1150	14,63		11,96	13,92		16.03	35,47	71,48
1160	14,49	14,45	11,83	13,78	14,56	15,87	35,13	70,88
1170	14,35		11,70	13,64		15,71	34,81	70,29
1180	14,21		11,57	13,50		15.55	34,49	69,72
1190	14,07		11,44	13.37		15.39	34,29	69,13
1200	13,93	13,93	11,31	13,24	14,02	15,23	33,89	68,56
1210	13,79		11,18	13,11		15,09	33,61	68,01
1220	13,66		11,05	12,98		14,95	33,33	67,46
1230	13,53		10.93	12,85		14,81	33,07	66.91
1240	13,41	13.41	10,81	12,72	13,51	14,67	32,81	66,38
1250	13,29		10,69	12,60		14,53	32,57	65,84
1260	13,17		10,57	12.48		14,39	32,33	65,32
1270	13,05		10,45	12,36		14,25	32,10	64,81
1280	12,93	12.97	10,33	12,24	13,03	14,11	31,88	64,30
1290	12,81		10,21	12,12		13,97	31,66	63,80
1300	12,69		10,09	12,00		13,83	31,46	63,30

№№ розмаховъ.	Величины розмаховъ въ ст.							
	Для деревяннаго шара.						Для свинц. шара.	
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1310	12,57		9,97	11,89		13,70	31,26	62,81
1320	12,45	12,44	9,86	11,78	12,51	13,57	31,08	62,33
1330	12,33		9,75	11,67		13,44	30,92	61,86
1340	12,23		9,64	11,56		13,32	30,78	61,39
1350	12,13		9,53	11,45		13,20	30,64	60,92
1360	12,03	12,01	9,42	11,35	12,04	13,08	30,52	60,47
1370	11,93		9,31	11,25		12,96	30,40	60,02
1380	11,83		9,20	11,15		12,84	30,30	59,57
1390	11,73		9,09	11,05		12,72	30,10	59,13
1400	11,63	11,61	8,98	10,95	11,61	12,60	30,02	58,70
1410	11,53		8,88	10,85		12,48		58,27
1420	11,43		8,78	10,75		12,36		57,85
1430	11,33		8,68	10,65		12,24		57,44
1440	11,23		8,58	10,55		12,14		57,03
1450	11,13		8,49	10,45		12,04		56,62
1460	11,03		8,40	10,35		11,94		56,22
1470	10,93		8,31	10,25		11,84		55,83
1480	10,83		8,22	10,15		11,74		55,44
1490	10,73		8,14	10,06		11,64		55,06
1500	10,63		8,06	9,97		11,54		54,68
1510	10,53		7,98	9,88		11,44		54,31
1520	10,43		7,91	9,79		11,34		53,94
1530	10,33		7,84	9,70		11,24		53,58
1540	10,23		7,77	9,61		11,14		53,22
1550	10,13		7,70	9,52		11,04		52,86
1560	10,04		7,63	9,43		10,94		52,51
1570	9,95		7,57	9,35		10,84		52,17
1580	9,86		7,51	9,27		10,74		51,83
1590	9,77		7,45	9,19		10,64		51,50
1600	9,68		7,39	9,11		10,54		51,17
1610	9,59		7,33	9,03		10,44		50,84
1620	9,50		7,27	8,95		10,34		50,52
1630	9,41		7,21	8,87		10,24		50,20
1640	9,33		7,15	8,79		10,14		49,89
1650	9,25			8,71		10,05		49,58
1660	9,17			8,63		9,96		49,27
1670	9,09			8,55		9,87		48,98
1680	9,01			8,47		9,78		48,68
1690	8,93			8,39		9,69		48,39

№№ розмаховъ.	Величины розмаховъ въ ст.							
	Для деревяннаго шара.						Для свинц. шара.	
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1700	8,85			8,31		9,60		48,10
1710	8,77			8,24		9,51		47,81
1720	8,69			8,17		9,42		47,53
1730	8,61			8,10		9,34		47,25
1740	8,53			8,03		9,26		46,98
1750	8,45			7,96		9,18		46,71
1760	8,37			7,89		9,10		46,44
1770	8,30			7,82		9,02		46,18
1780	8,23			7,75		8,94		45,92
1790	8,16			7,68		8,86		45,66
1800	8,09			7,61		8,78		45,41
1810	8,02			7,54		8,70		
1820	7,95			7,47		8,62		
1830	7,88			7,40		8,54		
1840	7,81			7,33		8,46		
1850	7,74			7,26		8,38		
1860	7,67			7,19		8,31		
1870	7,60			7,12		8,24		
1880	7,53					8,17		
1890	7,46					8,10		
1900	7,39					8,03		
1910	7,32					7,96		
1920	7,26					7,89		
1930	7,20					7,82		
1940	7,14					7,75		
1950	7,08					7,68		
1960						7,61		
1970						7,54		
1980						7,47		
1990						7,40		
2000						7,33		
2010						7,27		
2020						7,21		
2030						7,15		
2040						7,09		

Въ заключеніе сопоставимъ результаты полученные при вышеприведенныхъ опытахъ для деревяннаго шара съ таковыми же, полученными Ньютономъ. Для этого мы сдѣлали такіе же подсчеты какъ дѣлалъ Ньютонъ; результаты этихъ подсчетовъ приведены въ слѣдующихъ таблицахъ.

Величины начальныхъ розмаховъ ст.	Числа розмаховъ, послѣ которыхъ утрачивается $^1/_8$ величины начальнаго розмаха.		Числа розмаховъ, послѣ которыхъ утрачивается $^1/_4$ величины начальнаго розмаха.	
	По опытамъ произведеннымъ въ Опытн. Бассейнѣ.	По опытамъ Ньютона.	По опытамъ произведеннымъ въ Опытн. Бассейнѣ.	По опытамъ Ньютона.
10,16	148,2	164	320,5	374
20,32	115,3	121	264,2	272
40,64	72,6	69	168,9	162,5
81,28	37,0	35,5	87,8	83,5
162,56	19,2	18,5	43,7	41,7

Разности восходящей и нисходящей части розмаха, соотвѣтствующія среднему розмаху при погашеніи $^1/_8$ части начальнаго розмаха.		Разности восходящей и нисходящей части розмаха, соотвѣтствующія среднему розмаху при погашеніи $^1/_4$ части начальнаго розмаха.	
Полученныя по опытамъ Опытнаго Бассейна въ ст.	Полученныя Ньютономъ въ ст.	Полученныя по опытамъ Опытнаго Бассейна въ ст.	Полученныя Ньютономъ въ ст.
0,0042	0,0039	0,0040	0,0034
0,0110	0,0105,	0,0096	0,0093
0,0262	0,0276	0,0226	0,0235
0,0687	0,0715	0,0579	0,0608
0,1654	0,1716	0,1453	0,1523

Ньютонъ полагаетъ, что вышеприведенныя разности восходящей и нисходящей части размаха равны $AV + BV^{3/2} + CV^2$, гдѣ V наибольшая скорость при какомъ-либо размахѣ.

Для опредѣленія величинъ A, B и C, Ньютонъ считаетъ наибольшія скорости пропорціональными величинамъ цѣлыхъ размаховъ, принимаетъ

скорость во второмъ случаѣ за единицу, при этомъ онъ получаетъ слѣдующія значенія для A, B и C.

$$A = 0{,}0000916;\ B = 0{,}0010847;\ C = 0{,}0029558.$$

Если такимъ же образомъ опредѣлить эти величины изъ нашихъ опытовъ то мы получимъ слѣдующія для нихъ значенія.

При опредѣленіи изъ перваго, третьяго и пятаго случая

$$A = 0{,}0031,\ B = 0{,}0079 \text{ и } C = -0{,}0006;$$

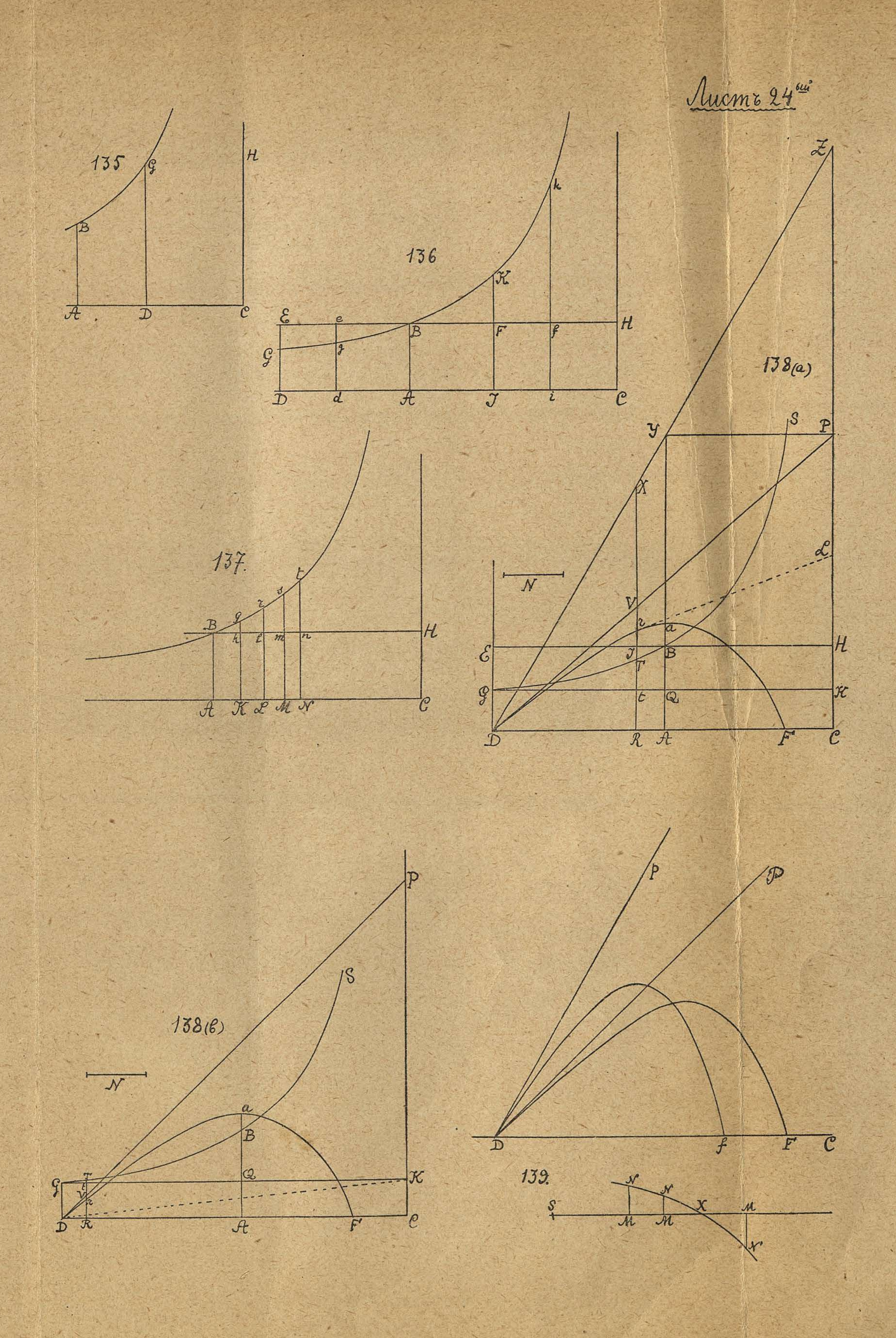
при опредѣленіи же изъ второго, четвертаго и пятаго случая

$$A = 0{,}0027,\ B = 0{,}0094 \text{ и } C = -0{,}0011.$$

Здѣсь главное расхожденіе съ величинами найденными Ньютономъ, получается для C; у Ньютона C величина положительная и большая нежели A, у насъ же она отрицательная. Это вполнѣ подтверждается также результатами, которые мы получили при попыткахъ найти уравненіе кривой погашеній.

Къ сожалѣнію, мы не считаемъ возможнымъ привести данныя этихъ подсчетовъ, такъ какъ намъ не удалось найти уравненія такой кривой, которое бы вполнѣ выражало законы погашенія размаховъ въ зависимости отъ времени, однако слѣдуетъ замѣтить, что для размаховъ бо̀льшихъ 80 ст. отношеніе величины размаха къ его погашенію остается величиною постоянною, это справедливо какъ для деревяннаго, такъ и свинцоваго шара.




135
B
G
H
A
D
C
136
E
e
B
H
G
g
K
F
f
k
D
d
A
J
i
C
137.
B
g
r
s
t
H
h
l
m
n
A
K
L
M
N
C
138(a)
Z
Y
P
S
X
N
L
V
r
a
E
J
B
H
T
G
t
Q
K
D
R
A
F
C
138(b)
P
S
N
a
B
G
T
Q
K
V
D
R
A
F
C
P
P
D
f
F
C
139.
N
N
S
M
M
X
M
N'

140

141.

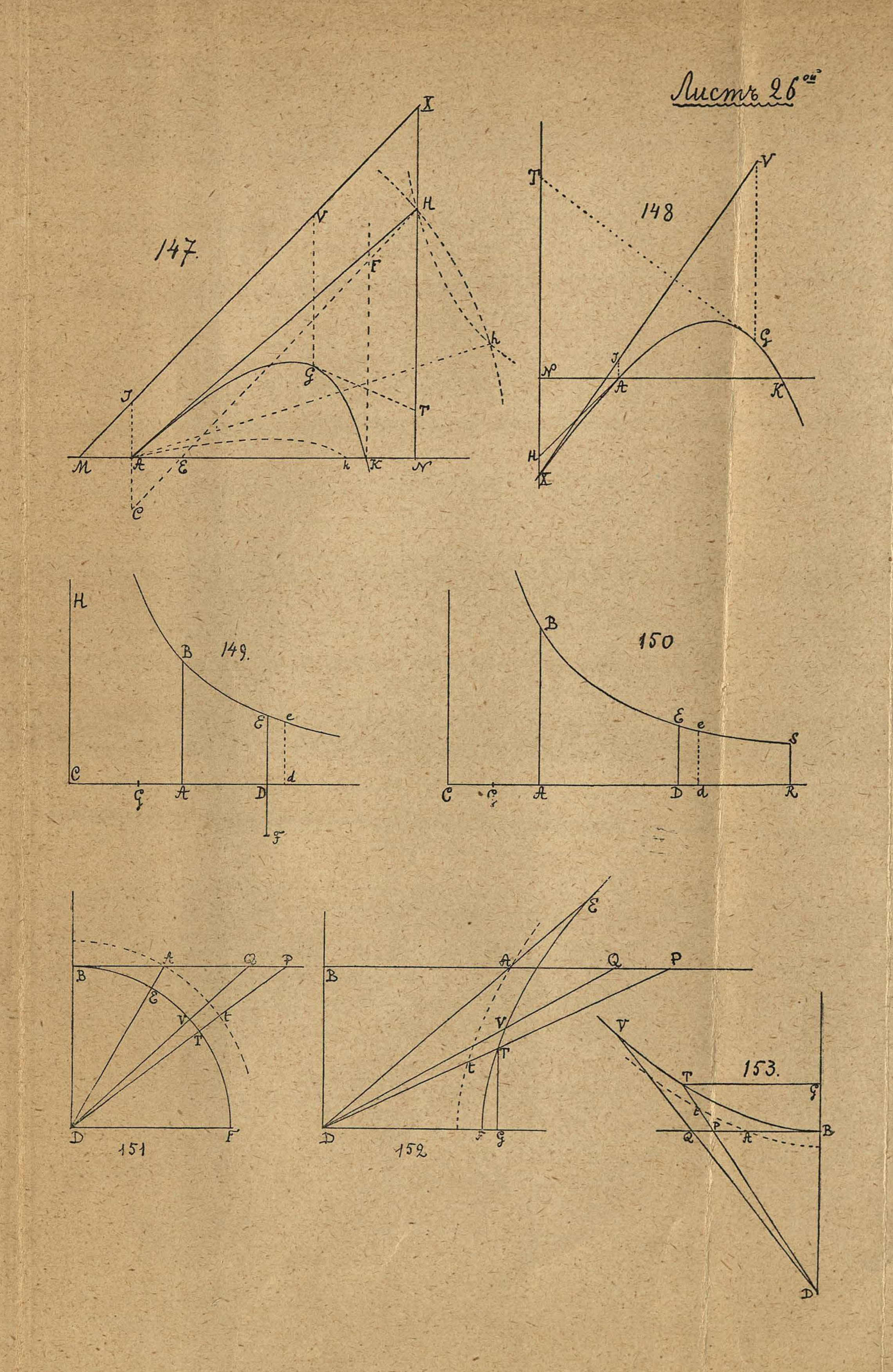
142

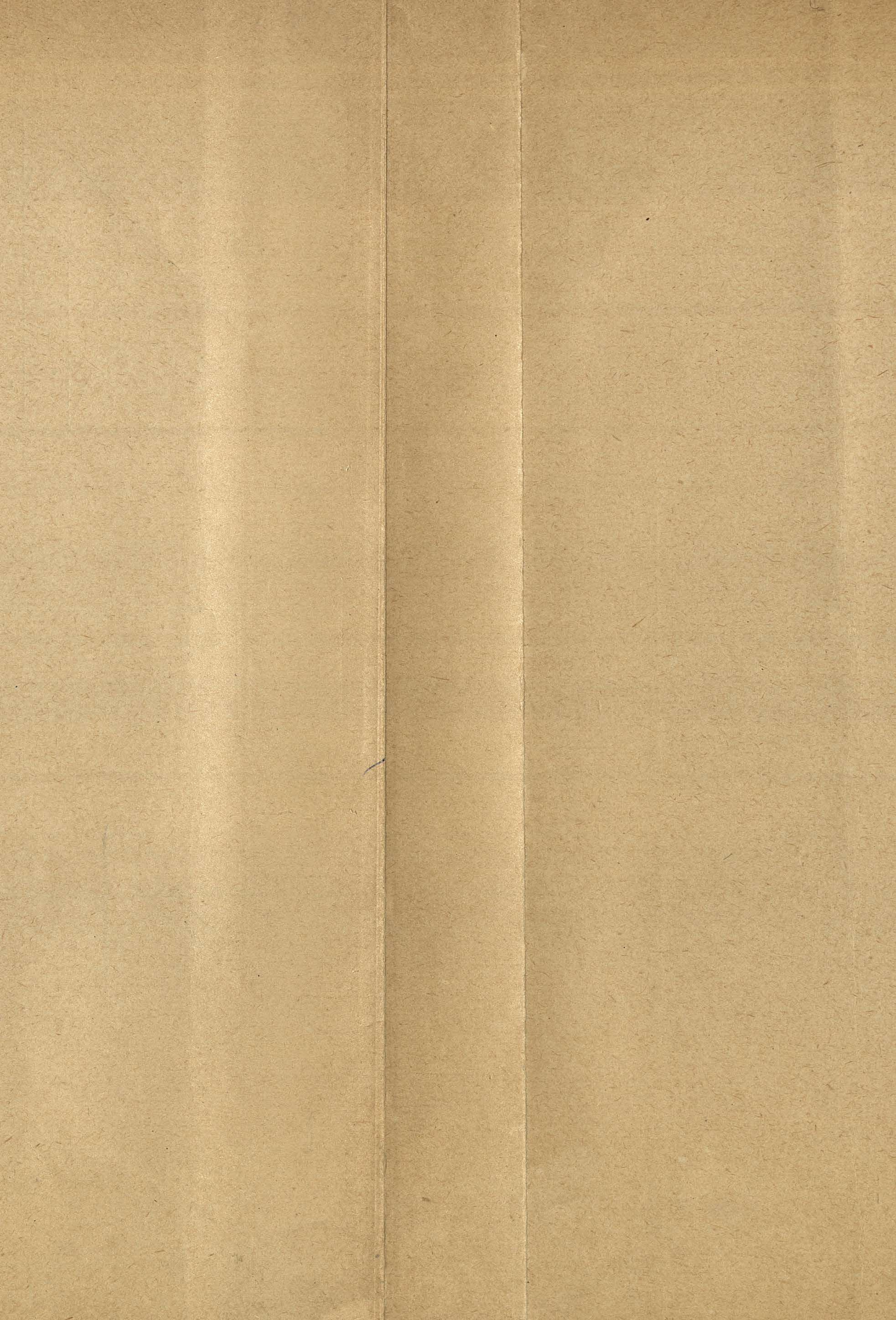
145

144.

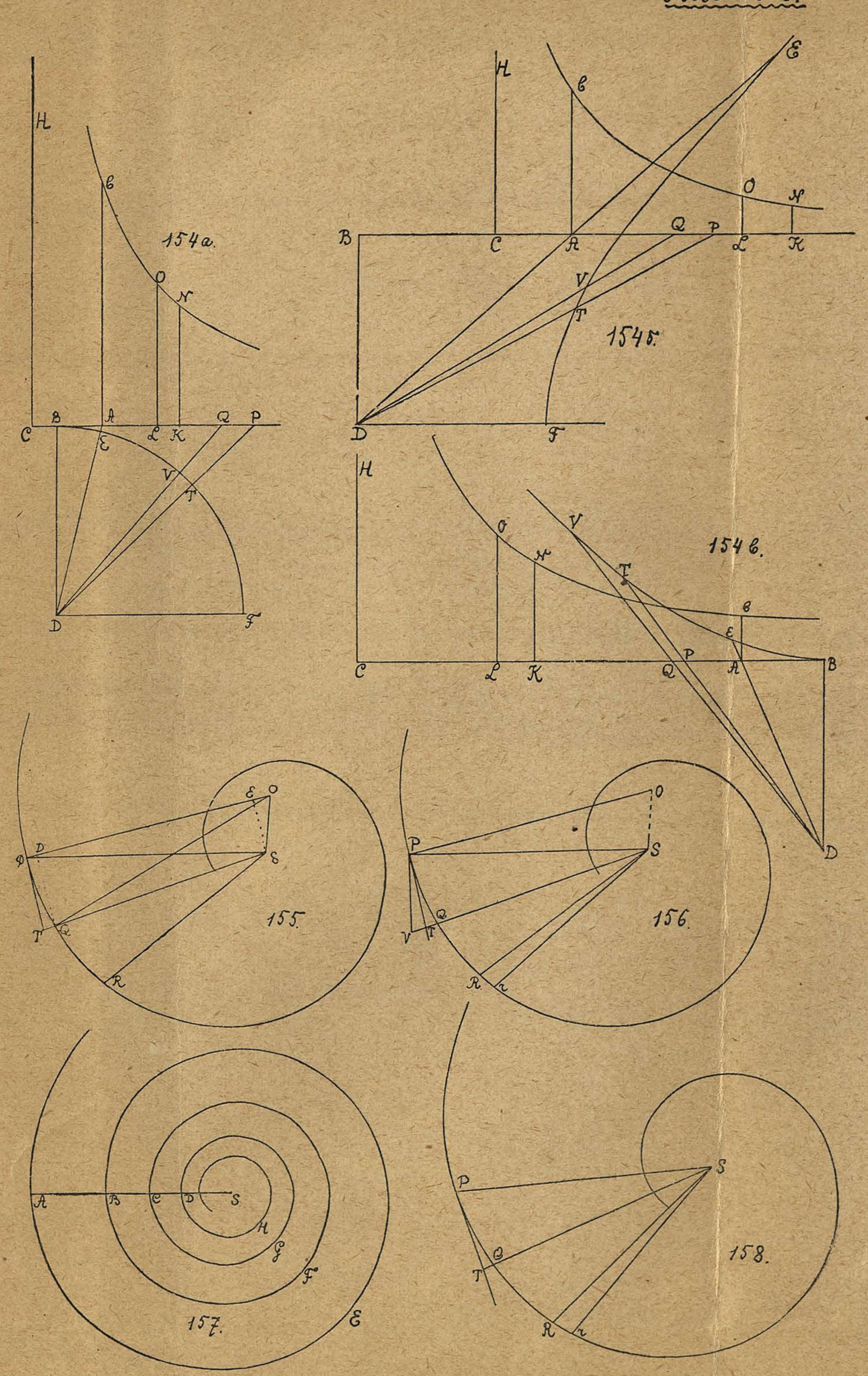
143.

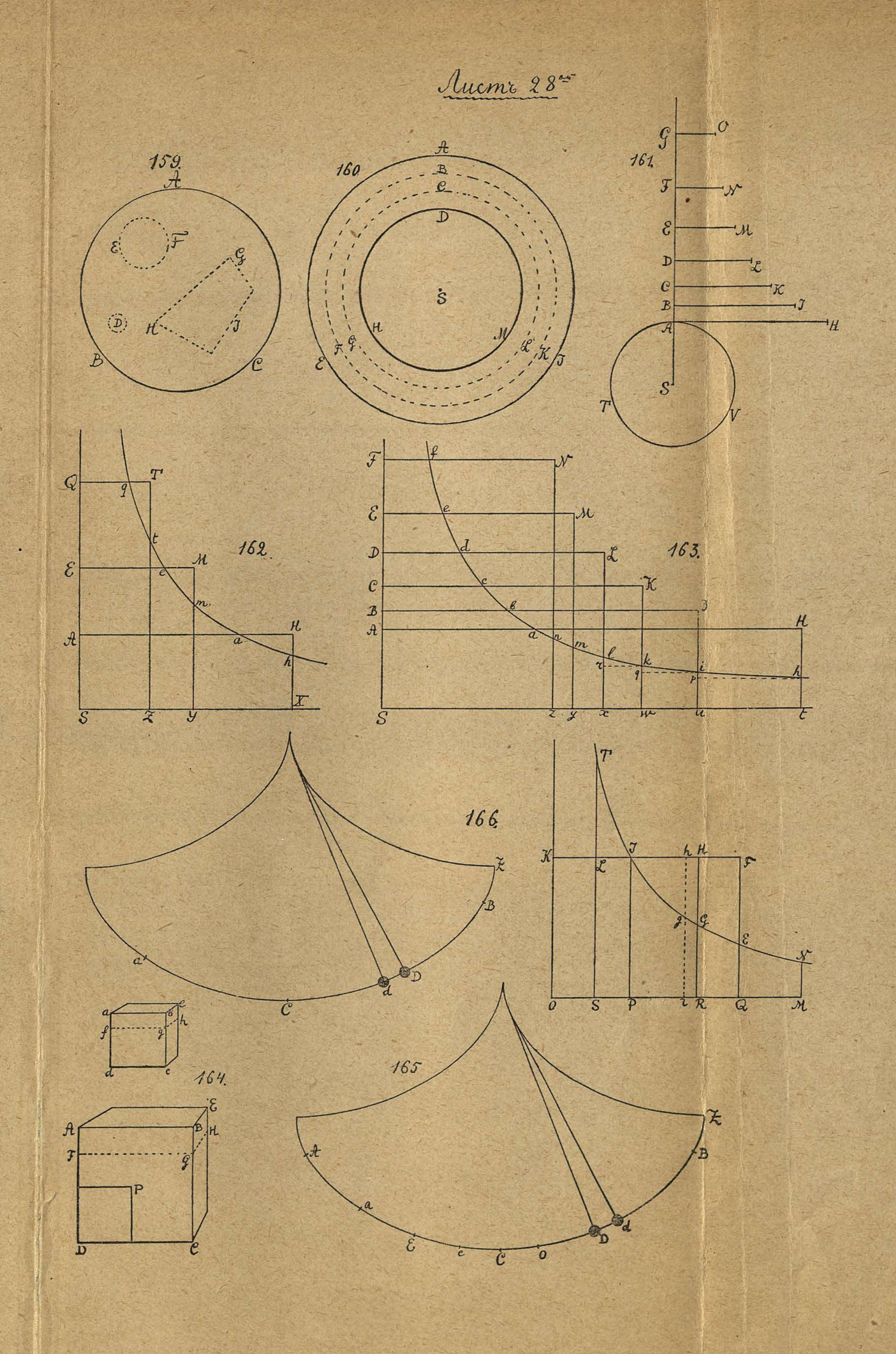
146


Листъ 26ой
147.
148
149.
150
151
152
153.



Листъ 27^ой


154a.
H
C B A L K Q P
E V T
D F
154б.
H
B C A Q P L K
V T
D F
154в.
H
O V T
C L K Q A B
D
155.
O S D Q T R
156.
O P S Q V R
157.
A B C D S H G F E
158.
P S Q T R


159.
160
161.
162.
163.
164.
165
166.

Листъ 29ти

167

168

169.

170 a.

170 в

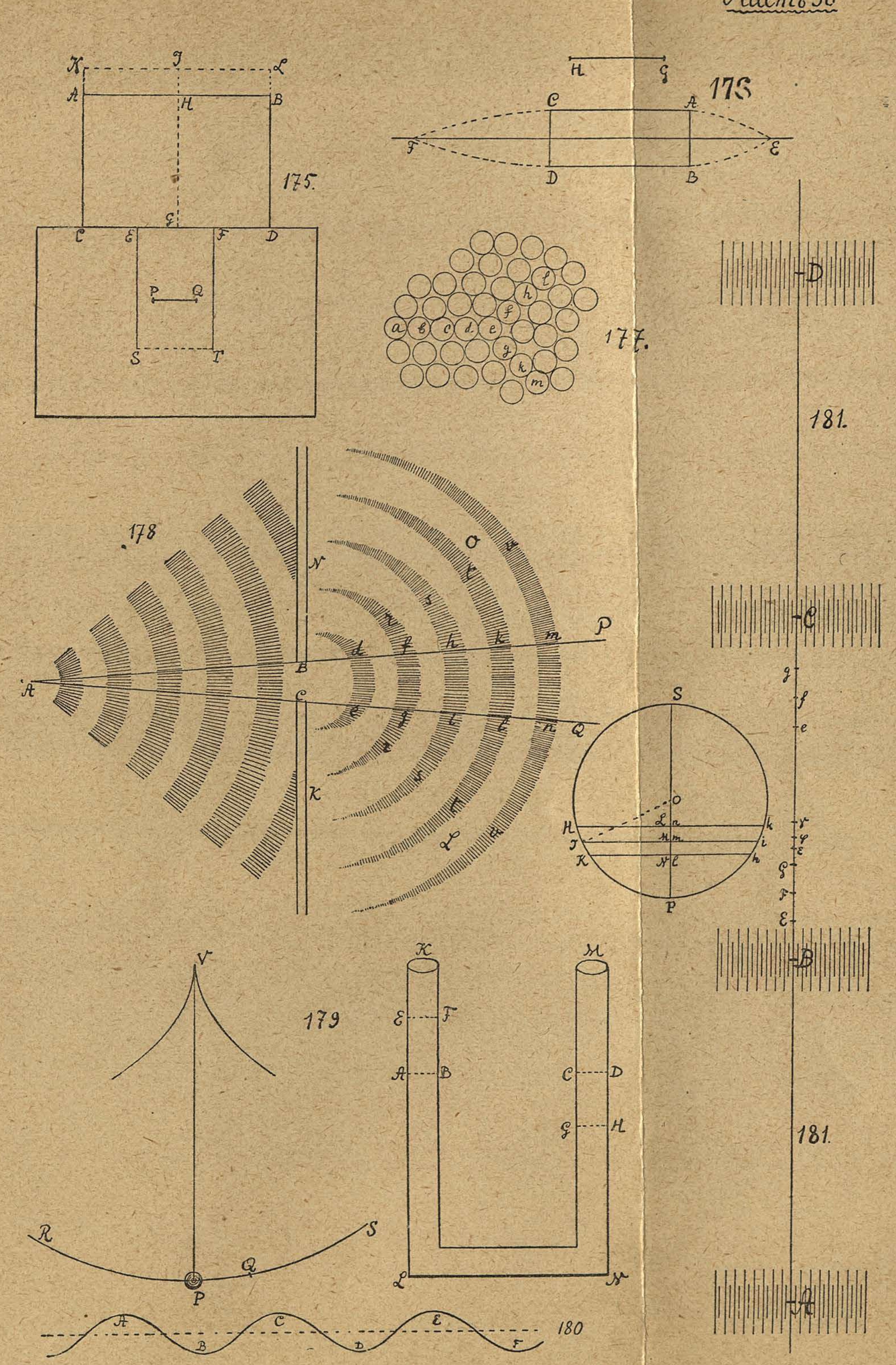
170.

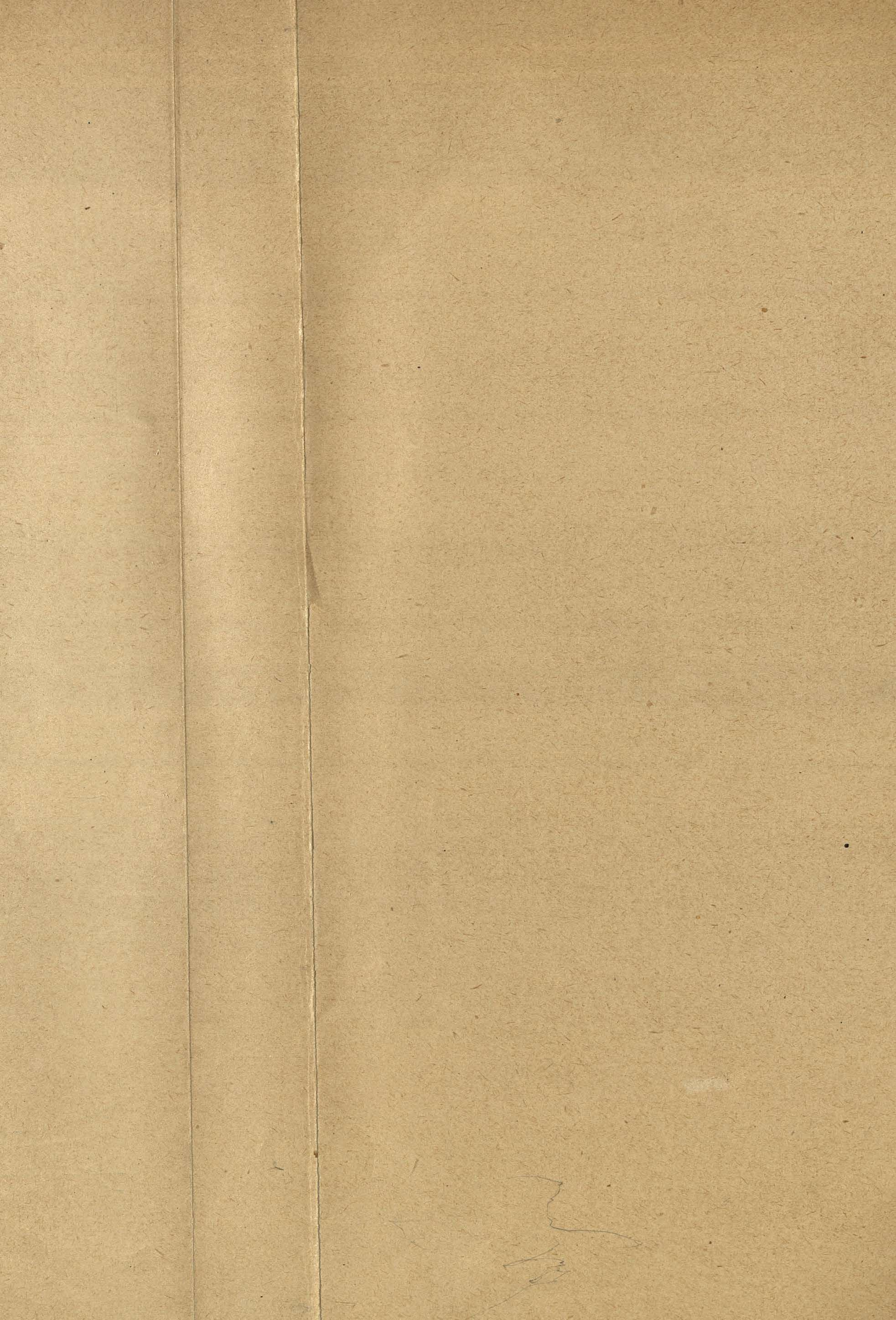
171.

172

173

174.


175.
176
177.
178
179
180
181.
181.



Листъ 31^{bis}

182.
(Къ пр. LI и LII)

183.
(Къ пр. LIII)

184

185

186

187.

188

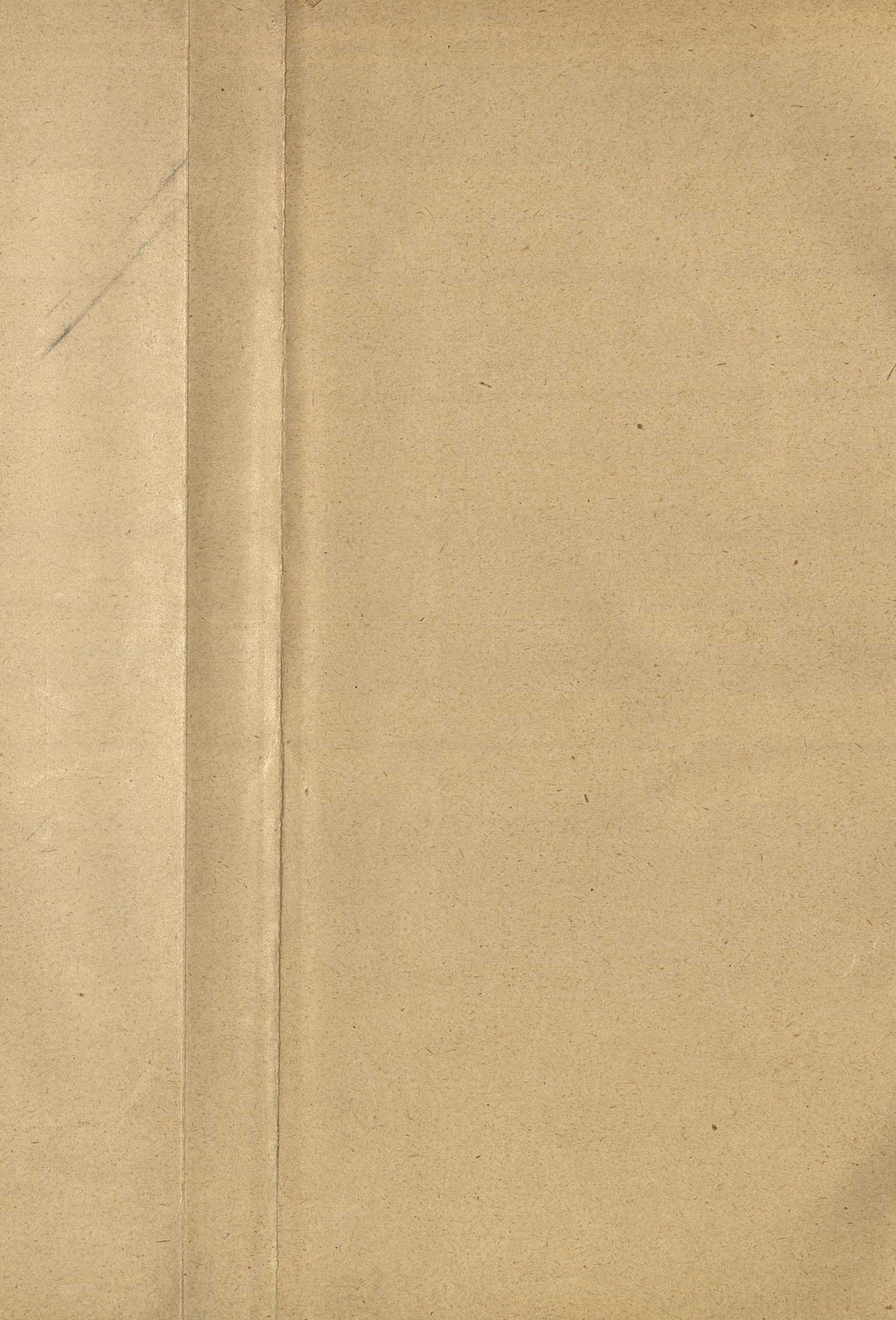
189.

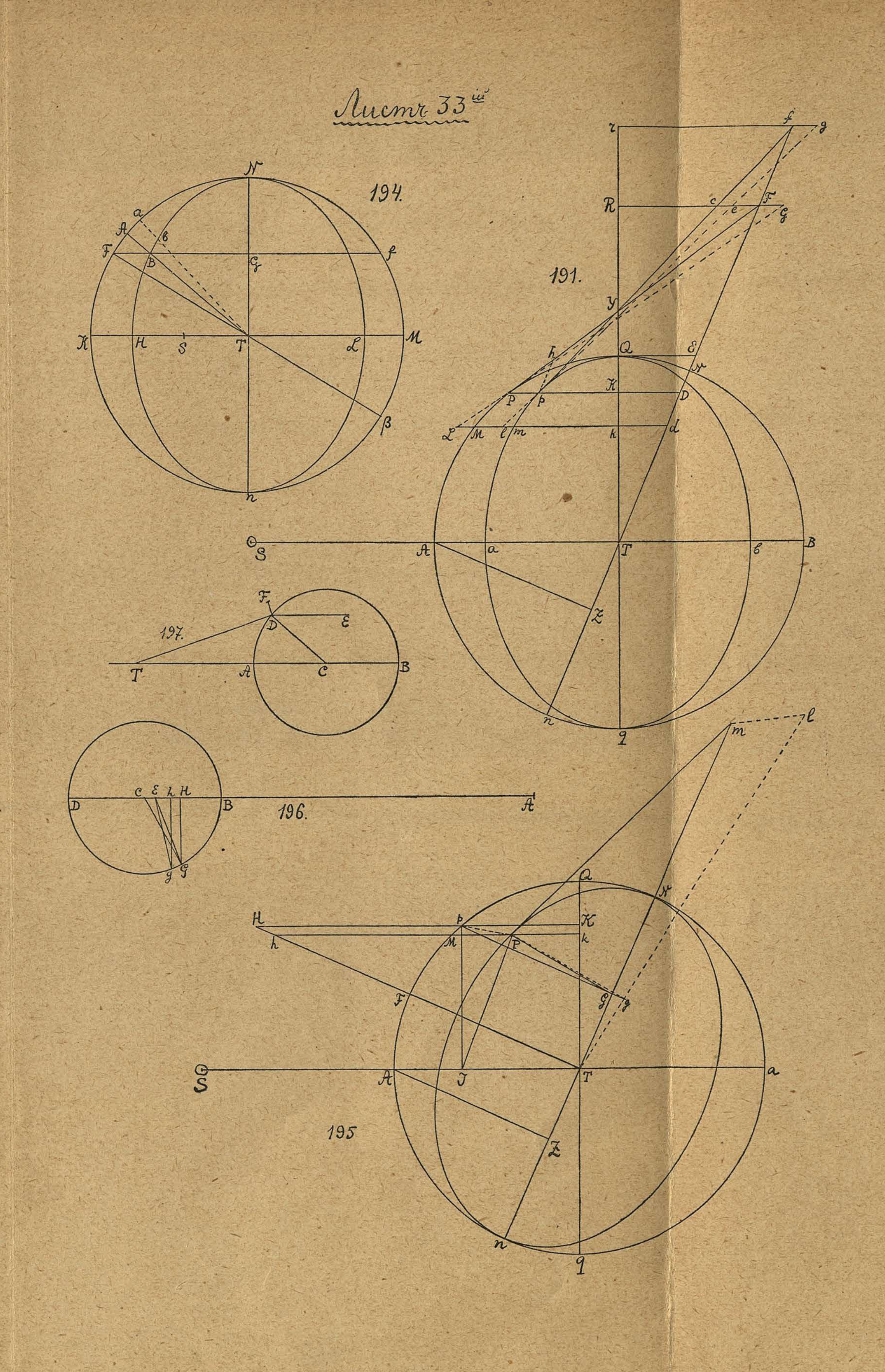
190.

193.

192.

(фиг. 191 см. л. 33).




Листъ 33ій
194.
191.
197.
196.
195

198

199

200

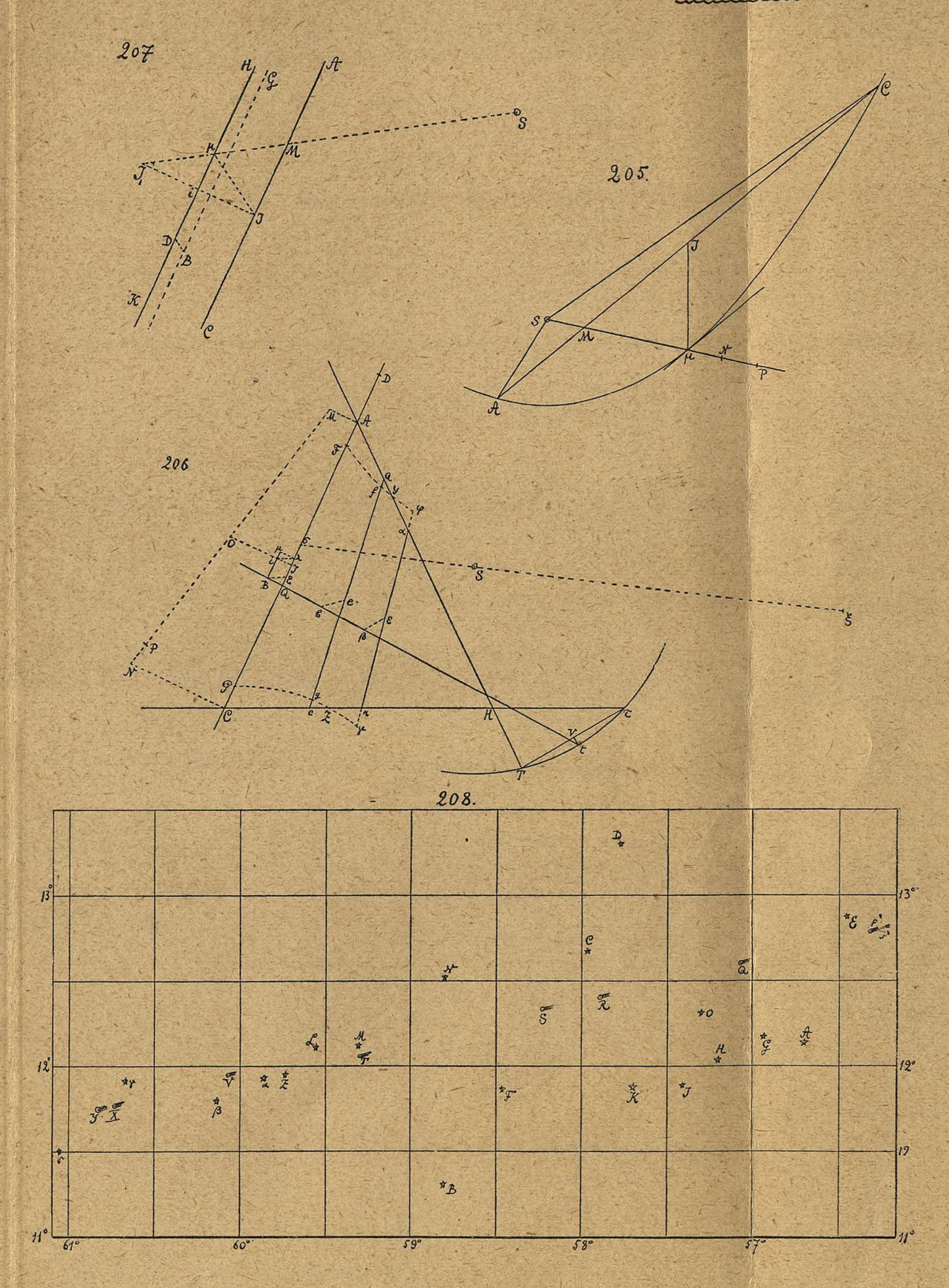
201

202

203

204

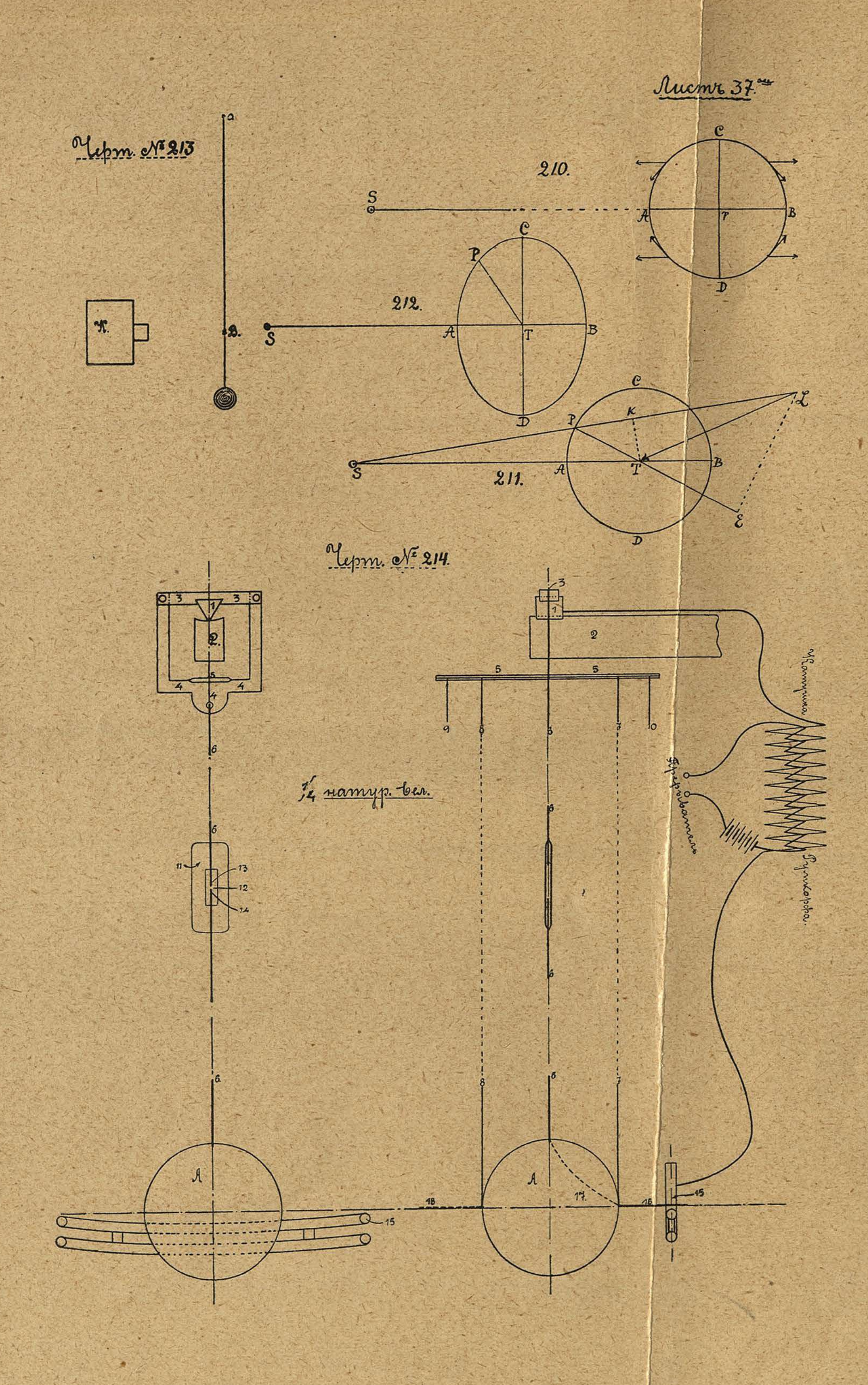
Листъ 35 bis

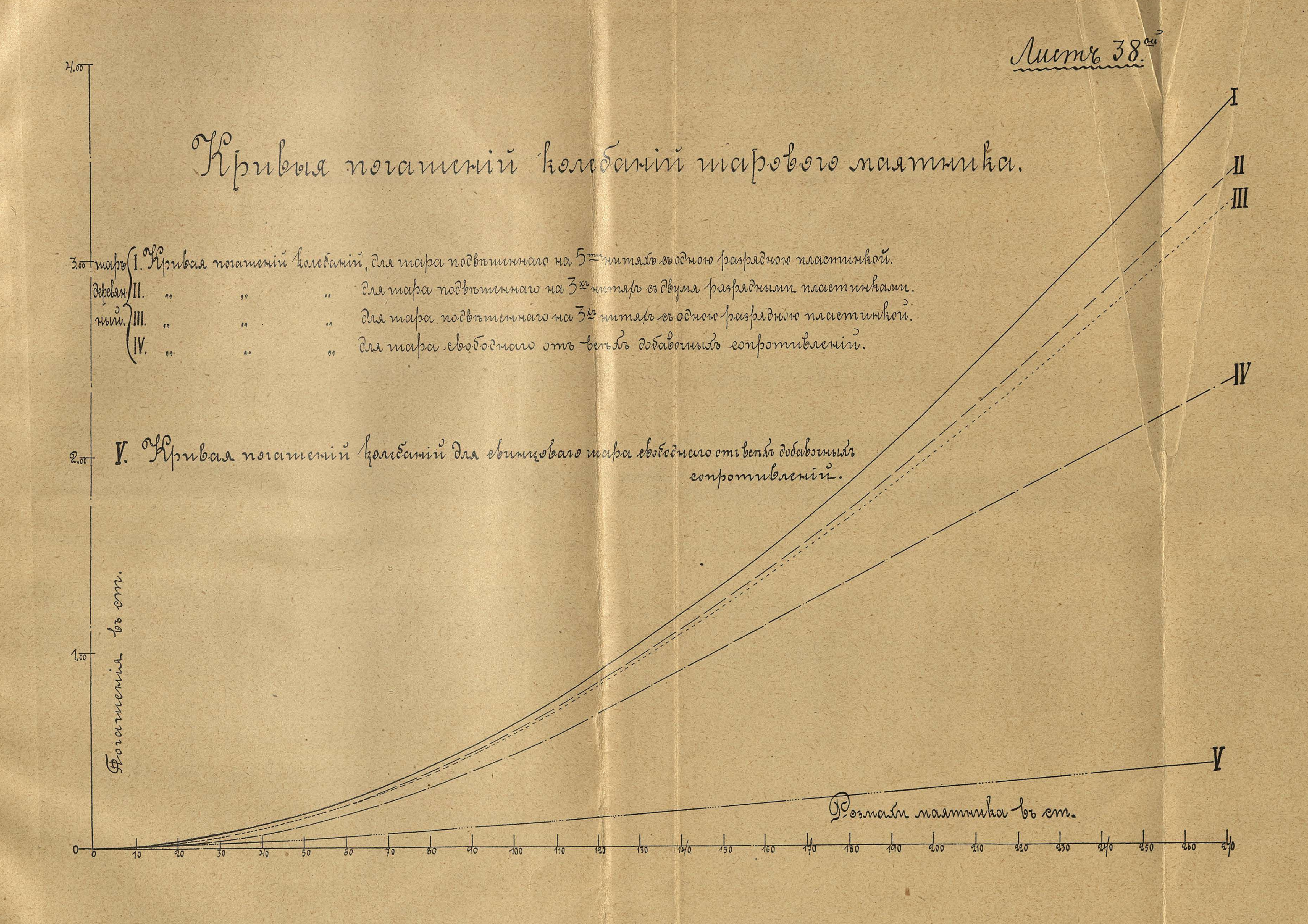


E

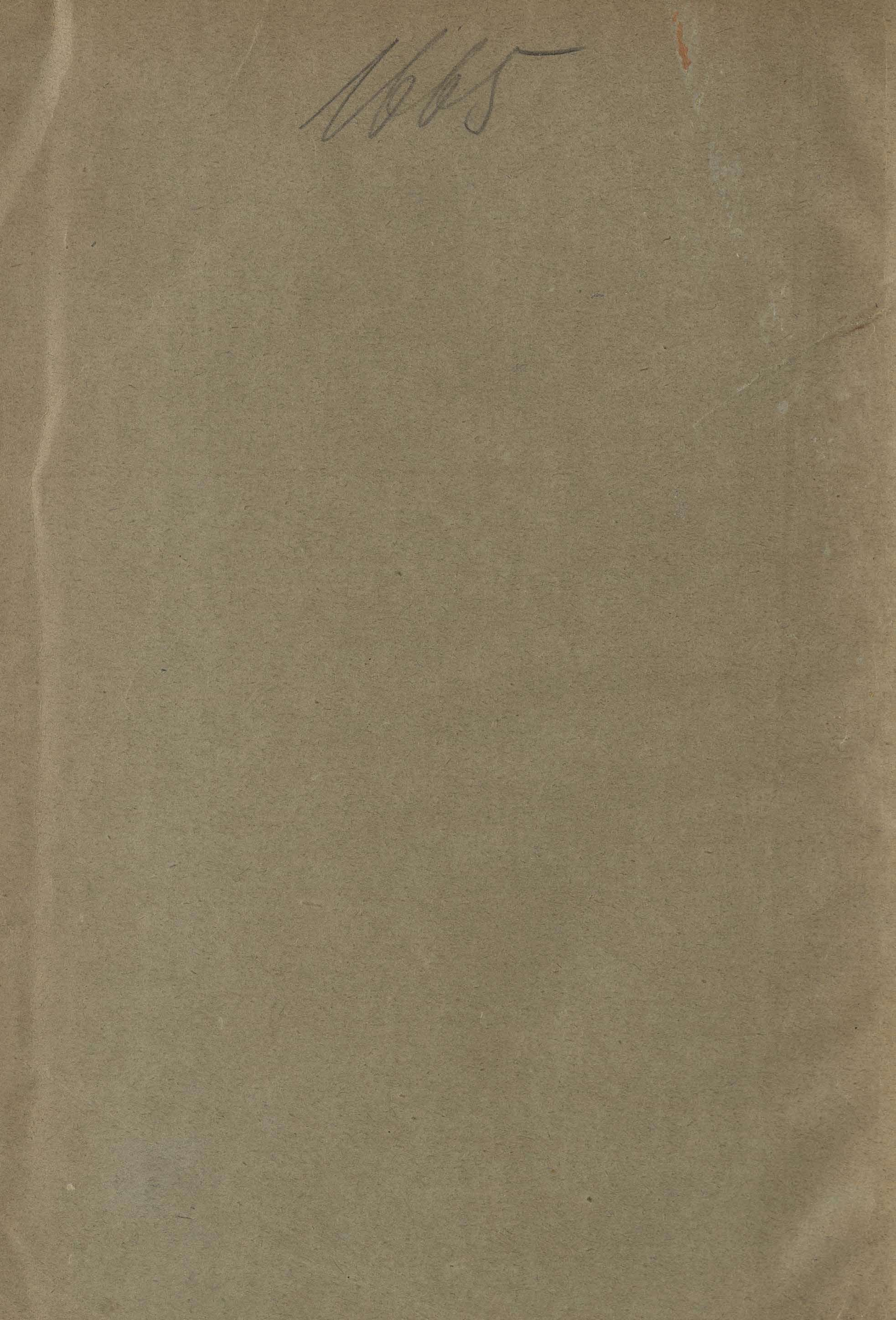
V
T
S
R
Q
P
H
F
J
K
O
G
L
N
M
D
B

209.


Листъ 37-ой
Черт. № 213
210.
211.
212.
Черт. № 214
1/4 натур. вел.
Катушка Румкорфа.
Прерыватель



Листъ 38ой
Кривыя погашений колебаний шарового маятника.
шаръ деревянный.
I. Кривая погашений колебаний, для шара подвѣшеннаго на 5ти нитяхъ съ одною разрядною пластинкой.
II. " " " для шара подвѣшеннаго на 3хъ нитяхъ съ двумя разрядными пластинками.
III. " " " для шара подвѣшеннаго на 3хъ нитяхъ съ одною разрядною пластинкой.
IV. " " " для шара свободнаго отъ всѣхъ добавочныхъ сопротивлений.
V. Кривая погашений колебаний для свинцоваго шара свободнаго отъ всѣхъ добавочныхъ сопротивлений.
Погашения въ ст.
Размахи маятника въ ст.
4.00
3.00
2.00
1.00
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
220
230
240
250
260
270
I
II
III
IV
V


1665

